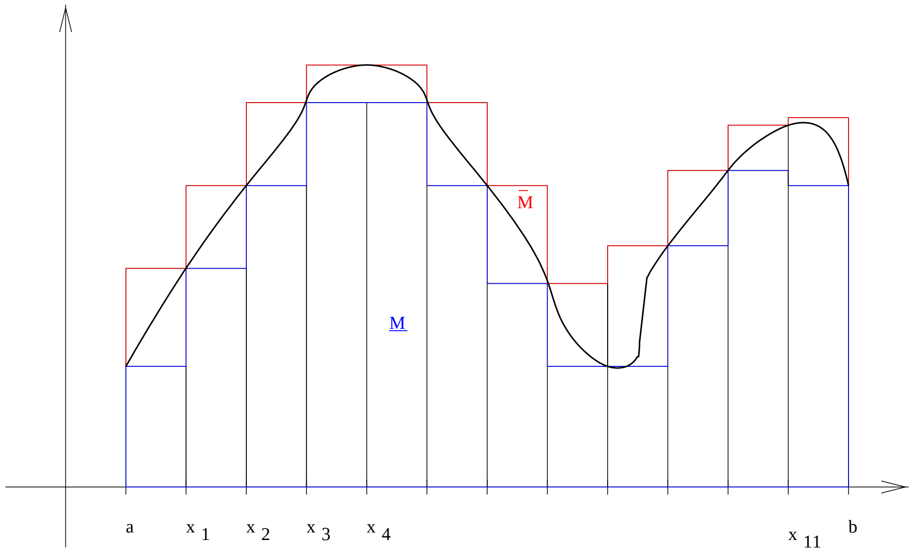
ANALYYSI 2

Camilla Hollanti



Tampereen yliopisto 2010

Sisältö

1. Preliminäärejä **3**

2. Riemann-integraali **5**

2.1. Pinta-alat ja porrasfunktiot 5

2.1.1. Pinta-ala raja-arvona 6

2.1.2. Porrasfunktiot ja niiden integraalit 8

2.2. Riemann-integraali ja Riemann-integroituvuus 10

2.2.1. Esimerkkejä 13

2.2.2. Riemannin summat 21

2.2.3. Integraalin ominaisuuksia 25

2.2.4. Integraalien arviointia 27

2.2.5. Integraalit keskiarvoina 33

2.2.6. Integraali ylärajansa funktiona 35

2.2.7. Logaritmin määrittely integraalin avulla 37

3. Derivaatta ja integraali – analyysin peruslause **40**

3.1. Integraalin derivaatta 40

3.2. Primitiivi (antiderivaatta) ja integraali 42

4. Integrointitekniikkaa **47**

4.1. Derivointikaavoista saatuja integrointikaavoja 48

4.2. Sijoitusmenetelmä eli muuttujanvaihto 49

4.3. Osittaisintegrointi 56

4.4. Rationaalifunktioiden integrointi 60

4.5. Trigonometristen funktioiden integrointi 66

4.6. (*)Eräiden muiden funktioiden integroinnista 67

5. Epäoleelliset integraalit **71**

6. Numeerisista sarjoista **87**

6.1. Peruskäsitteet ja integraalitarkastin 87

6.2. Suppenemistarkastimia 96

6.3. Vuorottelevat sarjat ja termien järjestyksen vaihto 101

7. Potenssisarjoista **109**

7.1. Funktiosarjat ja suppeneminen 109

7.2. Tasainen suppeneminen 111

7.3. Eksponenttifunktion sarja 120

7.4. Potenssisarjojen perusominaisuuksia 124

7.5. Taylorin ja Maclaurinin sarjakehitelmistä ja niiden sovelluksista . . . 131

Alkusanat

Luentomateriaali perustuu integraalien osalta Tero Kilpeläisen Jyväskylän yliopistossa vuosina 2001 ja 2003 luennoimiin analyysin kursseihin. Sarjoja käsittelevässä osiossa on hyödynnetty paikoin Jyrki Lahtosen Turun yliopistossa tänä keväänä luennoiman analyysin kurssin materiaalia. Luentomonisteen tarkoitus on tukea omien muistiinpanojen tekoa, ei korvata niitä.

Kurssi on toinen osa yhden reaalimuuttujan analyysin peruskäsitteiden esittelyä. Ensimmäisessä osassa tutustuttiin funktioihin ja jonoihin, niiden raja-arvoihin sekä jatkuvuuden käsitteeseen. Myös differentiaalilaskenta tuli tutuksi. Analyysi 2 -kurssi sisältää integraalilaskennan ja sarjojen teorian perusteet. Integraalin ja derivaatan käsitteet luovat perustan modernille matematiikalle ja luonnontieteille, tekniikan, taloustieteiden ja tilastotieteen sovellutuksista puhumattakaan.

Tällä kurssilla pääpaino on peruskäsitteiden ymmärtämisessä, varsinaista laskutekniikkaa on melko vähän – sen kehittäminen jää pääosin opiskelijan oman harrastuksen varaan. Derivaattaa ja integraalia on käsitelty pinnallisesti jo koulukurssilla. Tämän kurssin tavoitteena on syventää ymmärrystä niin, että opiskelija kykenisi opettamaan muille differentiaali- ja integraalilaskennan alkeet sekä ymmärtämään, mikä on integroinnin tai derivaatan merkitys matemaattisissa malleissa.

Monissa alkeisoppikirjoissa tyydytään esittelemään integrointi ainoastaan antiderivaattana. Tällä kurssilla painotetaan integraalin perimmäistä luonnetta mittaamiseen liittyvänä käsitteenä. Tämä auttanee paremmin ymmärtämään integraalin käyttöä moinissa sovellutuksissa, kuten energian, odotusarvon tai virheen arvioinnin yhteyksissä, kuin myös integraaleja useampiulotteisissa avaruuksissa.

Vaikka integraali käsitellään itsenäisenä kokonaisuutena, ei integroinnin ja derivoinnin keskinäistä suhdetta kuitenkaan unohdeta, sillä kurssilla todistetaan myös analyysin peruslause, jonka mukaan integrointi ja derivointi ovat usein toistensa käänteisoperaatioita. Integrointiosion lopuksi tutustutaan vielä integrointitekniikoihin ja epäoleellisiin integraaleihin.

Kurssin loppuosassa keskitytään sarjoihin. Sarja on äärettömän lukujonon kaikkien termien yhteenlasku. Tuttuja esimerkkejä jo lukiomatematiikasta ovat aritmeettinen ja geometrinen sarja. Sarjateoria on tärkeä analyysin osa-alue, joka kehittyi differentiaali- ja integraalilaskennan rinnalla 1600-luvun lopulta lähtien.

Kuten aina matematiikan opiskelussa, määritelmät on opeteltava huolella. Niiden käytön ja sisällön oppii parhaiten todistuksia tarkastelemalla ja harjoitustehtäviä tekemällä. Analyysi 1 -kurssin tiedot on syytä kerrata huolella, niitä käytetään toistuvasti jatkossa.

Kiitän Tero Kilpeläistä ja Jyrki Lahtosta materiaaliensa luovuttamisesta käyttööni.

Camilla Hollanti
5. toukokuuta 2010

1. Preliminäärejä

Esitetään kurssin aluksi joitakin tärkeitä määritelmiä ja ominaisuuksia, joista osa on tuttuja jo Analyysi 1 -kurssilta.

1.1. Määritelmä. Funktio $f : I \to \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$, on *jatkuva* pisteessä $x_0 \in I$, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,, \text{ kun } |x - x_0| < \delta \quad (x, x_0 \in I).$$

Edelleen $f : I \to \mathbf{R}$ on *jatkuva välillä* I, jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in I$.

1.2. Määritelmä. Funktio $f : I \to \mathbf{R}$ on *tasaisesti jatkuva välillä* I, jos edellisen määritelmän (ε, δ)-pari ei riipu tarkasteltavasta pisteestä, ts. jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(z)| < \varepsilon \text{ kaikilla } x, z \in I\,, \text{ joilla } |x - z| < \delta\,.$$

1.3. Lause. *Suljetulla ja rajoitetulla välillä* $[a, b]$ *jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.*

Todistus: Jatkuvuudesta seuraa, että jokaiselle välin pisteelle z löytyy oma $(\varepsilon, \delta(\varepsilon, z))$-pari, joka toteuttaa jatkuvuuteen liittyvät ehdot ko. pisteessä. Tasainen jatkuvuus voidaan nyt todeta valitsemalla $\delta = \min\{\delta(\varepsilon, z)\}$, jolloin oletusten nojalla

$$|f(x) - f(z)| < \varepsilon \text{ kaikilla } x, z \in I\,, \text{ joilla } |x - z| < \delta\,.$$

□

Jatkuvuus voidaan karakterisoida myös raja-arvojen avulla: muista, että luku $a \in \mathbf{R}$ on funktion f *raja-arvo* pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\,,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

Analyysi 1 -kurssilta muistamme, että f on jatkuva pisteessä x_0, jos ja vain jos f:llä on raja-arvo $f(x_0)$ pisteessä x_0, ts.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Seuraavat lauseet on myös hyvä muistaa:

- *Bolzanon lause*: *Välillä $[a, b]$ jatkuva funktio saa kaikki arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ väliset arvot.*
- *Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio f on rajoitettu; ts. on olemassa sellainen $M > 0$, että $f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$.*
- *Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa; ts. on olemassa sellaiset $x_1, x_2 \in [a, b]$, että $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ kaikilla $x \in [a, b]$.*

Eräs tärkeimmistä Analyysi 1 -kurssin käsitteistä on supremum (ja infimum). Muista, että epätyhjän joukon $A \subset \mathbf{R}$ *supremum* $\sup A$ on joukon A pienin yläraja. Ts. $\sup A$ on sellainen luku M, joka toteuttaa ehdot

i) M on joukon A yläraja eli $a \leq M$ kaikilla $a \in A$, ja

ii) M on joukon A ylärajoista pienin eli jos G on jokin joukon A yläraja, niin $G \geq M$.

Vastaavasti joukon $A \subset \mathbf{R}$ *infimum* $\inf A$ on joukon A suurin alaraja. Ts. $\inf A$ on sellainen luku m, jolle pätee

i) m on joukon A alaraja eli $a \geq m$ kaikilla $a \in A$, ja

ii) m on joukon A alarajoista suurin eli jos g on jokin joukon A alaraja, niin $g \leq m$.

Reaalilukujen täydellisyyden nojalla jokaisella ylhäältä rajoitetulla joukolla $A \neq \emptyset$ on $\sup A \in \mathbf{R}$, ts. jos A:llä ylipäänsä on jokin (reaalinen) yläraja, niin eräs näistä ylärajoista on pienin. Samoin alhaalta rajoitetulla joukolla $A \neq \emptyset$ on $\inf A \in \mathbf{R}$.

Lisäksi $\sup A \in A$ täsmälleen silloin, kun A:ssa on suurin alkio, jolloin $\sup A = \max A$. Samoin $\inf A \in A$ täsmälleen silloin, kun A:ssa on pienin alkio, jolloin $\inf A = \min A$.

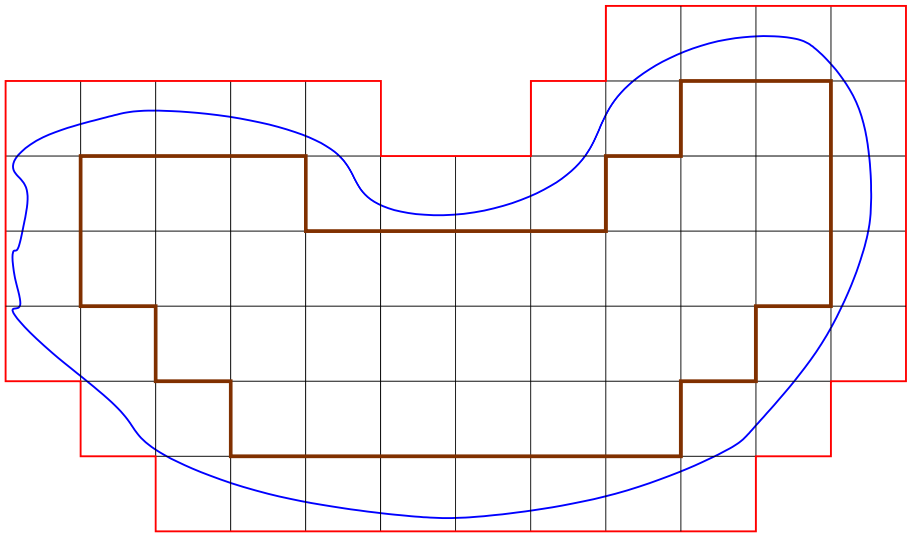
2. Riemann-integraali

Integrointi ja differentiointi (derivointi) ovat kaksi analyysin keskeisintä rajaprosessia. Aloitamme integraalin käsitteen esittelyllä. Eräs tämän kurssin ja koko analyysin merkittävimmistä tuloksista, analyysin peruslause, ilmaisee, että derivointi ja integrointi ovat toistensa käänteisprosesseja – vaikka ensi näkemältä näillä ei näyttäisi olevan juurikaan tekemistä toistensa kanssa. Usein differentiaali-ja integraalilaskennan alkeisopetuksessa tyydytään esittelemään integraali vain antiderivaattana. Tällainen menettely antaa kuitenkin vain hailakan kuvan integraalin käsitteestä, joka on varsin keskeinen analyysissä.

Lähinnä historiallisista syistä on tapana esitellä ensimmäisenä integraalin käsitteenä ns. *Riemann-integraali*, vaikka nykyisin käytetään lähinnä tehokkaampaa *Lebesgue-integraalia*. Toisaalta Riemann-integraali on helpompi määritellä ilman esivalmisteluja ja antaa mm. jatkuville funktioille täsmälleen saman tuloksen.

2.1. Pinta-alat ja porrasfunktiot

Intuitiivisesti tasojokoukon pinta-ala on sen sisältämien yksikköneliöiden lukumäärä. Tarkempia lukuja saadaan jakamalla yksikköneliöiden sivut esim. 10 yhtäsuureen osaan, jolloin saadaan sadasosan pinta-aloja, jne.



Intuitiomme mukaan pinta-alalla tulisi olla seuraavat ominaisuudet:

1. Pinta-ala on positiivinen luku.

2. Suorakaiteen pinta-ala on sen kannan ja korkeuden tulo.
3. Alueen pinta-ala ei saa muuttua aluetta siirrettäessä.
4. Koko alueen pinta-ala on osa-alojen pinta-alojen summa.
5. Visuaalisesti suuremmalla joukolla on suurempi pinta-ala.

2.1.1 Pinta-ala raja-arvona

Jatketaan pinta-alatarkastelua arvioimalla ei-negatiivisen funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ graafin alle jäävän alueen pinta-alaa.

Jaetaan väli $[a, b]$ äärellisen moneen (n kpl) osaväliin, jakopisteinä

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

ja piirretään graafin alle mahdollisimman korkeat suorakaiteet $\underline{S}_j$, kunkin kantana osaväli $[x_{j-1}, x_j]$. Siten $\underline{S}_j$ on karteesinen tulo

$$[x_{j-1}, x_j] \times [0, y_j]\,,$$

missä

$$y_j = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j] \}\,.$$

Suorakaiteiden $\underline{S}_j$ pinta-alat osataan laskea, sillä ne ovat yksinkertaisesti $y_j(x_j - x_{j-1})$. Näin ollen graafin alle piirretyn monikulmion

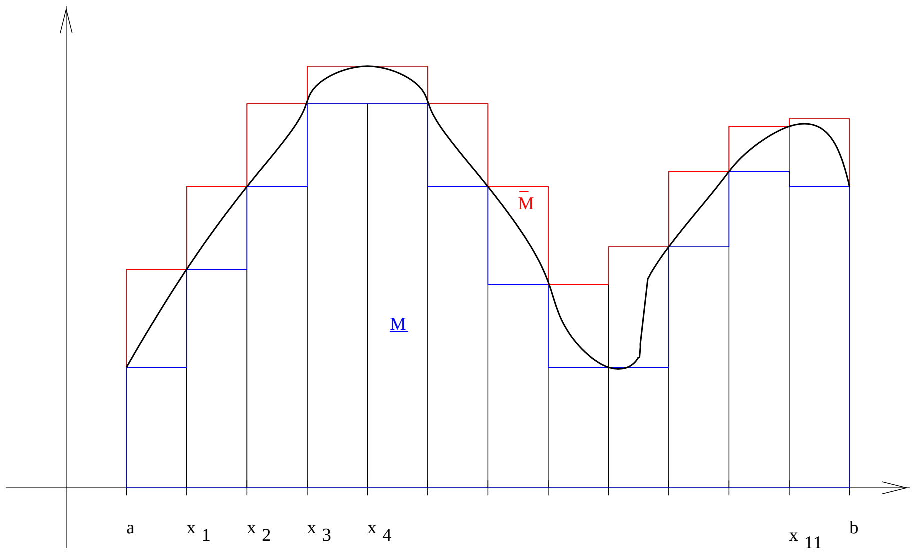
$$\underline{M} = \bigcup_{j=1}^{n} \underline{S}_j$$

pinta-ala on suorakaiteiden $\underline{S}_j$ pinta-alojen summa

$$\sum_{j=1}^{n} y_j(x_j - x_{j-1})\,.$$

Huomataan, että graafin alle jäävän alueen pinta-ala

$$A \geq \sum_{j=1}^{n} y_j(x_j - x_{j-1})\,.$$



Seuraavaksi tehdään samanlainen approksimointi yläpuolelta: Piirretään mahdollisimman matalat suorakaiteet $\overline{S}_j$, joilla on kantoina osavälit $[x_{j-1}, x_j]$ ja joiden katto z_j on f:n graafin yläpuolella. Nyt $\overline{S}_j$ on karteesinen tulo

$$[x_{j-1}, x_j] \times [0, z_j]\,,$$

missä

$$z_j = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\}\,.$$

Suorakaiteiden $\overline{S}_j$ pinta-alat ovat $z_j(x_j - x_{j-1})$, joten monikulmion

$$\overline{M} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{S}_j$$

pinta-ala on

$$\sum_{j=1}^{n} z_j(x_j - x_{j-1})\,.$$

Huomataan, että graafin alle jäävän alueen pinta-ala

$$A \leq \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j - x_{j-1})\,.$$

Yhdistämällä nämä arviot saadaan graafin alle jäävän alueen pinta-alalle A arviot

$$\sum_{j=1}^{n} \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) \leq A \leq \sum_{j=1}^{n} \sup_{z\in[x_{j-1},x_j]} f(z)(x_j - x_{j-1})\,.$$

Jatkossa osoitetaan, että lisäämällä jakovälien määrää tällainen approksimointiprosessi johtaa useissa tilanteissa halutun pinta-alan (integraalin) saamiseen rajalla. Kuitenkaan vakavasti otettava matematiikka ei voi pohjautua intuitioon, vaikka intuitiivinen käsitys ja kuvien piirtely ovatkin erittäin tärkeä osa ymmärrystä ja ongelmanratkaisuprosessia. Täsmällistä, havainnoista riippumatonta teoriaa kehitettäessä yllä tehdyt tarkastelut onkin hyvä pitää mielessä, sillä teoria toki selittää havaintomme.

2.1.2 Porrasfunktiot ja niiden integraalit

Aloitimme pinta-alan intuitiivisesta käsitteestä ja johdimme sen avulla integraalin approksimoivana raja-prosessina. Nyt teemme päinvastoin: integraalin tarkassa määritelmässä lähdemme liikkeelle approksimoivista (pinta-alojen) summista, jotka määritellään puhtaan analyyttisesti. Myöhemmin *osoitamme*, että ylhäältä ja alhaalta approksimoivat summat suppenevat kohti samaa lukua edellyttäen, että funktio on sopivan “siisti”. Se mitä siistillä tässä yhteydessä tarkoitetaan selviää myöhemmin. Ala- ja yläsumman yhteinen raja-arvo on integraalin (ja pinta-alan) täsmällinen *määritelmä*.

Olkoon I rajoitettu väli, jonka päätepisteet ovat $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

2.1. Määritelmä. (jako, porrasfunktio) Välin I *jaon* muodostavat luvut ($n < \infty$)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\,.$$

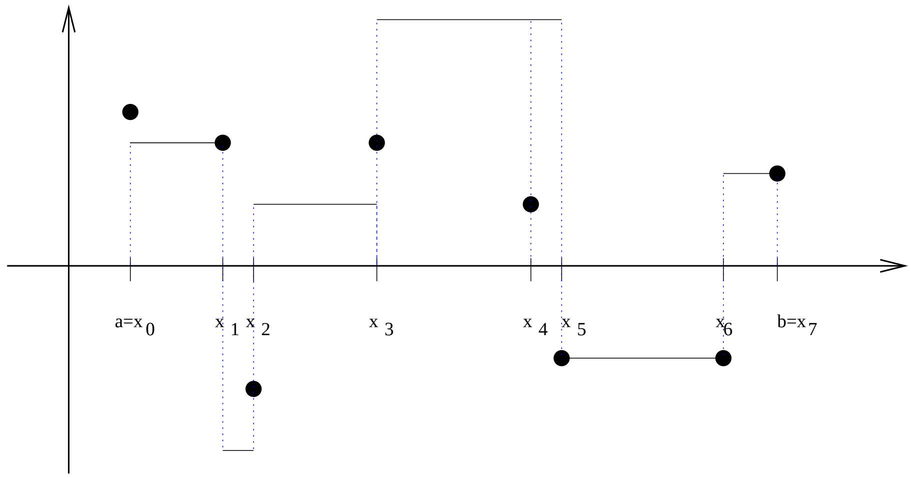
Funktio $f : I \to \mathbf{R}$ on *porrasfunktio*, jos on olemassa välin I jako

$$P = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ja luvut $a_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, joille

$$f(x) = a_j \text{ kaikilla } x \in]x_{j-1}, x_j[.$$

2.2. Huomautus. Porrasfunktion välijaon voi tehdä monella tapaa. Porrasfunktion arvoille jakopisteissä x_j ei aseteta mitään ehtoa. Porrasfunktion graafi muodostaa nimensä mukaisesti portaikon.



2.3. Määritelmä. (porrasfunktion integraali) Porrasfunktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *integraali* (yli välin $[a,b]$) on

$$\int_a^b f := \sum_{j=1}^n a_j \ell(I_j)\,,$$

missä $P = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on välin $[a,b]$ jako siten, että

$$f(x) = a_j \text{ kaikilla } x \in I_j =]x_{j-1}, x_j[$$

ja

$$\ell(I_j) = x_j - x_{j-1}$$

on osavälin $I_j =]x_{j-1}, x_j[$ *pituus.*

2.4. Huomautus.

1. Porrasfunktion integraali on hyvin määritelty: se ei riipu valitusta välijaosta (harjoitustehtävä).

2. Jos f ja g ovat porrasfunktioita välillä $[a,b]$ ja $\lambda \in \mathbf{R}$, niin $f+g$ ja λf ovat porrasfunktioita ja

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{ja} \quad \int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f\,.$$

2.2. Riemann-integraali ja Riemann-integroituvuus

Olkoon $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ rajoitettu, ts. on olemassa $M > 0$, jolle $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a,b]$.

Määritellään f:n *alaintegraali* yli välin $[a,b]$

$$\text{ala}\int_a^b f := \sup\left\{ \int_a^b g \;\middle|\; g \text{ porrasfunktio ja } g \leq f \text{ välillä } [a,b] \right\}$$

ja f:n *yläintegraali* yli välin $[a,b]$

$$\text{ylä}\int_a^b f := \inf\left\{ \int_a^b h \;\middle|\; h \text{ porrasfunktio ja } h \geq f \text{ välillä } [a,b] \right\}.$$

2.5. Huomautus. Ei ole lainkaan selvää yhtyvätkö ala- ja yläintegraalit eli päteekö yhtälö

$$\text{ala}\int_a^b f = \text{ylä}\int_a^b f\,.$$

Kuitenkin

$$\text{ala}\int_a^b f \leq \text{ylä}\int_a^b f\,,$$

sillä (harjoitustehtävä) jos g ja h ovat porrasfunktioita ja $g \leq h$, niin

$$\int_a^b g \leq \int_a^b h\,.$$

Edelleen porrasfunktiolle g pätee

$$\text{ala}\int_a^b g = \text{ylä}\int_a^b g\,.$$

2.6. Määritelmä. (Riemann-integraali ja Riemann-integroituvuus) Rajoitettu funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on *(Riemann-)integroituva*, jos

$$\text{ala}\int_a^b f = \text{ylä}\int_a^b f\,.$$

Tällöin f:n *(Riemann-)integraali* yli välin $[a, b]$ on

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := \text{ala}\int_a^b f = \text{ylä}\int_a^b f\,.$$

Tässä dx ilmaisee, että integraalia lasketaan integrandin f muuttujan x suhteen.

2.7. Huomautus. Porrasfunktiot ovat Riemann-integroituvia.

Hetken päästä osoitamme, että tasaisesti jatkuvat funktiot ovat integroituvia. Tätä voidaan havainnollistaa sillä tosiasialla, että pienillä osaväleillä tasaisesti jatkuva funktio ei juurikaan heilahtele, joten ylä- ja alapuolisten porrasfunktioiden väliin ei jää merkittävästi pinta-alaa.

Aloitetaan tekemällä yksinkertainen, mutta erittäin hyödyllinen havainto. Sen jälkeen laskemme määritelmän avulla esimerkkifunktioiden integraaleja. Myöhemmin kehitämme teoriaa integraalien laskemiseksi.

R-ehto

2.8. Lause. (Riemannin ehto) *Rajoitettu funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, jos ja vain jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellaiset porrasfunktiot g ja h, että*

$$g \le f \le h \text{ välillä } [a, b]$$

ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon\,.$$

TODISTUS: $\Rightarrow$: Jos f on integroituva, niin

$$\text{ylä}\int_a^b f = \text{ala}\int_a^b f\,.$$

Jos $\varepsilon > 0$, niin infimumin määritelmän nojalla voidaan valita porrasfunktio h siten, että $h \geq f$ ja

$$\int_a^b h < \text{ylä} \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Samoin supremumin määritelmän nojalla voidaan valita porrasfunktio g siten, että $g \leq f$ ja

$$\int_a^b g > \text{ala} \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Nyt

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \text{ylä} \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - (\text{ala} \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon\,,$$

koska

$$\text{ylä} \int_a^b f = \text{ala} \int_a^b f\,.$$

$\Leftarrow$: Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen ja h ja g sellaisia porrasfunktioita, että

$$g \leq f \leq h \text{ välillä } [a, b]$$

ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon\,.$$

Tällöin

$$\text{ylä} \int_a^b f \leq \int_a^b h < \varepsilon + \int_a^b g \leq \varepsilon + \text{ala} \int_a^b f\,,$$

ts.

$$\text{ylä} \int_a^b f \leq \text{ala} \int_a^b f + \varepsilon \quad \text{kaikilla } \varepsilon > 0\,,$$

joten

$$\text{ylä} \int_a^b f \leq \text{ala} \int_a^b f \quad \left(\leq \text{ylä} \int_a^b f \right).$$

Siis

$$\text{ylä}\int_a^b f = \text{ala}\int_a^b f\,.$$

□

2.9. Huomautus. Riemannin ehdon hyödyllisyys tulee ilmi siinä, ettei f:n ala- ja yläintegraaleja tarvitse osata laskea nähdäkseen, että funktio on integroituva: riittää osata arvioida alaporrasfunktion ja yläporrasfunktion graafien väliin jäävää pinta-alaa, sillä porrasfunktioille h ja g pätee

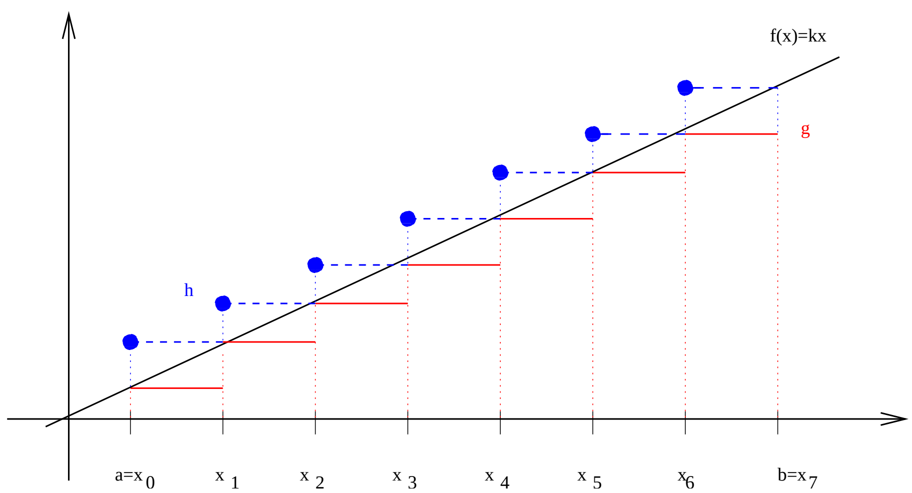
$$\int_a^b h - \int_a^b g = \int_a^b (h-g)\,.$$

2.2.1 Esimerkkejä

Seuraavaksi laskemme määritelmän avulla eräitä integraaleja.

Esimerkki. 1. (*Lineaarifunktion integraali*) Olkoon $f(x) = kx$, $k > 0$. Osoitetaan, että f on integroituva ja lasketaan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b kx\,dx\,.$$



Jaetaan väli $[a, b]$ n yhtäsuureen osaväliin, jakopisteinä

$$a, a+t, a+2t, \ldots, a+nt = b\,,$$

missä

$$t = \frac{b-a}{n}\,.$$

Määritellään porrasfunktiot g ja h siten, että

$$g(x) = k(a+(j-1)t)\,,\ \text{kun } x \in [a+(j-1)t, a+jt[\,,$$

ja

$$h(x) = k(a+jt)\,,\ \text{kun } x \in [a+(j-1)t, a+jt[\,,$$

missä $j = 1, \ldots, n$ ja $g(b) = h(b) = f(b)$. Tällöin $g \leq f \leq h$. Edelleen,

$$\begin{aligned}
\int_a^b g &= tka + tk(a+t) + \cdots + tk(a+(n-1)t) \\
&= ntka + t^2k(0+1+2+\cdots+(n-1)) \\
&= ntka + t^2k\frac{n(n-1)}{2} \\
&= n\frac{b-a}{n}ka + \frac{(b-a)^2}{n^2}k\frac{n(n-1)}{2} \\
&= (b-a)ka + \frac{(b-a)^2}{2}k\frac{n-1}{n} \\
&\to (b-a)ka + \frac{(b-a)^2}{2}k\,,
\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Samoin

$$\begin{aligned}
\int_a^b h &= tk(a+t) + tk(a+2t) + \cdots + tk(a+nt) \\
&= ntka + t^2k(1+2+\cdots+n) \\
&= ntka + t^2k\frac{n(n+1)}{2} \\
&= n\frac{b-a}{n}ka + \frac{(b-a)^2}{n^2}k\frac{n(n+1)}{2} \\
&= (b-a)ka + \frac{(b-a)^2}{2}k\frac{n+1}{n} \\
&\to (b-a)ka + \frac{(b-a)^2}{2}k\,,
\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Siten f on integroituva (Riemannin ehto) ja

$$\int_a^b f = \int_a^b kx\,dx = (b-a)ka + \frac{(b-a)^2}{2}k = \frac{k}{2}(b^2 - a^2)\,.$$

Esimerkki. 2. Olkoon $f(x) = x^2$. Osoitetaan, että f on integroituva ja lasketaan

$$\int_a^b x^2\,dx\,.$$

Symmetriasyistä voimme rajoittua tilanteeseen $a \geq 0$. Muodostetaan jako kuten edellisessä esimerkissä, jakopisteinä

$$a, a+t, a+2t, \ldots, a+nt = b\,,$$

missä

$$t = \frac{b-a}{n}\,.$$

Määritellään porrasfunktiot g ja h siten, että

$$g(x) = f(a+(j-1)t) = (a+(j-1)t)^2\,, \text{ kun } x \in [a+(j-1)t, a+jt[\,,$$

ja

$$h(x) = f(a+jt) = (a+jt)^2\,, \text{ kun } x \in [a+(j-1)t, a+jt[\,,$$

ja $g(b) = h(b) = f(b)$. Tällöin $g \leq f \leq h$ ja

$$\begin{aligned}
\int_a^b g &= a^2 t + (a+t)^2 t + \cdots + (a+(n-1)t)^2 t \\
&= na^2 t + 2at^2(0 + 1 + \cdots + (n-1)) + t^3(0 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) \\
&= na^2 t + 2at^2 \frac{n(n-1)}{2} + t^3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= a^2(b-a) + 2a\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(b-a)^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&\to a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3}\,,
\end{aligned}$$

missä käytimme kaavaa

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\,.$$

Kuten yllä, saadaan

$$\begin{aligned}
\int_a^b h &= (a+t)^2 t + (a+2t)^2 t + \cdots + (a+nt)^2 t \\
&= na^2 t + 2at^2(1+2+\cdots+n) + t^3(1^2+2^2+\cdots+n^2) \\
&= na^2 t + 2at^2\frac{n(n+1)}{2} + t^3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= a^2(b-a) + 2a\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(b-a)^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&\to a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3}\,.
\end{aligned}$$

Siten f on integroituva (Riemannin ehto) ja

$$\int_a^b x^2\,dx = a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{1}{3}(b^3-a^3)\,.$$

Esimerkki. 3. Olkoon $f(x) = x^k$, $k \in \mathbf{N}$. Osoitetaan, että f on integroituva ja lasketaan

$$\int_a^b x^k\,dx\,.$$

Jaetaan nyt väli $[a,b]$ tasavälijaon sijasta geometrisessa suhteessa (oletetaan $a > 0$), jakopisteinä

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^n\,,$$

missä siis

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}\,;$$

merkitään myös

$$x_j = aq^j\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

Huomaa, että $q > 1$, joten viimeinen jakoväli on suurin ja $q \to 1$, kun $n \to \infty$. Jakovälin $[x_{j-1}, x_j]$ pituus on

$$x_j - x_{j-1} = aq^j - aq^{j-1} = \frac{q^j a(q-1)}{q}\,.$$

Lasketaan porrasfunktion h,

$$h(x) = f(x_j) = (aq^j)^k\,, \text{ kun } x \in]x_{j-1}, x_j[\,,$$

integraali (jolla arvioidaan f:n yläintegraalia). Nyt käyttämällä geometrisen summan kaavaa saadaan

$$\begin{aligned}\int_a^b h &= (aq)^k \frac{qa(q-1)}{q} + (aq^2)^k \frac{q^2 a(q-1)}{q} + \cdots + (aq^n)^k \frac{q^n a(q-1)}{q}\\ &= a^{k+1}\frac{q-1}{q}\sum_{j=1}^{n}(q^{k+1})^j\\ &= a^{k+1}\frac{q-1}{q}q^{k+1}\frac{(q^{k+1})^n - 1}{q^{k+1}-1}\\ &= a^{k+1}(q-1)q^k\frac{(\frac{b}{a})^{k+1}-1}{q^{k+1}-1}\\ &= (b^{k+1}-a^{k+1})q^k\frac{q-1}{q^{k+1}-1}\,.\end{aligned}$$

Havaitsemalla geometrisen summan kaavan avulla, että

$$\frac{q-1}{q^{k+1}-1} = \frac{1}{1+q+q^2+\cdots+q^k}$$

saamme

$$\begin{aligned}\int_a^b h &= (b^{k+1}-a^{k+1})\frac{q^k}{1+q+q^2+\cdots+q^k}\\ &\to \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}\,,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$, sillä tällöin $q \to 1$. Siten

$$\text{ylä}\int_a^b f \le \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}\,.$$

Samalla tavoin nähdään (harjoitustehtävä), että

$$\text{ala}\int_a^b f \geq \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}\,,$$

joten f on integroituva ja

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}\,.$$

Esimerkki. 4. Rajoitettu funktio, joka ei ole Riemann-integroituva. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{jos } x \in \mathbf{Q} \\ 0\,, & \text{jos } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Tällöin f ei ole Riemann-integroituva, sillä jos g on porrasfunktio ja g on vakio välillä I, niin mikäli $g \leq f$ välillä I, niin $g \leq 0$ kyseisellä välillä, sillä I sisältää irrationaalipisteitä. Siten

$$\text{ala}\int_a^b f \leq 0\,.$$

Toisaalta $g \equiv 0$ on porrasfunktio ja $g \leq f$, joten

$$\text{ala}\int_a^b f = 0 \cdot (b-a) = 0\,.$$

Samoin jos $g \geq f$ I:llä, niin $g \geq 1$ kyseisellä välillä, sillä väli I sisältää rationaalipisteitä. Tästä saadaan, että

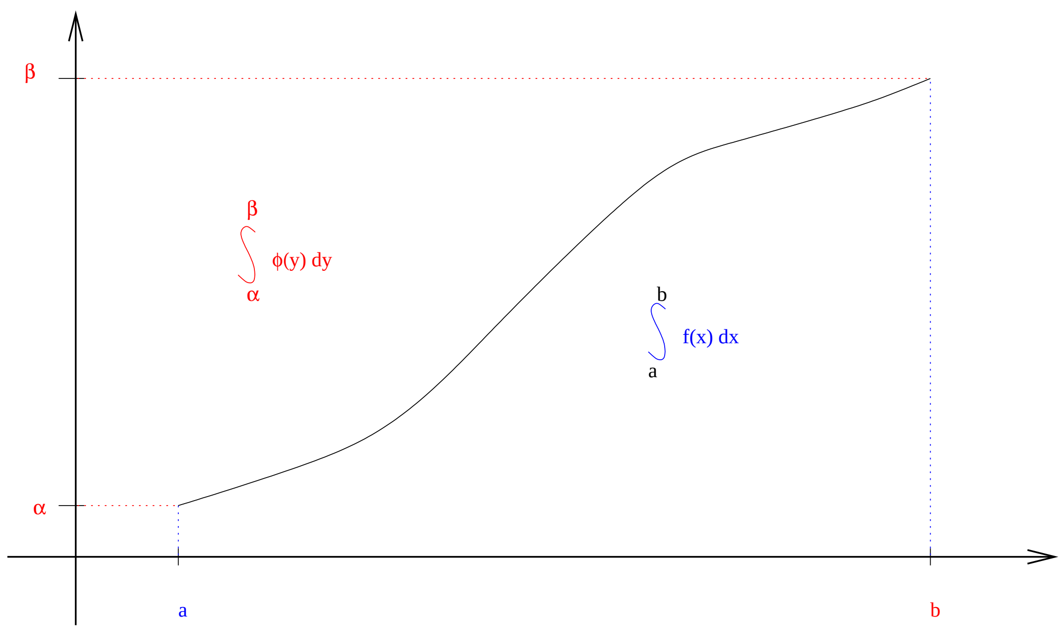
$$\text{ylä}\int_a^b f = 1 \cdot (b-a) > 0 = \text{ala}\int_a^b f\,,$$

joten f ei ole Riemann-integroituva.

Esimerkki. 5. (**mielenkiintoinen havainto**) Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ aidosti kasvava (jatkuva) funktio ja $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ f:n käänteisfunktio, siis $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ ja $\varphi(f(x)) = x$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta \varphi(y)\,dy = b\beta - a\alpha.$$

Kaavan pätevyyden voi havaita kuvasta käyttämällä integraalin pinta-alatulkintaa. Tarkka todistus jätetään harjoitustehtäväksi.



Esimerkiksi, jos $f(x) = x^{1/k}$, $k \in \mathbf{N}$ ja $a, b > 0$, niin integraali

$$\int_a^b x^{1/k}\,dx$$

saadaan helposti laskettua esimerkin 5 kaavalla: $\varphi(y) = y^k$, $\alpha = a^{1/k}$, $\beta = b^{1/k}$, joten kaavan ja esimerkin 3 nojalla

$$
\begin{aligned}
\int\limits_a^b x^{1/k}\,dx &= b\beta - a\alpha - \int\limits_\alpha^\beta \varphi(y)\,dy \\
&= b^{1+1/k} - a^{1+1/k} - \frac{\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}}{k+1} \\
&= \big(b^{1+1/k} - a^{1+1/k}\big)\big(1 - \frac{1}{k+1}\big) \\
&= \frac{b^{1+1/k} - a^{1+1/k}}{1+1/k}\,.
\end{aligned}
$$

jatk-int **2.10. Lause.** *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuva. Tällöin f on Riemann-integroituva.*

TODISTUS: Tiedämme, että suljetulla ja rajoitetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.

Olkoon nyt $\varepsilon > 0$. Koska f on tasaisesti jatkuva, on olemassa sellainen $n \in \mathbf{N}$, että

$$
\text{jos } |x-y| \le \frac{b-a}{n}, \text{ niin } |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.
$$

Otetaan jako $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, jakopisteinä

$$
x_j = a + j\frac{b-a}{n}, \quad j = 0,1,2,\ldots,n\,.
$$

Muodostetaan porrasfunktiot g ja h:

$$
g(x) = \min\{f(z) \mid z \in [x_{j-1}, x_j]\} =: m_j
$$

ja

$$
h(x) = \max\{f(z) \mid z \in [x_{j-1}, x_j]\} =: M_j,
$$

kun $x \in]x_{j-1}, x_j[$ ja määritellään $g(b) = f(b) = h(b)$. Tällöin

$$
g \le f \le h.
$$

Koska jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä, löydetään pisteet $\underline{z}_j, \overline{z}_j \in [x_{j-1}, x_j]$, joilla

$$
f(\underline{z}_j) = m_j \text{ ja } f(\overline{z}_j) = M_j.
$$

Koska

$$|\underline{z}_j - \overline{z}_j| \leq x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}\,,$$

niin

$$|M_j - m_j| = |f(\overline{z}_j) - f(\underline{z}_j)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Siten

$$\begin{aligned}\int_a^b h - \int_a^b g &= \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(x_n - x_0) = \varepsilon\,,\end{aligned}$$

joten f on Riemannin ehdon 2.8 nojalla integroituva. □

2.11. Huomautus. Äärellinen pistejoukko ei vaikuta integroituvuuteen eikä integraalin arvoon, koska ne jätettiin porrasfunktioiden määrittelyssä huomioimatta.

2.12. Määritelmä. Funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on *paloittain jatkuva* välillä $[a, b]$, jos välillä $[a, b]$ on korkeintaan äärellisen monta sellaista pistettä, jossa f ei ole jatkuva.

`pal.jatk-int` **2.13. Lause.** *Paloittain jatkuva funktio on Riemann-integroituva.*

2.2.2 Riemannin summat

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ rajoitettu ja olkoon $P = (a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b)$ välin $[a, b]$ jako. Merkitään $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ja

$$|P| = \max\{\ell(I_k) = x_k - x_{k-1} \mid k = 1, 2, \ldots, n\}\,,$$

mikä on suurimman osavälin pituus. Valitaan *mielivaltainen* $\xi_k \in I_k$ ja merkitään

$$S_P := S_P(f,\xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ell(I_k)$$

ja kutsutaan tätä f:n (jakoon P liittyväksi) *Riemannin summaksi*. Huomaa, että Riemannin summa on porrasfunktion g integraali, missä $g = f(\xi_k)$ välillä I_k.

Tihennetään seuraavaksi jakoa siten, että $|P| \to 0$ ja tutkitaan raja-arvoa

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi).$$

Nyt

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi) = L\,,$$

mikäli jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla jaoilla P, joilla $|P| < \delta$ pätee

$$|S_P(f,\xi) - L| < \varepsilon$$

valittiinpa pisteet ξ_k miten tahansa.

Näin saadaan ekvivalentti määritelmä Riemann-integraalille:

R-summat **2.14. Lause.** *Rajoitettu funktio $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ on Riemann-integroituva, jos ja vain, jos Riemannin summilla on raja-arvo*

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi)\,.$$

Tällöin

$$\int_a^b f = \lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi)\,.$$

TODISTUS: $\Rightarrow$: Olkoon f integroituva ja $\varepsilon > 0$. Valitaan Riemannin ehdon 2.8 avulla porrasfunktiot g ja h siten, että

$$g \le f \le h$$

ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Olkoon $P_0 = (z_0, z_1, \ldots, z_{m_0})$ välin $[a, b]$ jako siten, että jaon pisteet ovat sekä h:n että g:n porraspisteitä. Tarkastellaan nyt välin $[a, b]$ jakoa $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, jolle $|P| < |P_0|$. Tällöin Riemannin summa $S_P(f, \xi)$ on erään porrasfunktion s integraali. Edelleen

$$g \leq s = f(\xi_k) \leq h$$

kaikilla niillä osaväleillä $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, jotka eivät sisällä jaon P_0 pisteitä. Korjataan porrasfunktioita g ja h niillä osaväleillä, jotka sisältävät jaon P_0 pisteitä: valitaan $M > 0$ siten, että $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$ ja määritellään

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x)\,, & \text{jos } x \in I_k \text{ ja } z_j \notin I_k \text{ kaikilla } j = 0, 1, \ldots, m_0 \\ -M\,, & \text{jos } x \in I_k \text{ ja } z_j \in I_k \text{ jollakin } j = 0, 1, \ldots, m_0 \end{cases}$$

ja

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x)\,, & \text{jos } x \in I_k \text{ ja } z_j \notin I_k \text{ kaikilla } j = 0, 1, \ldots, m_0 \\ M\,, & \text{jos } x \in I_k \text{ ja } z_j \in I_k \text{ jollakin } j = 0, 1, \ldots, m_0. \end{cases}$$

Tällöin $\tilde{g}$ ja $\tilde{h}$ ovat porrasfunktioita ja

$$\tilde{g} \leq s \leq \tilde{h}\,.$$

Voidaan olettaa, että $-M \leq g \leq h \leq M$, joten $\tilde{h} - \tilde{g} \leq 2M$. Siten (koska porrasfunktioiden arvoa muutettiin korkeintaan m_0 välillä)

$$\int_a^b \tilde{h} - \int_a^b \tilde{g} \leq \int_a^b h - \int_a^b g + m_0|P|2M < \frac{\varepsilon}{2} + m_0|P|2M\,.$$

Näin ollen, jos valitaan

$$\delta = \min\{|P_0|, \frac{\varepsilon}{m_0 4M}\}$$

ja vaaditaan, että $|P| < \delta$, saadaan

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f - S_P \right| &= \left| \int_a^b f - \int_a^b s \right| \leq \int_a^b \tilde{h} - \int_a^b \tilde{g} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + m_0|P|2M < \frac{\varepsilon}{2} + m_0 2M \frac{\varepsilon}{m_0 4M} \\ &= \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Siis Riemannin summien raja-arvo on olemassa ja

$$\int_a^b f = \lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi)\,.$$

$\Leftarrow$: Olkoon

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi) = L$$

kaikilla pisteiden ξ_k valinnoilla. Ts. jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla jaoilla P, joilla $|P| < \delta$ pätee

$$|S_P(f,\xi) - L| < \varepsilon$$

valittiinpa pisteet ξ_k miten tahansa. Olkoon nyt $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ välin $[a,b]$ jako siten, että $|P| < \delta$, ja valitaan pisteet $\underline{\xi}_k, \overline{\xi}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ siten, että

$$f(\underline{\xi}_k) \leq \inf_{[x_{k-1},x_k]} f + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

ja

$$f(\overline{\xi}_k) \geq \sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Tällöin porrasfunktioille g ja h,

$$g(x) = f(\underline{\xi}_k) - \frac{\varepsilon}{b-a}\,, \text{ kun } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

ja

$$h(x) = f(\overline{\xi}_k) + \frac{\varepsilon}{b-a}\,, \text{ kun } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

pätee $g \leq f \leq h$ ja

$$\begin{aligned}
&\int_a^b h - \int_a^b g = \\
&\quad = S_P(f,\overline{\xi}) + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) - S_P(f,\underline{\xi}) + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) \\
&\quad \leq |S_P(f,\overline{\xi}) - L| + \varepsilon + |L - S_P(f,\underline{\xi})| + \varepsilon \\
&\quad < 4\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Näin ollen f on Riemannin ehdon 2.8 nojalla integroituva. □

2.2.3 Integraalin ominaisuuksia

Integraalin ominaisuuksia tutkittaessa on pidettävä mielessä integraalin määrittely: ensin porrasfunktioiden integraali ja sitten rajalle käynti (tai supremumin ja infimumin otto). Tästä seuraa, että *integraalien ominaisuuksien todistukset on yleensä aina parasta palauttaa porrasfunktioita koskeviksi väitteiksi*, sillä porrasfunktioille ne ovat useimmiten helpompia. Tämän jälkeen on vielä todettava, ettei rajankäynti tuota vaikeuksia.

addit **2.15. Lause.** (additiivisuus) *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ rajoitettu ja $c \in]a,b[$. Tällöin f on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$, jos ja vain jos f on Riemann-integroituva väleillä $[a,c]$ ja $[c,b]$. Tällöin*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

Todistus: Väite seuraa siitä, että piste c voidaan ottaa porrasfunktioiden (uudeksi) jakopisteeksi: Jos g on porrasfunktio välillä $[a,b]$, niin rajoittumat

$$g|_{[a,c]} = p_1 \text{ ja } g|_{[c,b]} = p_2$$

ovat porrasfunktioita väleillä $[a,c]$ ja $[c,b]$ (vastaavasti). Olkoon

$$P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

tähän liittyvä jako, missä $c = x_k$. Tällöin (tässä $\overline{x}_j \in]x_{j-1}, x_j[$)

$$\begin{aligned}
\int_a^b g &= \sum_{j=1}^n g(\overline{x}_j)(x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^k g(\overline{x}_j)(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=k+1}^n g(\overline{x}_j)(x_j - x_{j-1}) \\
&= \int_a^c g + \int_c^b g\,,
\end{aligned}$$

joten väite on tosi porrasfunktioiden integraaleille. Yleinen tapaus seuraa ottamalla superemum ja infimum yli sopivien porrasfunktioiden. □

Tähän mennessä integraali $\int\limits_a^b$ on määritely vain, kun $a < b$. Laajennetaan seuraavaksi tätä määritelmää:

2.16. Määritelmä. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integroituva. Määritellään

$$\int\limits_b^a f := -\int\limits_a^b f$$

ja

$$\int\limits_a^a g := 0$$

kaikille pisteessä a määritellyille $\mathbf{R}$-arvoisille funktioille g.

2.17. Huomautus. Integraalien additiivuuslause säilyy voimassa: kaikilla $a, b, c \in \mathbf{R}$,

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f\,,$$

kunhan f on integroituva kyseisillä väleillä.

`int-lin` **2.18. Lause.** (lineaarisuus) *Olkoot f ja g Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$ ja $\lambda \in \mathbf{R}$. Tällöin λf ja $f + g$ ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$, ja*

$$\int\limits_a^b (\lambda f) = \lambda \int\limits_a^b f$$

ja

$$\int\limits_a^b (f + g) = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g\,.$$

Todistus: Lause voidaan todistaa osoittamalla ensin, että väite on selvä porrasfunktioille, ja ottamalla sitten supremum ja infimum. Vaihtoehtoinen todistus saadaan Riemannin summien avulla seuraavasti:

$$S_P(f + g, \xi) = S_P(f, \xi) + S_P(g, \xi),$$

joten

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g) &= \lim_{|P|\to 0} S_P(f+g,\xi) \\ &= \lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi) + \lim_{|P|\to 0} S_P(g,\xi) \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g\,.\end{aligned}$$

Vakiolla kertominen samaan tapaan. □

Esimerkki. Olkoon

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,.$$

Tällöin p on jatkuvana funktiona integroituva ja lauseen 2.18 avulla saadaan esimerkkiä 3 hyödyntämällä, että

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)\,dx &= \sum_{j=0}^n (a_j \int_a^b x^j\,dx) = \sum_{j=0}^n a_j \frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{j+1} \\ &= \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}) + \frac{a_{n-1}}{n}(b^n-a^n) + \cdots + \frac{a_1}{2}(b^2-a^2) + a_0(b-a)\,.\end{aligned}$$

2.2.4 Integraalien arviointia

Integraaleja ei yleensä pystytä laskemaan tarkasti. Usein kuitenkin sopiva arviointi riittää. Seuraava havainto muunnelmineen on eräs keskeisimmistä arviointikeinoista.

`ei-neg.int` **2.19. Lause.** *Olkoon f Riemann-integroituva ja ei-negatiivinen välillä $[a,b]$. Tällöin*

$$\int_a^b f \geq 0\,.$$

TODISTUS: Porrasfunktiolle $g \equiv 0$ pätee $g \leq f$, joten

$$0 = \int_a^b g \leq \int_a^b f\,.$$

$\square$

int vertailu

2.20. Lause. *Olkoot f ja g integroituvia välillä $[a,b]$ ja $f \geq g$. Tällöin*

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g\,.$$

TODISTUS: Lauseen 2.18 nojalla $f - g \geq 0$ on integroituva, joten

$$0 \leq \int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g\,.$$

$\square$

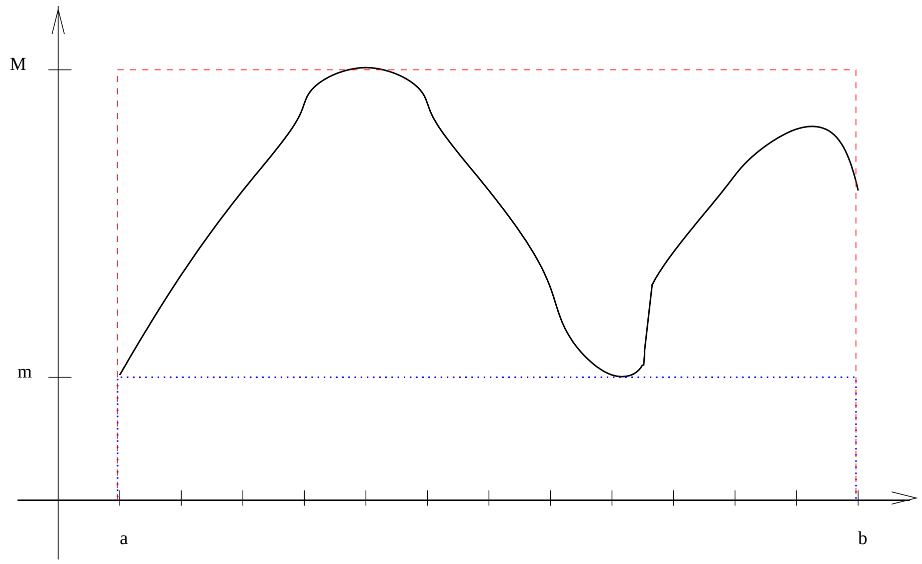
sup arvio

2.21. Seuraus. *Olkoon f jatkuva välillä $[a,b]$. Jos $M = \max f$ ja $m = \min f$, niin*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)\,.$$

$\square$

Huom! Leima "sup arvio" ei liity tässä supremumiin vaan siihen, että arvioimme integraalia suorakaiteiden pinta-alojen avulla (katso kuvaa seuraavalla sivulla).



nolla int **2.22. Lause.** *Olkoon f jatkuva ja ei-negatiivinen välillä $[a,b]$ $(a<b)$. Jos*

$$\int_a^b f = 0\,,$$

niin $f \equiv 0$ välillä $[a,b]$.

TODISTUS: Jos on olemassa sellainen $x_0 \in [a,b]$ (voidaan olettaa, että $x_0 \in]a,b[\,$), että $f(x_0) > 0$, niin Analyysi 1 -kurssin tulosten nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0 \qquad \text{kaikilla } x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]\,,$$

joten

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \int_a^{x_0-\delta} f + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f + \int_{x_0+\delta}^{b} f \\ &\geq \int_a^{x_0-\delta} 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,dx + \int_{x_0+\delta}^{b} 0 \\ &= 0 + 2\delta\frac{f(x_0)}{2} + 0 \\ &= \delta f(x_0) > 0\,.\end{aligned}$$

Tämä on ristiriita, joten väite on tosi. □

2.23. Määritelmä. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}$. Määritellään f:n *positiiviosa* $f^+ : A \to \mathbf{R}$ ja f:n *negatiiviosa* $f^- : A \to \mathbf{R}$,

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x)\,, & \text{kun } f(x) \geq 0 \\ 0\,, & \text{kun } f(x) \leq 0\,, \end{cases}$$

ja

$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x)\,, & \text{kun } f(x) \leq 0 \\ \ 0\,, & \text{kun } f(x) \geq 0\,. \end{cases}$$

Tällöin f:n *itseisarvo* on $|f| : A \to \mathbf{R}$,

$$|f|(x) := |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)\,.$$

2.24. Huomautus. Huomaa, että $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$, $|f| \geq 0$ ja

$$f = f^+ - f^-\,.$$

pos.osan int

2.25. Lause. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ rajoitettu. Tällöin f on Riemann-integroituva, jos ja vain jos sekä f^+ ja f^- ovat Riemann-integroituvia. Tällöin*

$$\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$$

ja myös $|f|$ on Riemann-integroituva.

Todistus: $\Leftarrow$: Seuraa Lauseesta 2.18, koska $f = f^+ - f^-$.

$\Rightarrow$: Jos g ja h ovat sellaisia porrasfunktioita välillä $[a, b]$, että $g \leq f \leq h$ ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon\,,$$

niin g^+ ja h^+ ovat porrasfunktioita ja $g^+ \leq f^+ \leq h^+$ sekä

$$h^+(x) - g^+(x) \leq h(x) - g(x)\,. \qquad \text{(miksi?)}$$

Siten

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \int_a^b h - \int_a^b g = \int_a^b (h(x) - g(x))\,dx \\ &\geq \int_a^b (h^+(x) - g^+(x))\,dx = \int_a^b h^+(x)\,dx - \int_a^b g^+(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

joten f^+ on Riemannin ehdon 2.8 nojalla integroituva. Koska $f^- = f^+ - f$, myös f^- on integroituva, samoin $|f| = f^+ + f^-$. $\square$

`its.arvio` **2.26. Lause.** *Olkoon* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *Riemann-integroituva. Tällöin*

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx\,.$$

TODISTUS: Koska $f \leq |f|$ ja $-f \leq |f|$, niin

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \quad \text{ja} \quad -\int_a^b f = \int_a^b (-f) \leq \int_a^b |f|\,,$$

mistä väite seuraa. $\square$

2.27. Huomautus.

a) Epäyhtälö edellä voi olla aito. Esimerkiksi

$$\int_{-1}^1 x\,dx = 0 < 1 = \int_{-1}^1 |x|\,dx\,.$$

b) Funktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ graafin ja x-akselin väliin välillä $[a,b]$ jäävän alueen *pinta-ala* on

$$\int_a^b |f| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^-\,.$$

tulo int **2.28. Lause.** *Olkoot f ja g Riemann-integroituvia. Tällöin tulo fg on myös Riemann-integroituva.*

2.29. Huomautus. Varo: yleensä

$$\int_a^b (fg) \neq \Big(\int_a^b f\Big)\Big(\int_a^b g\Big).$$

TODISTUS: (vrt. tulon jatkuvuuden tai raja-arvon todistus!)

1. Oletetaan ensiksi, että $f, g \geq 0$. Olkoon $M > 0$ sellainen, että $f, g \leq M$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan porrasfunktiot g_f, h_f ja g_g, h_g siten, että

$$g_f \leq f \leq h_f \leq M \quad \text{ja} \quad g_g \leq g \leq h_g \leq M$$

ja

$$\int_a^b h_f - \int_a^b g_f < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ ja } \int_a^b h_g - \int_a^b g_g < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Tällöin $g_f g_g$ ja $h_g h_f$ ovat porrasfunktioita ja

$$g_f g_g \leq fg \leq h_f h_g.$$

Koska $h_g \leq M$ ja $g_f \leq M$, niin

$$\begin{aligned}
\int_a^b h_f h_g - \int_a^b g_f g_g &= \int_a^b (h_f - g_f) h_g + \int_a^b g_f (h_g - g_g) \\
&\leq M \int_a^b (h_f - g_f) + M \int_a^b (h_g - g_g) \\
&< M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

joten Riemannin ehdon 2.8 nojalla fg on integroituva.

2. Olkoot f ja g integroituvia funktioita. Koska $f = f^+ - f^-$ ja $g = g^+ - g^-$, niin

$$fg = f^+ g^+ - f^+ g^- - f^- g^+ + f^- g^-\,,$$

joka on kohdan **1.** nojalla Riemann-integroituvien funktioiden summana integroituva (ks. 2.18).

□

2.30. Huomautus. Riemann-integroituvat funktiot voidaan karakterisoida *Lebesguen ehdon* avulla (ei todisteta):

> *Rajoitettu funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on Riemann-integroituva, jos ja vain jos f:n epäjatkuvuuspisteiden joukko on nollamitallinen.*

Joukon $A \subset \mathbf{R}$ *nollamitallisuus* tarkoittaa, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa jono sellaisia avoimia välejä I_j, $j = 1, 2, \ldots$, että

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) < \varepsilon\,.$$

Esimerkiksi $\mathbf{Q}$ on nollamitallinen, mutta $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ei ole.

2.2.5 Integraalit keskiarvoina

Äärellisen monen pisteen x_1, x_2, ..., x_n aritmeettinen keskiarvo on

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\,.$$

Jos halutaan laskea funktion f keskiarvo välillä $[a, b]$, on luonnollista laskea ensin f:n arvojen keskiarvo äärellisen monessa pisteessä,

$$\text{ka} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

ja antaa sitten pisteiden määrän n kasvaa rajatta ($n \to \infty$). Kun väli $[a, b]$ jaetaan tasavälein, jakopisteinä x_0,x_1, x_2, ..., x_n, niin

$$x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}$$

ja

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

kunhan f on Riemann-integroituva (Riemannin summat!). Toisin sanoen, f:n äärellisen monen pisteen arvojen keskiarvo lähestyy kohti arvoa

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b dx} =: ⨍_a^b f(x)\,dx\,,$$

jota kutsutaan f:n *keskiarvoksi* välillä $[a,b]$.

Jatkuva funktio saa keskiarvonsa välillä $[a,b]$:

IVAL **2.31. Lause.** (Integraalilaskennan väliarvolause (lyh. IVAL, *engl.* mean value thm) *Olkoon f jatkuva välillä $[a,b]$. Tällöin on olemassa $\xi \in [a,b]$, jolle*

suorakaide (2.1)
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)\,.$$

Todistus: Olkoon $m = \min f$ ja $M = \max f$, jolloin

$$m(b-a) \le \int_a^b f\,dx \le M(b-a)\,,$$

joten

$$m \le \mu := \fint_a^b f \le M\,.$$

Koska f saa arvot m ja M, niin Bolzanon lauseen nojalla f saa myös niiden välissä olevan arvon μ, ts. on olemassa $\xi \in [a,b]$, jolle

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

□

2.32. Huomautus. Väliarvolauseen 2.31 kaavassa (2.1) voi olla myös $b \le \xi \le a$.

Integraalilaskennan väliarvolauseesta on myös painotettujen keskiarvojen muoto:

painoKA **2.33. Lause.** *Olkoot f ja p Riemann-integroituvia ja $p \ge 0$. Tällöin*

$$m\int_a^b p\,dx \le \int_a^b fp\,dx \le M\int_a^b p\,dx\,,$$

missä $m = \inf f$ *ja* $M = \sup f$, *ts.* f*:n painotettu keskiarvo*

$$\mu = \frac{\int_a^b fp\,dx}{\int_a^b p\,dx} \qquad (\textit{mikäli} \int_a^b p > 0)$$

on f*:n supremumin ja infimumin välissä.*

TODISTUS: Koska $mp \le fp \le Mp$, niin

$$m\int_a^b p = \int_a^b mp \le \int_a^b fp \le \int_a^b Mp = M\int_a^b p\,.$$

□

Koska Bolzanon lauseen mukaan jatkuva funktio saavuttaa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa välistä, saadaan

yl.IVAL **2.34. Lause.** (Yleistetty integraalilaskennan väliarvolause) *Olkoon* f *jatkuva ja* p *ei-negatiivinen ja Riemann-integroituva välillä* $[a, b]$. *Tällöin on olemassa* $\xi \in [a, b]$, *jolle*

$$\int_a^b fp\,dx = f(\xi)\int_a^b p\,dx\,.$$

□

2.2.6 Integraali ylärajansa funktiona

Seuraavaksi määrittelemme integraalin ylärajansa funktiona eli asetamme ylärajaksi vakion sijaan muuttujan x.

2.35 . Määritelmä. (integraalifunktio) Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integroituva. Funktio $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ on f:n (eräs) *integraalifunktio*,[1] jos on olemassa $\alpha \in [a, b]$, jolle

$$F(x) = \int_\alpha^x f(y)\,dy \text{ kaikilla } x \in [a, b]\,.$$

[1]Seuraavassa luvussa todistamme *Analyysin peruslauseen.* Tämän jälkeen laajennamme integraalifunktion käsitettä siten, että myös $F + \textit{vakio}$ on aina integraalifunktio, jos F on.

2.36. Huomautus. Vaihtamalla alarajaa $\alpha \leftrightarrow \tilde{\alpha}$ saadaan uusi integraalifunktio.

2.37. Huomautus. Määrätty integraali (eli Riemannin integraali) saadaan integraalifunktiosta: jos F on f:n integraalifunktio, niin

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(y)\,dy &= \int_a^\alpha f(y)\,dy + \int_\alpha^b f(y)\,dy \\
&= -\int_\alpha^a f(y)\,dy + \int_\alpha^b f(y)\,dy = -F(a) + F(b) \\
&=: \Big/_a^b F(y) =: F(b) - F(a)\,.
\end{aligned}$$

2.38. Huomautus. Kaksi f:n integraalifunktiota eroavat toisistaan vakiolla:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^x f(y)\,dy - \int_{\tilde{\alpha}}^x f(y)\,dy &= \int_\alpha^x f(y)\,dy + \int_x^{\tilde{\alpha}} f(y)\,dy \\
&= \int_\alpha^{\tilde{\alpha}} f(y)\,dy = \text{ vakio kaikilla } x \in [a,b]\,.
\end{aligned}$$

intfkt **2.39. Lause.** *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integroituva. Tällöin f:n integraalifunktio on jatkuva.*

Todistus: Kaikilla $x, y \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= \left| \int_\alpha^x f(t)\,dt - \int_\alpha^y f(t)\,dt \right| \\
&= \left| \int_\alpha^x f(t)\,dt + \int_y^\alpha f(t)\,dt \right| \\
&= \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \le \int_y^x |f(t)|\,dt \\
&\le \sup|f|\,|x-y| < \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

kun

$$|x-y| < \frac{\varepsilon}{\sup|f|+1} := \delta\,.$$

(Erityisesti F on Lipschitz-jatkuva.) $\square$

2.40. Huomautus. Ei-negatiivisen integroituvan funktion integraalifunktio on kasvava. Vastaavasti ei-positiivisen integroituvan funktion integraalifunktio on vähenevä.

2.2.7 Logaritmin määrittely integraalin avulla

Analyysi 1 -kurssilla määrittelimme logaritmifunktion eksponenttifunktion käänteisfunktiona, eksponenttifunktio määriteltiin puolestaan rajaprosessin avulla. Nyt näytämme, että logaritmi voitaisiin yhtä hyvin määritellä integraalin avulla (ja edelleen sen käänteisfunktiona eksponenttifunktio). Vaihtoehtoisesti alla olevan voi käsittää funktion $\frac{1}{x}$ integraalifunktion määräämiseksi.

Olkoon $x > 0$. Merkitään $\frac{1}{z}$:n integraalifunktiota

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{z}\,dz\,.$$

Koska $\frac{1}{z}$ on rajoitettu ja jatkuva kaikilla väleillä $[a,b]$, kun a, $b > 0$, niin integraali on hyvin määritelty. Osoitamme, että $f(x) = \log x$.

Integraalifunktion ominaisuuksien perusteella $f :]0,\infty[\to \mathbf{R}$ on kasvava ja jatkuva. Edelleen, $f(1) = 0$, $f(x) < 0$, kun $0 < x < 1$ ja $f(x) > 0$, kun $x > 1$.

2.41. Lause. *Integraalifunktiolle* $f :]0,\infty[\to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{z}\,dz\,, \quad x > 0\,,$$

pätee

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

kaikilla $x, y > 0$.

TODISTUS: Olkoon ensin $x > 1$. Tällöin yhteenlaskulause

$$f(xy) - f(y) = f(x)$$

on ekvivalentti lausekkeen

$$\int_y^{xy} \frac{1}{z}\, dz = \int_1^x \frac{1}{s}\, ds$$

kanssa (missä selvyyden vuoksi nimettiin integroimismuuttuja uudelleen). Näiden lausekkeiden yhtäsuuruus nähdään helposti Riemannin summan avulla. Jaetaan väli $[1, x]$ n yhtäsuureen osaväliin, jakopisteinä $1 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = x$, jolloin

$$\int_1^x \frac{1}{s}\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{s_j}(x_j - x_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{s_j} \frac{x-1}{n},$$

missä $s_j \in]x_{j-1}, x_j[$ on mielivaltainen. Nyt pisteet $y = yx_0, yx_1, yx_2, \ldots, yx_n = yx$ muodostavat välin $[y, yx]$ jaon ja $ys_j \in]yx_{j-1}, yx_j[$, joten

$$\begin{aligned}
\int_y^{xy} \frac{1}{z}\, dz &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{ys_j}(yx_j - yx_{j-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{s_j} \frac{x-1}{n} \\
&= \int_1^x \frac{1}{s}\, ds\,.
\end{aligned}$$

Väite on siten todistettu, kun $x > 1$.

Jos $x = 1$, niin $f(x) = 0$, joten $f(xy) = f(y) = f(x) + f(y)$.

Tapaus $0 < x < 1$ saadaan käsiteltyä, kun havaitaan, että tällöin $\frac{1}{x} > 1$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
f(x) + f(y) &= f(x) + f(\frac{1}{x}xy) \\
&= f(x) + f(\frac{1}{x}) + f(xy) = f(x\frac{1}{x}) + f(xy) \\
&= f(1) + f(xy) = f(xy)\,.
\end{aligned}$$

□

Nyt induktiolla nähdään, että

$$f(x^n) = nf(x) \qquad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N} \text{ ja } x > 0\,,$$

ja edelleen kaikilla $n \in \mathbf{N}$ ja $x > 0$

$$\begin{aligned} f(x^{-n}) &= f((\frac{1}{x})^n) = nf(\frac{1}{x}) \\ &= n\left(f(x\frac{1}{x}) - f(x)\right) = n\,(f(1) - f(x)) \\ &= -nf(x)\,. \end{aligned}$$

Siten rationaalisilla $q = \frac{n}{m}$ pätee

qf(x)

$$f(x^q) = \frac{1}{m}f((x^q)^m) = \frac{1}{m}f(x^n) = \frac{n}{m}f(x) = qf(x)\,. \tag{2.2}$$

Palautetaan mieleen, että

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n\,,$$

joten integraalifunktion jatkuvuuden nojalla

$$f(e) = f(\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n) = \lim_{n\to\infty} f((1 + \frac{1}{n})^n) = \lim_{n\to\infty} nf(1 + \frac{1}{n})\,.$$

Edelleen integraalilaskennan väliarvolauseen 2.31 nojalla

$$f(1 + \frac{1}{n}) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{s}\,ds = \frac{1}{\xi}\frac{1}{n}\,,$$

missä $1 \le \xi \le 1 + \frac{1}{n}$. Siten

$$f(e) = \lim_{n\to\infty} nf(1 + \frac{1}{n}) = 1\,.$$

Nyt kaavan (2.2) nojalla saamme kaikilla rationaalisilla q

$$f(e^q) = qf(e) = q\,,$$

joten f:n jatkuvuuden nojalla

$$f(e^y) = y$$

kaikilla $y \in \mathbf{R}$. Näin olemme osoittaneet, että f on eksponenttifunktion käänteisfunktio eli

$$\log x = f(x) = \int_1^x \frac{1}{s}\,ds \ \text{ kaikilla } x > 0\,.$$

3. Derivaatta ja integraali – analyysin peruslause

Koulussa opeteltiin integraali derivaatan avulla: integraali saatiin suorittamalla derivoinnille käänteinen operaatio, ts. miettimällä, mikä annettu lauseke oli ennen kuin se tuli derivoiduksi. Tämän luvun tarkoitus on perustella tämä näkökohta täsmällisesti ja osoittaa, että tietyin edellytyksin integraali on juuri tällainen *antiderivaatta.*

Tutkitaan aluksi derivoinnin ja integroinnin välistä yhteyttä.

3.1. Integraalin derivaatta

Palautetaan mieleen, että integroituvan funktion f integraalifunktio on muotoa

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

oleva funktio.

perus1 **3.1. Lause.** (Analyysin peruslause (osa 1)) *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integroituva. Jos f on jatkuva pisteessä $x_0 \in]a,b[$, niin f:n integraalifunktio F,*

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\,,$$

on derivoituva pisteessä x_0 ja $F'(x_0) = f(x_0)$.

Todistus: Väite seuraa integraalilaskennan väliarvolauseen 2.31 todistuksesta: jokaisella $h > 0$ saadaan arviot

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \begin{cases} \leq & h \sup\{f(x) \mid x \in [x_0, x_0+h]\} \\ \geq & h \inf\{f(x) \mid x \in [x_0, x_0+h]\}\,, \end{cases}$$

joten

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \begin{cases} \leq & \sup\{f(x) \mid x \in [x_0, x_0+h]\} \to f(x_0) \\ \geq & \inf\{f(x) \mid x \in [x_0, x_0+h]\} \to f(x_0)\,, \end{cases}$$

kun $h \to 0$, koska f on jatkuvuva pisteessä x_0. Samoin negatiivisille h:n arvoille. Siis F on derivoituva pisteessä x_0 ja

$$F'(x_0) = f(x_0)\,.$$

$\square$

3.2. Huomautus. Peruslauseen 3.1 mukaan derivointi siis palauttaa jatkuvan funktion integraalin takaisin alkuperäiseksi funktioksi, mikä voidaan kirjoittaa alla olevan seurauslauseen muotoon.

3.3. Seuraus. *Olkoon f jatkuva funktio. Tällöin*

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = f(x)\,.$$

3.4. Esimerkki. Peruslauseen 3.1 nojalla voidaan laskea eräiden funktioiden derivaattoja. Koska

$$\log x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\,dt\,,$$

niin logaritmifunktio on derivoituva ja

$$\frac{d\,\log x}{dx} = \frac{1}{x}\,.$$

Edelleen, koska a-kantaiselle logaritmille $\log_a x$ pätee

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}\,,$$

niin derivoinnin lineaarisuudesta $((f+g)' = f' + g',\ (cf)' = cf')$ seuraa, että

$$\frac{d\,\log_a x}{dx} = \frac{1}{x\log a}\,.$$

Lopuksi, koska

$$e^x = \int_0^x e^t \, dt + 1 \, ,$$

eksponenttifunktio on derivoituva ja peruslauseen nojalla

$$\frac{d\, e^x}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x e^t \, dt + \frac{d}{dx} 1 = e^x \, .$$

3.2. Primitiivi (antiderivaatta) ja integraali

Tarkastellaan seuraavaa ongelmaa:

Olkoon f annettu. Määritä sellainen funktio F, jolle

$$F'(x) = f(x) \text{ kaikilla } x \, .$$

Tavoitteena on siis suorittaa eräänlainen käänteinen derivointiprosessi.

Analyysin peruslauseen 3.1 ensimmäinen muoto takaa, että jatkuvan funktion f integraalifunktio tarjoaa aina ratkaisu tälle ongelmalle.

3.5. Määritelmä. *(primitiivi, antiderivaatta)* Funktion $f\, :]a, b[\to \mathbf{R}$ *primitiivi* tai *antiderivaatta* on sellainen funktio $F :]a, b[\to \mathbf{R}$, jolle

$$F'(x) = f(x) \text{ kaikilla } x \in]a, b[\, .$$

3.6. Huomautus. Primitiivi (antiderivaatta) on määritelmän mukaan derivoituva. Primitiivi ei ole yksikäsitteinen. Usein kirjallisuudessa kutsutaan mitä hyvänsä primitiivifunktiota f:n integraalifunktioksi. Tällä kurssilla integraalifunktio-nimitys on (toistaiseksi) varattu niille funktiolle, jotka saadaan funktiosta f eksplisiittisesti integroimalla. Myöhemmin Lauseen 3.10 jälkeen laajennamme integraalifunktion käsitettä niin, että myös $F + vakio$ on aina integraalifunktio, jos F on integraalifunktio.

Analyysin peruslauseen 3.1 nojalla siis:

3.7. Seuraus. *Jatkuvan funktion f jokainen integraalifunktio on f:n primitiivi.*

Näin ei saada kuitenkaan kaikkia primitiivejä.

3.8. Esimerkki. Koska $\frac{d}{dx}(\sin x+7) = \cos x$, niin $F(x) = \sin x+7$ on funktion $\cos x$ primitiivi. Tätä ei kuitenkaan saada suoraan funktiota $\cos x$ integroimalla, koska

$$\left| \int_a^b \cos x \, dx \right| \leq \pi < 7 = F(0) .$$

Määritelmän ja edellisen seurauslauseen nojalla f:n primitiivifunktiot eroavat toisistaan korkeintaan vakiolla.

perus2 **3.9. Lause.** (Analyysin peruslause (osa 2)) *Jos F_1 ja F_2 ovat saman funktion f primitiivejä, niin on olemassa vakio c, jolle*

$$F_1(x) = F_2(x) + c \text{ kaikilla } x .$$

Kääntäen, jos F_1 on eräs f:n primitiivi, niin jokainen muotoa

$$F(x) = F_1(x) + c \qquad (c \text{ vakio})$$

oleva funktio on myös f:n primitiivi. □

Yhdistämällä peruslauseen molemmat osat saadaan:

perus **3.10. Lause.** (Analyysin peruslause) *Olkoon $f : I \to \mathbf{R}$ jatkuva, missä $I \subset \mathbf{R}$ on avoin väli. Tällöin jokainen f:n primitiivi F on muotoa*

primitiivi (3.1)
$$F(x) = c + \int_a^x f(t) \, dt ,$$

missä $c \in \mathbf{R}$ ja $a \in I$ ovat vakioita.

Kääntäen, mikä hyvänsä muotoa (3.1) oleva funktio F on f:n primitiivi. □

3.11. Esimerkki. Oletus f:n jatkuvuudesta on oleellinen: olkoon F funktion f,

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & \text{kun } x \geq 0 \\ 0 , & \text{kun } x < 0 , \end{cases}$$

integraalifunktio

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} x\,, & \text{kun } x \geq 0 \\ 0\,, & \text{kun } x < 0\,. \end{cases}$$

Kuitenkaan F ei ole primitiivi, sillä se ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

3.12. Huomautus. Nyt voimme huoletta kutsua mitä hyvänsä *jatkuvan* funktion f primitiiviä integraalifunktioksi, ts. tästä lähtien funktion f integraalifunktio on mikä hyvänsä muotoa

$$F(x) = c + \int_a^x f(t)\,dt$$

oleva funktio. Siten jatkuvan funktion f tapauksessa samat funktiot ovat sekä primitiivejä että integraalifunktioita.

Usein käytetään hieman sekavaa merkintää

$$F(x) = \int f(x)\,dx\,,$$

jolla tarkoitetaan, että F on f:n primitiivi eli $F'(x) = f(x)$. Tällä merkinnällä voidaan tarkoittaa myös sitä, että

$$F(x) = c + \int_a^x f(t)\,dt$$

sopivilla vakioilla a ja c. Jatkuvan funktion f tapauksessa molemmat tulkinnat johtavat samaan. Näin ei kuitenkaan käy kaikille funktioille.

Analyysin peruslauseesta seuraa, että määrättyjä integraaleja voidaan laskea primitiivien avulla:

$\boxed{\texttt{int.lasku}}$ **3.13. Lause.** *Olkoon F jatkuvan funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ primitiivi. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a)\,.$$

Todistus: Koska $F'(x) = f(x)$, niin analyysin peruslauseen nojalla

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= c + \int_a^b F'(x)\,dx - (c + \int_a^a F'(x)\,dx) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

$\square$

3.14. Huomautus. Jos integrandi f on paloittain jatkuva, voidaan Lausetta 3.13 soveltaa jakamalla integrointiväli osaväleihin, joissa f on jatkuva. Jos esimerkiksi

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{kun } x \geq 0 \\ -1\,, & \text{kun } x < 0\,, \end{cases}$$

niin

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \Big/_{-1}^{0}(-x) + \Big/_{0}^{1} x = -1 + 1 = 0\,.$$

3.15. Huomautus. Lausetta 3.13 voidaan käyttää myös seuraavassa muodossa:

Jos f on jatkuvasti derivoituva, niin

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt\,.$$

3.16. Esimerkki. Usein funktioita on helpompi derivoida kuin laskea integraaleja osasummien avulla. Voimme esimerkiksi helposti laskea

$$\begin{aligned} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ &\to n x_0^{n-1}\,, \end{aligned}$$

kun $x \to x_0$, joten

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}\,.$$

Integroimalla saadaan

$$\int_a^b nx^{n-1}\,dx = \Big/_a^b x^n = b^n - a^n\,,$$

tai merkitsemällä $m = n - 1$,

$$\int_a^b x^m\,dx = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1})\,,$$

kun $m \in \mathbf{N}$.

Myös derivointikaavat

$$\frac{d\,\sin x}{dx} = \cos x \text{ ja } \frac{d\,\cos x}{dx} = -\sin x$$

oli helppo johtaa (Analyysi 1), sillä niissä tarvittiin vain trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavoja ja tietoa, että

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Näistä saadaan edelleen integrointikaavat

$$\int_a^b \cos x\,dx = \Big/_a^b \sin x = \sin b - \sin a$$

ja

$$\int_a^b \sin x\,dx = \Big/_a^b (-\cos x) = \cos a - \cos b\,.$$

Lisää vastaavalla tavalla saatavia integrointikaavoja taulukoidaan myöhemmin pykälässä 4.1.

4. Integrointitekniikkaa

Analyysi 1 -kurssilla tutustuimme alkeisfunktioihin, joita ovat polynomit ja rationaalifunktiot, trigonometriset funktiot, potenssifunktiot, eksponenttifunktiot ja näiden käänteisfunktiot. Monet funktiot voidaan muodostaa alkeisfunktioista toistamalla rationaalioperaatioita (yhteen-, kerto- ja jakolasku), funktioiden yhdistelyjä sekä käänteisfunktioiden muodostamisia. Tällaisia funktioita kutsutaan *eksplisiittisiksi* tai niiden sanotaan olevan *suljetussa muodossa*. Differentiaalilaskennasta opitun avulla toteamme helposti, että suljettua muotoa olevat funktiot ovat määrittelyjoukoissaan derivoituvia ja niiden derivaatatkin ovat suljettua muotoa. Integrointi on kuitenkin yleensä tärkeämpää (ja valitettavasti vaikeampaakin) kuin derivointi. Analyysin peruslauseen avulla voidaan käsitellä lukuisa joukko integrointiongelmia: Jokaista derivointikaavaa

$$F'(x) = f(x)\,,$$

missä f on jatkuva, vastaa ekvivalentisti kaava f:n primitiiveille tai integraalifunktioille

$$\int f = F(x),$$

tarkemmin

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = F(x) + \text{ vakio.}$$

Näin saadaan taulukoiduksi eksplisiittisten funktioiden integraalifunktiot suljetussa muodossa (ks. taulukko 4.1). Kuitenkin lisäksi on olemassa vaarattoman näköisiä funktioita, joita *ei voida* integroida suljetussa muodossa. Voidaan todistaa, että esimerkiksi integraalifunktioita

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \text{ ja } \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,, k \neq 0$$

ei voida esittää alkeisfunktioiden avulla, niin yksinkertaisilta kuin nämä integraalit näyttävätkin.

Onneksi on olemassa tekniikoita, joilla monet integrointiongelmat voidaan *palauttaa* jonkun taulukoidun alkeisfunktion integroinniksi. Tässä luvussa tarkastelemme näitä tekniikoita. Varsinaisia tekniikoita on kaksi: sijoitusmenetelmä eli muuttujanvaihto ja osittaisintegrointi. Muut ovat lähinnä yksittäistapauksiin sopivia temppuja. On syytä vielä korostaa, että jatkuvalla funktiolla on aina olemassa integraalifunktio (Lause 2.10), vaikka sitä ei voitaisiinkaan esittää suljetussa muodossa.

4.1. Derivointikaavoista saatuja integrointikaavoja

taulukko

$\mathbf{f(x) = F'(x)}$	$\mathbf{F(x)}\ (+\mathbf{c})$	**väli**
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$(a \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$]-\infty, 0[$ tai $]0, \infty[$
e^x	e^x	
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$(a > 0\,, a \neq 1)$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$	$]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi[$
$\cot x$	$\log\lvert\sin x\rvert$	$]n\pi, n + 1\pi[$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$]n\pi, (n+1)\pi[$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi[$
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases}$	$]-1, 1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \arctan x \\ -\operatorname{arccot} x \end{cases}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{ar}\sinh x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$	
$\dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{ar}\cosh x = \log(x \pm \sqrt{x^2-1})$	$]-\infty, -1[$ tai $]1, \infty[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$	$]-1, 1[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar}\coth x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{x-1}$	$]-\infty, -1[$ tai $]1, \infty[$

4.2. Sijoitusmenetelmä eli muuttujanvaihto

Sijoitusmenetelmä pohjautuu yhdistetyn funktion derivoinnin ketjusääntöön: Jos $G = F \circ \varphi$ ja jos sekä F että φ ovat jatkuvasti derivoituvia, niin

$$\frac{d}{dt}G(t) = \frac{d}{dt}F \circ \varphi(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,.$$

Nyt siis derivaatta $G'(t)$ on jatkuva, joten integroimalla edellinen kaava välillä $[\,\alpha, \beta\,]$ saadaan analyysin peruslauseen 3.10 nojalla

$$G(\beta) - G(\alpha) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Jos merkitään

$$a = \varphi(\alpha) \text{ ja } b = \varphi(\beta)\,,$$

saadaan edelleen

$$F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} F'(x)\,dx\,.$$

Sijoittamalla tähän $f(x) = F'(x)$ saamme *perussijoituskaavan*

sijoitus

$$\begin{gathered}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,,\\ x = \varphi(t)\,, \varphi(\alpha) = a\,, \varphi(\beta) = b\,,\end{gathered} \tag{4.1}$$

mikä kirjoitettuna differentiaalin $d\varphi = \varphi'(t)\,dt$ avulla muuntuu muotoon

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi)\,d\varphi\,.$$

4.1. Huomautus. Huomaathan, että kaavassa (4.1) funktio φ saa olla mikä hyvänsä välillä J (jonka päätepisteet ovat α ja β) jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Edelleen funktion f tulee olla jatkuva välillä I, joka sisältää kuvajoukon $\varphi(J)$ (edelleen F saa olla mikä tahansa f:n primitiivi).

4.2. Esimerkki. Sovelletaan muuttujanvaihtokaavaa (4.1) integrandiin $f(x) = \frac{1}{x}$ ja oletetaan, että sijoitus $x = \varphi(t) \neq 0$ kaikilla t ko. välillä. Tällöin

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int \frac{dx}{x} = \log|x| = \log|\varphi(t)|\,.$$

Soveltamalla tätä kaavaa funktioihin $\varphi(x) = \log x$, $\varphi(x) = \sin x$ ja $\varphi(x) = \cos x$ saadaan kaavat

$$\int \frac{dx}{x\log x} = \log|\log x|\,,$$

$$\int \cot x\,dx = \log|\sin x|\,, \qquad \int \tan x\,dx = -\log|\cos x|\,.$$

Kaavat voi helposti tarkistaa derivoimalla. Muista tehty oletus, että ko. välillä integrandin nimittäjä ei häviä!

Lisää esimerkkejä saadaan sijoittamalla eri funktioita $x = \varphi(t)$ seuraavaan kaavaan ($n \in \mathbf{Z}$, $n \neq -1$)

$$\int (\varphi(t))^n\,\varphi'(t)\,dt = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{(\varphi(t))^{n+1}}{n+1}\,,$$

missä valitsemalla $\varphi(t) = \log t$ ja $\varphi(t) = \sin t$ saadaan

$$\int \frac{(\log t)^n}{t}\,dt = \frac{(\log t)^{n+1}}{n+1}$$

ja

$$\int \sin^n t\cos t\,dt = \frac{\sin^{n+1} t}{n+1}\,.$$

Monissa sovellutuksissa määrättävä integraali on muotoa

$$\int h\left(\varphi(t)\right)\,dt\,,$$

missä integrandista "puuttuu" termi $\varphi'(t)$. Tällöin pyrimme kirjoittamaan integrandin muotoon

$$h\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,.$$

Tämä onnistuu aina, jos tiedämme, että derivaatta φ' ei häviä. Tällöin nimittäin kuvaus $x = \varphi(t)$ on aidosti monotoninen, joten sillä on myös jatkuvasti derivoituva käänteiskuvaus $t = \psi(x)$ ja

$$\frac{dt}{dx} = \psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}\,.$$

Nyt jos määritellään

$$f(x) = h(x)\psi'(x),$$

saadaan

$$h\big(\varphi(t)\big) = \frac{f\big(\varphi(t)\big)}{\psi'\big(\varphi(t)\big)} = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,,$$

joten sijoituskaava saa muodon

$$\begin{aligned}\int h\big(\varphi(t)\big)\,dt &= \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = \int f(x)\,dx \\ &= \int h(x)\psi'(x)\,dx = \int h(x)\frac{dt}{dx}\,dx\,,\end{aligned}$$

missä on muistettava oletus $\varphi'(t) \neq 0$, joka takaa sen, että ψ on derivoituva.

Muistisäännönomaisesti sijoituskaava/muuttujanvaihtokaava (4.1) voidaan siis kirjoittaa (kun muuttujanvaihto $u(x)$ on aidosti monotoninen) seuraavasti:

$$\int\limits_a^b f(u(x))\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(u)\,du\,, \text{ missä}$$
$$\alpha = u(a)\,, \beta = u(b) \text{ ja } du = \frac{du}{dx}\,dx.$$

4.3. Esimerkki. Tehdään muuttujanvaihto $t = 2x$ integraalissa

$$\int \sin 2x\,dx\,.$$

Saadaan ($dt = 2dx$)

$$\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

ja määrätty integraali

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = -\Big/_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos t = \frac{1}{2}.$$

Tarkastellaan funktion $\sin\frac{1}{x}$ integraalia muuttujanvaihdon $t = \frac{1}{x}$ avulla: $dt = -x^{-2}dx$ tai $dx = -t^{-2}dt$, joten

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sin\frac{1}{x}\,dx = -\int_{2}^{1} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \int_{1}^{2} \frac{\sin t}{t^2}\,dt\,,$$

minkä lopullinen integrointi tuottaa (ainakin vielä) tuskaa.

Todistetaan seuraavaksi muuttujanvaihtokaavan hyödyllisin erikoistapaus suoraan Riemannin summien avulla käyttämättä ketjusääntöä – todistus toimii luonnollisesti ainoastaan Riemann-integroituville funktioille.

muutt.vaihto

4.4. Lause. (muuttujanvaihto/sijoitus) *Olkoon $f : [\,a,b\,] \to \mathbf{R}$ Riemann-integroituva ja $x : [\,\alpha,\beta\,] \to [\,a,b\,]$ jatkuvasti derivoituva siten, että $x'(t) \neq 0$ kaikilla t. Tällöin*

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt\,.$$

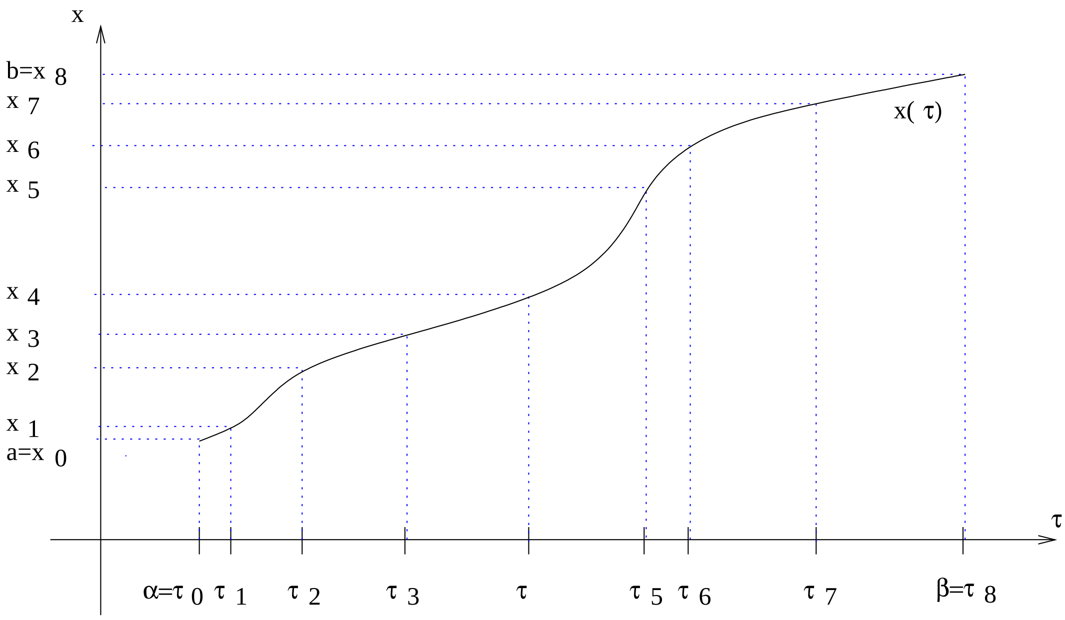
Todistus: Oletetaan, että $x'(t) > 0$ kaikilla t, jolloin x on aidosti kasvava. Voidaan myös olettaa että $x(\alpha) = a$ ja $x(\beta) = b$. Jaetaan väli $[\,\alpha,\beta\,]$ osaväleihin (n kpl), jakopisteinä

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = \beta\,,$$

jolloin kuvat

$$a = x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \ldots, x_n = x(t_n) = b$$

muodostavat välin $[\,a,b\,]$ jaon, ja kääntäen.



Tällöin vasemmalla oleva integraali on Riemannin summan

$$\sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)(x_k - x_{k-1})$$

raja-arvo, missä luku $\nu_k \in [\, x_{k-1}, x_k \,]$ on mielivaltaisesti valittu. Kirjoitetaan tämä summa muodossa

$$\sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}(t_k - t_{k-1})\,.$$

Nyt (differentiaalilaskennan) väliarvolauseen nojalla on olemassa $\xi_k \in]t_{k-1}, t_k[$, jolle

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} = x'(\xi_k)\,.$$

Siten

$$\sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})\,,$$

josta valitsemalla $\nu_k = x(\xi_k)$ saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x(\xi_k))x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})\,,$$

mistä raja-arvoina saadaan halutut integraalit eli

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt\,.$$

□

4.5. Esimerkki. *(Integrointikaavoja)*

1. Määrätään integraali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (a \neq 0)$$

sijoituksen $x = x(t) = at$ avulla, jolloin $dt = \frac{dx}{a}$ ja siten (jos $a > 0$)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2-(at)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\ &= \arcsin t = \arcsin\frac{x}{a}\,,\ \text{kun } |x| < |a|\,,\end{aligned}$$

mikä on voimassa myös, kun $a < 0$. Huomaa, että negatiivisella a:lla sijoitus on vähenevä, jolloin integraalifunktion rajat vaihtuvat aiheuttaen ylimääräisen miinusmerkin. Samalla sijoituksella saadaan myös

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \int \frac{a\,dt}{a^2+(at)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2}\\ &= \frac{1}{a}\arctan t = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\,,\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{ar\,sinh}\frac{x}{a}\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{ar\,cosh}\frac{x}{a}\,,\ \text{kun } |x| > |a|\,,$$

ja

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{ar\,tanh}\frac{x}{a}\,, & \text{kun } |x| < |a|\,,\\ \frac{1}{a}\operatorname{ar\,coth}\frac{x}{a}\,, & \text{kun } |x| > |a|\,.\end{cases}$$

2. Sijoituksella $t = 1 + x^2$, josta $dt = 2x\,dx$, saadaan

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} = \sqrt{1+x^2}$$

ja

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{t} = \frac{1}{2}\log t = \frac{1}{2}\log(1+x^2)\,.$$

Sijoituksella $t = 1 - x^2$ saadaan samaan tapaan

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

ja

$$\int \frac{x\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\log|1-x^2|\,.$$

3. Sijoituksella $t = ax + b$, josta $dt = a\,dx$, kun $a \neq 0$, saadaan $(\alpha \neq -1)$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{\frac{1}{a}\,dt}{t} = \frac{1}{a}\log|t| = \frac{1}{a}\log|ax+b|,$$

$$\int (ax+b)^\alpha\,dx = \frac{1}{a}\int t^\alpha dt = \frac{1}{a(\alpha+1)}t^{\alpha+1} = \frac{1}{a(\alpha+1)}(ax+b)^{\alpha+1}$$

ja

$$\int \sin(ax+b)\,dx = \int \frac{1}{a}\sin t\,dt = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)\,.$$

4. Edelleen sijoituksella $t = \cos x$, josta $dt = -\sin x\,dx$, saadaan

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|$$

ja sijoituksella $t = \sin x$

$$\int \cot x\,dx = \log|\sin x|.$$

5. Etsitään integraalifunktio

$$\int \frac{dx}{\sin x}\,.$$

Ensiksi kirjoitetaan

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\,,$$

jolloin sijoituksella

$$t = \tan\frac{x}{2}\,, \qquad dt = \frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

saadaan

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dt}{t} = \log|t| = \log|\tan\frac{x}{2}|\,.$$

4.3. Osittaisintegrointi

Jos f ja g ovat jatkuvasti derivoituvia, niin tulon derivointikaava

$$(fg)' = f'g + fg'$$

voidaan kirjoittaa myös integrointikaavana

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

tai

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\,,$$

lyhyemmin

$$\int f\,dg = fg - \int g df\,,$$

mitä kutsutaan *osittaisintegrointikaavaksi*.

os.int **4.6. Lause.** (osittaisintegrointi)

i) Olkoot f ja g jatkuvasti derivoituvia. Tällöin

$$\int fg' = fg - \int f'g\,.$$

ii) Olkoot f ja g derivoituvia ja f' ja g' Riemann-integroituvia välillä $[\,a,b\,]$. Tällöin

$$\int_a^b fg'\,dx = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'g\,dx\,.$$

Todistus: Kohta i) todistettiin yllä. Kohta ii) seuraa samaan tapaan tulon derivointikaavasta, sillä derivaatta

$$(fg)' = f'g + fg'$$

on Riemann-integroituva, jolloin (harjoitustehtävä)

$$\int_a^b f(x)g(x) = \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg' .$$

$\square$

4.7. Esimerkki. Ensiksi

$$\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \log x - x \,,$$

mikä on helppo tarkistaa derivoimalla.

Edelleen

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int 1 \, e^x \, dx = e^x (x-1) \,.$$

Samoin osittaisintegroimalla

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x$$

ja

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x \,.$$

Joskus osittaisintegroinnilla päädytään palautuskaavaan:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx \, dx &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx \\ &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx \, dx \,, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx \, dx &= \frac{b^2}{a^2+b^2} \big(-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx \big) \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax} \big(a \sin bx - b \cos bx \big) \,. \end{aligned}$$

4.8. Esimerkki. Tässä esimerkissä johdamme lausekkeen summalle $f(b)+f(a)$, kun peruslauseen kaavassa on lauseke erotukselle $f(b)-f(a)$. Jos f on jatkuvasti derivoituva, niin osittaisintegroimalla

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f'(x)(x-m)\,dx = \Big/_a^b f(x)(x-m) = f(b)(b-m) - f(a)(a-m)\,,$$

missä m on mielivaltainen vakio. Valitsemalla vakioksi keskiarvo $m = \frac{a+b}{2}$ saadaan

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f'(x)(x-m)\,dx = f(b)(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}) - f(a)(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}) = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\,.$$

4.9. Esimerkki. *(Palautuskaavoja (rekursio))* Toistuva osittaisintegrointi[2] johtaa usein palautuskaavoihin. Esimerkiksi integraalit

$$\int \cos^n x\,dx\,, \quad \int \sin^m x\,dx \quad \text{ja} \quad \int \sin^m x \cos^n x\,dx$$

ovat tällaisia. Osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\,dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx\,,\end{aligned}$$

joka antaa palautuskaavan

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx\,.$$

Tällä kaavalla voidaan integrandin potenssia pudottaa askel askeleelta kunnes päädytään integraaleihin

$$\int \cos x\,dx = \sin x \text{ tai } \int dx = x\,.$$

[2] Toistamiseen osittaisintegroitaessa on varottava, ettei “vaihda” f:n ja g:n rooleja:

$$\int_a^b f'g = \Big/_a^b fg - \int_a^b fg' = \Big/_a^b fg - (\Big/_a^b fg - \int_a^b f'g) = \int_a^b f'g\,,$$

mikä ei tuo ratkaisua ongelmaan.

Esimerkiksi, kun $n = 2$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}(x + \cos x \sin x)\,.$$

Vastaavalla tavalla saadaan palautuskaava

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx\,.$$

Jälkimmäisestä palautuskaavasta saadaan hauska yhteys kokonaislukujen ja π:n välille: Havaitaan, että kaikilla $n > 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx\,,$$

joten kaikilla $m \geq 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

ja

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\,,$$

mistä

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ja

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\,.$$

Jakamalla nämä saadaan

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)\cdot(2m+1)}\cdot\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx}\,.$$

Oikealla oleva integraalien suhde lähestyy lukua 1, kun $m \to \infty$, sillä koska $0 < \sin x < 1$ välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$, niin

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \, dx \,,$$

josta

$$1 \le \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx} \le \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx} = \frac{2m+1}{2m} \to 1 \,,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa palautuskaavasta. Lopputuloksena saamme

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \to \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} \,,$$

jota kutsutaan *Wallisin kaavaksi.*

4.4. Rationaalifunktioiden integrointi

Olkoot p ja q polynomeja. Palautetaan mieleen, että rationaalifunktiot ovat muotoa

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \,, \qquad q(x) \neq 0$$

olevia funktiota. Rationaalifunktoille on voimassa seuraava tulos.

rat.int **4.10. Lause.** *Rationaalifunktiot voidaan integroida alkeisfunktioita käyttäen.*

Emme todista tätä tulosta, vaan tyydymme ainoastaan esittelemään todistuksen pääkohtia. Näin saamme kuitenkin riittävissä määrin käytännön vinkkejä rationaalifunktioiden integroimiseksi. Karkeasti ottaen menetelmä on seuraava:

(1) Muokataan rationaalifunktiota niin, että sen nimittäjän asteluku on suurempi kuin osoittajan (ellei se jo ole sitä muotoa tai polynomi).

(2) Jaetaan nimittäjä (mahdollisimman matalaa astetta oleviin) reaalikertoimisiin tekijöihin,

$$\begin{aligned} q(x) &= a(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots \\ &\cdots(x-\alpha_\ell)^{k_\ell}(x^2+2b_1x+c_1)^{j_1}(x^2+2b_2x+c_2)^{j_2}\cdots(x^2+2b_ix+c_i)^{j_i}\,, \end{aligned}$$

missä α_i:t ovat q:n reaalijuuret kertalukua k_i ja

$$x^2+2b_ix+c_i=(x-\beta_i)(x-\overline{\beta}_i)\,,$$

missä β_i ja $\overline{\beta}_i$ ovat q:n kompleksikonjugaattijuuret kertalukua j_i.

(3) Tehdään *osamurtokehitelmä*: Rationaalifunktio

$$R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

(jonka nimittäjän aste on suurempi kuin osoittajan) voidaan esittää äärellisenä summana termeistä, jotka ovat muotoa

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_\ell}{(x-\alpha)^\ell}$$

ja

$$\frac{B_1+C_1x}{(x^2+2bx+c)}+\frac{B_2+C_2x}{(x^2+2bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_j+C_jx}{(x^2+2bx+c)^j}\,,$$

missä α on q:n kertalukua ℓ oleva reaalijuuri ja $x^2+2bx+c$:n juuret ovat q:n kertalukua j olevat kompleksiset konjugaattijuuret.

(4) Integroidaan osamurtokehitelmät.

Seuraavaksi katsellaan hieman tarkemmin em. kohtia. Ensiksi havaitaan, että mikäli

$$R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

ja p:n aste n on vähintään q:n aste m, niin jakolaskulla löydetään jäännöspolynomi r, jonka aste on pienempi kuin m ja polynomi g siten, että

$$p(x)=g(x)q(x)+r(x)\,.$$

Tällöin rationaalifunktion R integrointi redusoituu polynomin $g(x)$ ja rationaalifunktion

$$\frac{r(x)}{q(x)}\,,$$

missä osoittajan aste on nyt pienempi kuin nimittäjän, integroinniksi (kohta (1) edellä).

Seuraavaksi näytämme, kuinka osamurtokehitelmä integroidaan: Lauseke

$$\frac{1}{(ax+b)^n}$$

voidaan integroida sijoituksella $t = ax + b$:

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{t^n}\,dx\,.$$

Edelleen, koska

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a}(ax+b)^2 + \frac{d^2}{a}\,,\ \text{missä } d^2 = ac - b^2\,, d > 0\,,$$

saadaan sijoituksella $t = \frac{ax+b}{d}$

$$\int \frac{1+Cx}{(ax^2+2bx+c)^n}\,dx = D\int \frac{1+Ft}{(t^2+1)^n}\,dx\,.$$

Siten riittää keskittyä ns. perustyyppien

$$\frac{1}{x^n}\,,\quad \frac{1}{(x^2+1)^n}\,,\quad \text{ja}\quad \frac{x}{(x^2+1)^n}$$

integroimiseen. Näistä ensimmäinen on

$$\int \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \log|x|\,, & \text{jos } n = 1 \\ \frac{1}{1-n}x^{1-n}\,, & \text{jos } n > 1\,. \end{cases}$$

Kolmatta tyyppiä olevat integraalit ratkeavat sijoituksella $t = x^2 + 1$, jolloin

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^n} = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(x^2+1)\,, & \text{jos } n = 1 \\ -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}\,, & \text{jos } n > 1\,. \end{cases}$$

Lopuksi haemme integraalin

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

rekursion avulla: Jos $n = 1$, niin

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x\,.$$

Jos taas $n > 1$, niin havaitaan, että

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx\,,$$

jonka osaamme osittaisintegroida. Kun $f(x) = x$ ja

$$g'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n}\,,$$

missä edellisen avulla

$$g(x) = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}},$$

niin

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx = -\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}\,.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} \\ &= \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Prosessia voidaan jatkaa samalla tavalla, jos $n-1 > 1$. Jos $n-1 = 1$, niin $I_{n-1} = \arctan x$. Täten integraalifunktio I_n voidaan esittää rationaalifunktioiden ja $\arctan x$:n summana.

4.11. Esimerkki. *(osamurtokehitelmistä)* Emme todista, että rationaalifunktiolle voidaan aina tehdä osamurtokehitelmä.[3] Sen sijaan tarkastelemme tilannetta esimerkkien valossa. Olkoon

$$q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n), \quad \alpha_j \neq \alpha_i,$$

ts. q:lla on n reaalista, yksinkertaista nollakohtaa. Olkoon p polynomi, jonka aste on $< n$. Silloin osamurtokehitelmä on muotoa

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{x - \alpha_1} + \frac{a_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{a_n}{x - \alpha_n},$$

mistä kertoimet a_j ovat ratkaistavissa (kerrotaan molemmat puolet tekijällä $(x - \alpha_j)$, supistetaan ja evaluoidaan tulos, kun $x = \alpha_j$). Esimerkiksi

$$a_1 = \frac{p(\alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \cdots (\alpha_1 - \alpha_n)}.$$

Tulon derivointisäännöstä nähdään, että

$$q'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \cdots (\alpha_1 - \alpha_n).$$

Tekemällä sama muille nollakohdille saadaan

$$a_j = \frac{p(\alpha_j)}{q'(\alpha_j)}$$

[3]Karkeasti ottaen osamurtokehitelmä perustuu seuraavaan: Jos $q(x) = (x - \alpha)^k r(x)$, missä r on sellainen polynomi, jolle $r(\alpha) \neq 0$, niin yhtälön

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{p(\alpha)}{(x - \alpha)^k r(\alpha)} = \frac{1}{r(\alpha)} \frac{p(x)r(\alpha) - p(\alpha)r(x)}{(x - \alpha)^k r(x)}$$

oikean puolen osoittaja häviää, kun $x = \alpha$. Siten se on muotoa

$$r(\alpha)(x - \alpha)^m p_1(x),$$

missä $p_1(x)$ on polynomi ja $p_1(\alpha) \neq 0$ ja $m \in \mathbf{N}$. Merkitsemällä

$$\beta = \frac{p(\alpha)}{r(\alpha)}$$

saadaan tästä

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{\beta}{(x - \alpha)^k} = \frac{p_1(x)}{(x - \alpha)^{k-m} r(x)}.$$

Näin jatkamalla saadaan nimittäjässä oleva $(x - \alpha)$:n potenssi pudotettua nollaan. Sitten jäljelle jääneelle osamäärälle tehdään sama prosessi, missä α korvataan $q(x)$:n toisella nollakohdalla ja käydään vuorotellen kaikki nollakohdat läpi.

ja siten

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\alpha_1)}{q'(\alpha_1)(x-\alpha_1)} + \frac{p(\alpha_2)}{q'(\alpha_2)(x-\alpha_2)} + \cdots + \frac{p(\alpha_n)}{q'(\alpha_n)(x-\alpha_n)}\,.$$

Esimerkiksi siis

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x^3-x} &= \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{0+1}{x(0-1)(0+1)} + \frac{1+1}{1(x-1)(1+1)} + \frac{1+1}{-1(-1-1)(x+1)}\\ &= \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\,.\end{aligned}$$

Tarkastellaanpa sitten esimerkkiä, jossa nimittäjällä on korkeamman kertaluvun nollakohta. Koska

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\,,$$

yritetään ratkaista vakiot a, b, c. Kerrotaan yhtälö tulolla $x^2(x-1)$, josta

$$1 = ax^2 + b(x-1)x + c(x-1) = (a+b)x^2 + (c-b)x - c \quad \text{kaikilla } x\,.$$

Siten $a+b = 0 = c-b$ ja $-c = 1$ eli

$$c = -1\,, \quad b = -1 \quad \text{ja} \quad a = 1\,.$$

Näin saadaan osamurtokehitelmä

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\,,$$

josta

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = \log|x-1| - \log|x| + \frac{1}{x}\,.$$

Seuraavassa kompleksiset juuret astuvat esiin:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}\,,$$

josta kertoimille saadaan yhtälöt

$$1 = a(x^2+1) + x(bx+c) = x^2(a+b) + xc + 1\,,$$

mistä edelleen ratkaistaan

$$a = 1\,, \quad b = -1 \quad \text{ja } c = 0$$

eli

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,.$$

Siis

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\,.$$

4.5. Trigonometristen funktioiden integrointi

Trigonometrisia funktioita sisältävien lausekkeiden integroimiseksi ei ole yleistä keinoa. Usein kannattaa katsella trigonometrisia muunnoskaavoja, joiden avulla integroitava saattaa olla muunnettavissa helpommin integroitavaan muotoon. Osittaisintegrointia palautuskaavoineen saattaa myös olla avuksi.

Esimerkiksi havaitaan, että sijoittamalla

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

saadaan

$$\frac{1}{1+t^2} = \cos^2\frac{x}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{t^2}{1+t^2} = \sin^2\frac{x}{2}\,,$$

joista edelleen

$$\sin x = 2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

Siten $\cos x$ ja $\sin x$ voidaan esittää muuttujan $t = \tan\frac{x}{2}$ rationaalifunktioina. Edelleen derivoimalla

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2}\,,$$

josta

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

eli myös derivaatta $\frac{dx}{dt}$ on t:n rationaalifunktio.

4.12. Huomautus. *(Funktion $R(\sin x, \cos x)$ integrointi)* Tässä $R(\sin x, \cos x)$ tarkoittaa, että kyseessä on rationaalilauseke funktioista $\sin x$ ja $\cos x$. Sijoitus

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

muuttaa tämän rationaalifunktion integroinniksi:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt\,,$$

jossa integroitava on t:n rationaalifunktio. Joskus osittaisintegrointi tuottaa tuloksen helpommin.

Samoin lausekkeen $R(\tan x)$ integrointi muuttuu rationaalifunktion integroinniksi sijoituksella $t = \tan x$.

4.13. Esimerkki. Integraali

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$$

muuttuu sijoituksella $t = \tan \frac{x}{2}$ integraaliksi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}\, dt = \int \frac{dt}{t(1+t)} \\
&= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} = \log\left|\frac{t}{1+t}\right| \\
&= \log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right| .
\end{aligned}$$

4.6. (*)Eräiden muiden funktioiden integroinnista

(*) Tämän pykälän asioita ei kysytä tentissä.

4.14. Huomautus. *(Funktioiden $R(\sinh x, \cosh x)$ ja $R(x, \sqrt{x^2-1})$ integrointi)* Samaan tapaan kuin trigonometristen funktioiden tapauksessa sijoitus

$$t = \tanh \frac{x}{2}$$

antaa

$$\int R(\sinh x, \cosh x)\, dx = \int R(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2})\frac{2}{1-t^2}\, dt\,.$$

Sijoitus $t = e^x$ on myös usein hyödyllinen. Edelleen funktion $R(x, \sqrt{x^2-1})$ integrointi palautuu tähän sijoituksella $x = \cosh t$. Integroinnin voi tehdä myös suoraan sijoituksella $t = \tanh \frac{x}{2}$.

4.15. Huomautus. *(Funktion $R(x, \sqrt{x^2+1})$ integrointi)* Sijoitus $x = \sinh t$ palauttaa tämän funktioiden $\sinh x$ ja $\cosh x$ rationaaliseksi lausekkeeksi. Rationaalifunktion integrointiin palaudutaan suoraan esimerkiksi sijoituksella

$$t = x + \sqrt{x^2+1} \qquad \text{tai} \qquad \tau = \frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{x}\,.$$

4.16. Huomautus. *(Funktion $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$ integrointi)* Tällaisten funktioiden integrointi palautuu aiempiin. Voidaan olettaa, että $a > 0$. Koska

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a}(ax+b)^2 + \frac{ac-b^2}{a}\,,$$

niin tapauksessa $ac - b^2 = 0$ saadaan

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right)\,,$$

jolloin intergrandi onkin rationaalinen.

Jos taas $ac - b^2 > 0$, sijoitamme

$$t = \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$$

jolloin

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}\sqrt{t^2+1}\,,$$

mikä palautuu edelliseen.

Lopuksi, jos $ac - b^2 < 0$, sijoitus

$$t = \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}$$

palauttaa ongelman rationaalifunktion $R(t, \sqrt{t^2-1})$ integroinniksi.

4.17. Huomautus. *(Funktioden $R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})$ ja $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}})$ integrointi)* Kahden eri lineaarifunktion neliöjuuria sisältävien rationaalifunktioiden lausekkeiden

$$R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})$$

integrointi palautuu edellisiin sijoituksella

$$t = \sqrt{\alpha x+\beta}\,,$$

josta

$$x = \frac{t^2-\beta}{\alpha} \quad \text{ja} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{\alpha}$$

ja siis

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})\,dx = \int R\left(\frac{t^2-\beta}{\alpha}, \sqrt{\frac{1}{\alpha}(at^2-a\beta+\alpha b)}, t\right)\frac{2t}{\alpha}\,dt\,,$$

joka on edellä käsiteltyä tyyppiä.

Edelleen sijoitus

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$$

antaa

$$x = \frac{-\beta t^n+b}{\alpha t^n-a} \quad \text{ja} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{a\beta-b\alpha}{(\alpha t^n-a)^2}nt^{n-1}\,,$$

jolloin jälkimmäinen integraali muuttuu muotoon

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)dx = \int R\left(\frac{-\beta t^n+b}{\alpha t^n-a}, t\right)\frac{a\beta-b\alpha}{(\alpha t^n-a)^2}nt^{n-1}\,dt\,,$$

joka on rationaalifunktion integraali.

4.18. Huomautus. Edelliset esimerkit toimivat teoriassa hyvin. Käytännössä ne usein johtavat kuitenkin turhan monimutkaisiin laskutoimituksiin ja onkin syytä aina miettiä, johtaisiko erikoistapauksessa jokin muu menetelmä nopeammin tulokseen. Esimerkiksi integraali

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$$

palautuu sijoituksella $t = \tan x$ rationaalifunktion

$$\frac{1}{a^2t^2 + b^2}$$

integroinniksi, sillä

$$\frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x(a^2 \tan^2 x + b^2)} = \frac{1 + \tan^2 x}{a^2 \tan^2 x + b^2} \, .$$

Teorian mukainen sijoitus $\tau = \tan \frac{x}{2}$ puolestaan johtaa huomattavasti hankalampaan integraaliin

$$\int \frac{2 + 2\tau^2}{b^2 + \tau^2(4a^2 - 2b^2) + b^2\tau^4} \, d\tau \, .$$

5. Epäoleelliset integraalit

Integraalin määritelmässä olemme vaatineet, että integrandi f on *rajoitettu* funktio suljetulla ja *rajoitetulla* välillä $[a,b]$. Nyt laajennamme integraalin käsitettä niin, että voimme tutkia integraaleja, joissa joko integrandi tai integrointiväli on rajoittamaton. Tällaisia integraaleja sanotaan epäoleellisiksi (*engl.* improper). Epäoleellisia integraaleja on siis (pääosin) kahdenlaisia:

i) Integraali

$$\int_a^b f\,dx\,,$$

missä f on Riemann-integroituva jokaisella välillä $[c,d] \subset]a,b[$, mutta f ei ole rajoitettu välillä $[a,b]$.

ii) Integraalit

$$\int_{-\infty}^b f\,dx\,, \quad \int_a^\infty f\,dx \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^\infty f\,dx\,,$$

missä f on rajoitettu ja Riemann-integroituva jokaisella (kyseisen välin) rajoitetulla osavälillä.

Tarkastellaan ensin tapausta i). Nyt f on Riemann-integroituva jokaisella välin $]a,b[$ suljetulla osavälillä $[c,d] \subset]a,b[$, ja siis integraali

$$\int_c^d f(x)\,dx$$

on hyvin määritelty kaikille $a < c < d < b$. Tutkitaan raja-arvoa

$$\lim_{c\to a+} \int_c^d f(x)\,dx\,.$$

Mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa (eli reaaliluku), sanotaan, että *epäoleellinen integraali*

$$\int_a^d f(x)\,dx$$

suppenee (konvergoi) ja merkitään

$$\int_a^d f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^d f(x)\,dx\,.$$

Tämän integraalin epäoleellisuus oli siis integraalin alarajalla.

Samoin, jos raja-arvo

$$\lim_{d\to b-} \int_c^d f(x)\,dx$$

on olemassa (ja reaaliluku!), sanotaan, että *epäoleellinen integraali*

$$\int_c^b f(x)\,dx$$

suppenee (konvergoi) ja merkitään

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{d\to b-} \int_c^d f(x)\,dx\,.$$

Tämän integraalin epäoleellisuus oli siis integraalin ylärajalla.

Jos epäoleellinen integraali ei suppene, niin se *hajaantuu (divergoi)*.

Tämä yleistetään seuraavan periaatteen mukaisesti: jos väli $[a, b]$ voidaan jakaa äärellisen moneen suljettuun osaväliin $[c_{j-1}, c_j]$, missä

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = b\,,$$

ja epäoleelliset integraalit

$$\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x)\,dx$$

suppenevat kaikilla $j = 1, 2, \ldots, n$, niin sanotaan, että *epäoleellinen integraali*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee (konvergoi) ja merkitään

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x)\,dx\,.$$

Erityisesti, jos f on Riemann-integroituva jokaisella välin $]a,b[$ suljetulla osavälillä $[c,d] \subset]a,b[$, niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee, jos ja vain jos on olemassa sellainen $c \in]a,b[$, että epäoleelliset integraalit

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{ja} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

suppenevat; tällöin asetetaan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Esim5.1 **5.1. Esimerkki.** Olkoon

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}\,, \qquad \text{missä } \alpha > 0\,.$$

Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha})\,, & \text{kun } \alpha \neq 1, \\ \log\frac{1}{\varepsilon}\,, & \text{kun } \alpha = 1\,. \end{cases}$$

Siten

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\,, & \text{kun } 0 < \alpha < 1, \\ \infty\,, & \text{kun } \alpha \geq 1, \end{cases}$$

joten epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

suppenee, kun $\alpha < 1$ ja hajaantuu, kun $\alpha \geq 1$.

Epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

suppenee, koska

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big/_0^{1-\varepsilon} \arcsin x = \arcsin(1-\varepsilon) \to \frac{\pi}{2}\,.$$

Halutun integraalin suppeneminen voidaan usein saada selville vertailemalla integrandeja tunnetusti suppenevien tai hajaantuvien integraalien integrandeihin.

`vertailu` **5.2. Lause.** (vertailu majorantti/minoranttiperiaatteella) *Olkoon f ei-negatiivinen ja Riemann-integroituva välillä $[a,c]$ kaikilla $c \in]a,b[$.*

i) Jos on olemassa funktio h (majorantti), jolle

$$0 \leq f(x) \leq h(x) \quad \textit{kaikilla } x \in [a,b[$$

ja epäoleellinen integraali

$$\int_a^b h(x)\,dx$$

suppenee, niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee.

ii) Jos on olemassa funktio g (minorantti), jolle

$$0 \le g(x) \le f(x) \quad \text{kaikilla } x \in [a, b[$$

ja epäoleellinen integraali

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

hajaantuu, niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

hajaantuu.

Todistus: Koska integraalifunktio

$$I(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

on kasvava ($f \ge 0$), niin integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee, jos ja vain jos

$$\lim_{t \to b-} I(t) < \infty\,.$$

Kohdassa i)

$$I(t) \le \int_a^t h(x)\,dx \le \int_a^b h(x)\,dx < \infty\,,$$

joten

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee. Kohdassa *ii*)

$$I(t) \geq \int_a^t g(x)\,dx \to \int_a^b g(x)\,dx = \infty\,,$$

joten $I(t) \to \infty$ ja siten

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

hajaantuu. $\square$

5.3. Esimerkki. Integraali

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}\log x}$$

suppenee, koska

$$0 \leq -\frac{1}{\sqrt{x}\log x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad \text{kaikilla } 0 < x < \frac{1}{2}$$

ja integraali

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{x}}$$

suppenee Esimerkin 5.1 nojalla ($\alpha < 1$).

Toisaalta integraali

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\log x}$$

hajaantuu, koska

$$-\frac{1}{\sqrt{x}\log x} \geq -\frac{1}{\log x} \qquad \text{kaikilla } \frac{1}{2} \leq x < 1$$

ja väliarvolaseen (DVAL) nojalla kaikilla $\frac{1}{2} \leq x < 1$ on olemassa $\frac{1}{2} < \xi < 1$, jolle

$$|\log x| = |1 - x|\frac{1}{\xi} \leq 2|1 - x|\,,$$

joten

$$-\frac{1}{\log x} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{1-x}\,.$$

Edelleen integraali

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{1-x}$$

hajaantuu, koska

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = \int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \to \infty\,, \text{ kun } \varepsilon \to 0+\ .$$

5.4. Huomautus. Edellisessä esimerkissä verrattiin integrandia tyyppiä $x^{-\alpha}$ oleviin integrandeihin. Tällainen vertailu toimiikin usein, joten on hyvä muistaa, että jos f on ei-negatiivinen ja integroituva väleillä $[a,c]$, kun $c \in]a,b[$, niin integraali

$$\int\limits_{a}^{b} f\,dx$$

suppenee, jos

$$f(x) = O\left(\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}\right) \text{ jollakin } 0<\alpha<1, \text{ kun } x \to b-$$

ja hajaantuu, jos

$$\frac{1}{(b-x)^{\alpha}} = O\big(f(x)\big) \text{ jollakin } \alpha \geq 1, \text{ kun } x \to b-\ .$$

Toinen ryhmä epäoleellisia integraaleja koostuu sellaisista, joissa integroitava väli on rajoittamaton, mutta integrandi on rajoitettu ja Riemann-integroituva jokaisella suljetulla ja rajoitetulla osavälillä. Tarkastellaan siis muotoa

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f\,dx\,, \quad \int\limits_{a}^{\infty} f\,dx \quad \text{ ja } \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,dx$$

olevia integraaleja. Määrittely tapahtuu hyvin samaan tapaan kuin edelläkin: tarkastellaan (esimerkiksi) raja-arvoa

$$\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)\,dx\,.$$

Jos kyseinen raja-arvo on olemassa, sanotaan, että *epäoleellinen integraali*

$$\int_a^\infty f\,dx$$

suppenee (konvergoi) ja merkitään

$$\int_a^\infty f\,dx := \lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)\,dx\,.$$

Edelleen, *epäoleelliset integraalit*

$$\int_{-\infty}^b f\,dx \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^\infty f\,dx$$

suppenevat (konvergoivat) ja

$$\int_{-\infty}^b f\,dx := \lim_{d\to-\infty}\int_d^b f(x)\,dx\,,$$
$$\int_{-\infty}^\infty f\,dx := \lim_{d\to-\infty}\int_d^b f(x)\,dx + \lim_{c\to\infty}\int_b^c f(x)\,dx\,,$$

jos eo. raja-arvot ovat olemassa (ja äärellisiä). Huomaa, että jälkimmäisessä tapauksessa molempien raja-arvojen täytyy olla erikseen olemassa ja äärellisiä. Siis

$$\int_{-\infty}^\infty f\,dx$$

suppenee, jos ja vain jos molemmat integraalit

$$\int_{-\infty}^a f\,dx \quad \text{ja} \quad \int_a^\infty f\,dx$$

suppenevat ($a \in \mathbf{R}$).

Esim5.5 **5.5. Esimerkki.** Olkoon

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad \text{missä } \alpha > 0\,.$$

Tällöin kaikilla $c > 1$

$$\int_1^c \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(c^{1-\alpha} - 1)\,, & \text{kun } \alpha \neq 1, \\ \log c\,, & \text{kun } \alpha = 1\,. \end{cases}$$

Siten

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}\,, & \text{kun } \alpha > 1, \\ \infty\,, & \text{kun } 0 < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

joten epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

suppenee, kun $\alpha > 1$ ja hajaantuu, kun $\alpha \leq 1$. Vertaa saman epäoleellisen integraalin suppenemiseen 0:ssa (Esim. 5.1).

Edellä oleva esimerkki on erittäin hyödyllinen, sillä saamme jälleen Lauseen 5.2 kaltaisen vertailuperiaatteen.

vertailu2 **5.6. Lause.** (vertailu majorantti/minoranttiperiaatteella) *Olkoon f ei-negatiivinen ja Riemann-integroituva välillä $[a, c]$ kaikilla $c \geq a$.*

i) Jos on olemassa funktio h, jolle

$$0 \leq f(x) \leq h(x) \qquad \text{kaikilla } x \in [a, \infty[$$

ja epäoleellinen integraali

$$\int_a^\infty h(x)\,dx$$

suppenee, niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee.

ii) Jos on olemassa funktio g, jolle

$$0 \le g(x) \le f(x) \quad \text{kaikilla } x \in [a, \infty[$$

ja epäoleellinen integraali

$$\int_a^\infty g(x)\,dx$$

hajaantuu, niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

hajaantuu.

Lauseen 5.6 todistus on samanlainen kuin Lauseen 5.2, joten se jätetään harjoitustehtäväksi.

perusvert

5.7. Seuraus. *Olkoon f ei-negatiivinen ja Riemann-integroituva välillä $[a, c]$ kaikilla $c \ge a$. Jos*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \text{ jollakin } \alpha > 1, \text{ kun } x \to \infty,$$

niin integraali

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee. Jos taas

$$\frac{1}{x} = O(f(x)), \text{ kun } x \to \infty,$$

niin integraali

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

hajaantuu.

5.8. Esimerkki. Koska

$$\frac{1}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \text{ kun } x \to \infty,$$

niin integraalit

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

suppenevat. Tämä on helppo todeta suoraankin:

$$\int_0^c \frac{dx}{1+x^2} = \arctan c - \arctan 0 = \arctan c \overset{c\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2},$$

joten

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Edellä käytettiin seuraavaa yksinkertaista periaatetta.

ylh.raj

5.9. Lause. *Olkoon $b \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Olkoon f ei-negatiivinen ja Riemann-integroituva välillä $[a,c]$ kaikilla $c \in [a,b[$. Tällöin integraali*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee, jos ja vain, jos on olemassa sellainen $M \in \mathbf{R}$, että

$$\int_a^c f(x)\,dx \le M \text{ kaikilla } c \in [a,b[\,.$$

TODISTUS: Väite seuraa siitä, että kasvavalla funktiolla

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$$

on aina raja-arvo L, kun $c \to b-$ ja

$$\int_a^c f(x)\,dx \le L \text{ kaikilla } c \in [a,b[\,.$$

□

Lauseen 5.9 nojalla on perusteltua käyttää ilmaisua

$$\int_a^b f\,dx < \infty$$

tarkoittamaan, että *ei-negatiivisen* funktion f epäoleellinen integraali suppenee.

Vertailutestit 5.2 ja 5.6 antavat helposti seuraavan suppenemistarkastimen, nk. *osamäärätestin* (todistus harjoitustehtävä).

osamaarat **5.10. Lause.** *Olkoon $b \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Olkoot f ja g ei-negatiivisia ja Riemann-integroituvia välillä $[a, c]$ kaikilla $c \in [a, b[$ siten, että*

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in [0, \infty[\,.$$

i) Jos $0 < A < \infty$, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{suppenee, jos ja vain, jos} \quad \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{suppenee}\,.$$

ii) Jos $A = 0$ ja

$$\int_a^b g(x)\,dx \quad \text{suppenee}\,,$$

niin

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{suppenee}\,.$$

iii) Jos $A = \infty$ ja

$$\int_a^b g(x)\,dx \quad \text{hajaantuu}\,,$$

niin

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{hajaantuu}\,.$$

Ei-negatiivisten funktioiden integraalien suppeneminen on (periaatteessa) helppo tarkistaa: riittää tarkistaa, että integraalit pysyvät rajoitettuina. Jos integrandi vaihtaa merkkiään, voi integraaleissa tapahtua myös kumoutumisilmiöitä, esimerkiksi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \, dx \,, \qquad \text{joten} \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 0 \,.$$

5.11. Määritelmä. Sanotaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

suppenee itseisesti, jos integraali

$$\int_a^b |f(x)| \, dx$$

suppenee.

Koska $|f| = f^+ + f^-$, niin integraalin

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

itseinen suppeneminen merkitsee, että molemmat integraalit

$$\int_a^b f^+(x) \, dx \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b f^-(x) \, dx$$

suppenevat. Koska $f = f^+ - f^-$, saadaan tämän seurauksena seuraava lause.

its.supp **5.12. Lause.** *Jos epäoleellinen integraali*

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

suppenee itseisesti, niin se suppenee.

5.13. Esimerkki. Integraali

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

suppenee, mutta ei itseisesti, ts. integraali

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$$

hajaantuu. Jälkimmäinen väite voidaan todeta seuraavasti. Ensinnäkin

$$\text{(i)} \quad |\sin x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2}, \qquad \text{jos } x + n\pi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ jollakin } n \in \mathbf{Z}\,.$$

Edelleen kaikilla $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$,

$$\text{(ii)} \qquad \int_{\frac{\pi}{4}+(n-1)\pi}^{\frac{3\pi}{4}+(n-1)\pi} \frac{dx}{x} \geq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{4}+n\pi} \frac{dx}{x}\,,$$

joten

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{\pi}{4}+(k-1)\pi}^{\frac{\pi}{4}+k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{\pi}{4}+(k-1)\pi}^{\frac{3\pi}{4}+(k-1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \\
&\overset{(i)}{\geq} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}+(k-1)\pi}^{\frac{3\pi}{4}+(k-1)\pi} \frac{dx}{x} \overset{(ii)}{\geq} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}+(k-1)\pi}^{\frac{\pi}{4}+k\pi} \frac{dx}{x} \\
&= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+n\pi} \frac{dx}{x} \\
&\to \infty\,,
\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Siis

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx = \infty\,.$$

Näytetään, että kumoutumisilmiö saa integraalin

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

suppenemaan. Koska

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

ei suppeneminen 0:ssa ole ongelma.

Aloitetaan osittaisintegroimalla. Huomaa, että $(1-\cos x)$ on eräs $\sin x$:n primitiivi. Käytämme seuraavassa tätä tyypillisemmän primitiivin $(-\cos x)$ sijaan. Kun $0 < a < b < \infty$, niin

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx = \Big/_a^b \frac{1-\cos x}{x} + \int_a^b \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx\,.$$

Koska

$$\lim_{a\to 0} \frac{1-\cos a}{a} \overset{(l'Hospital)}{=} \sin 0 = 0$$

ja

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1-\cos b}{b} \overset{(0\le 1-\cos b\le 2)}{=} 0\,,$$

saadaan

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{a\to 0}\lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx\,,$$

mikä suppenee 0:ssa, koska $\sin x/x \to 1$, kun $x \to 0$ ja ∞:ssä, koska

$$0 \le \frac{1-\cos x}{x^2} \le 2\frac{1}{x^2}\,.$$

5.14. Huomautus. Osittaisintegrointi ja muuttujanvaihto toimivat myös suppeneville epäoleellisille integraaleille.

5.15. Esimerkki. *(Gammafunktio)* Gammafunktio määritellään seuraavasti:

$$\Gamma(n) := \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx\,, \quad n > 0\,.$$

Integraali suppenee, koska se suppenee väleillä $]0,1[$ ja $]1,\infty[$: Välillä $]0,1[$

$$0 < e^{-x} x^{n-1} < \frac{1}{x^\alpha}\,,\ \text{kun } \alpha = 1 - n < 1\,,$$

joten integraali suppenee ko. välillä.

Välillä $]1,\infty[$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x} x^{n-1}}{\frac{1}{x^2}} = 0\,,$$

joten integraali suppenee ko. välillä Lauseen 5.10 nojalla.

Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int e^{-x} x^{n-1}\,dx = -e^{-x} x^{n-1} + (n-1)\int e^{-x} x^{n-2}\,dx\,,$$

joten

$$\Gamma(n) = \Big/_0^\infty - e^{-x} x^{n-1} + (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)\Gamma(n-1)\,,$$

kun $n > 1$.

Jatkamalla tätä saadaan seuraava rekursiivinen esitys gammafunktiolle. Jos k on kokonaisluku ja $0 < k < n$, niin

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\cdots(n-k)\Gamma(n-k)\,.$$

Erityisesti, jos $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ ja $k = n - 1$, niin

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = (n-1)!\int_0^\infty e^{-x}\,dx\,.$$

Koska

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = -\Big/_0^\infty e^{-x} = 1\,,$$

niin

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

tai

$$n! = \int_0^\infty e^{-x} x^n\,dx\,,\ \text{kun } n \in \mathbf{N}\,.$$

6. Numeerisista sarjoista

Kurssin loppuosassa tarkastellaan numeerisia sarjoja. Sarjojen teorialla on paljon sovelluksia analyysin eri osa-alueilla ja myös muilla matematiikan aloilla, mm. erilaisten funktioiden arvioinnissa ja alkulukujen ominaisuuksien tutkimuksessa. Kaikille tuttuna esimerkkinä mainittakoon geometrinen sarja, joka on esimerkkitapaus potenssi- tai yleisemmin funktiosarjasta. Tällaisia sarjoja tulee vastaan luonnollisella tavalla käytännön sovelluksissa, kuten vaikkapa sijoituslaskennassa tai populaatiodynamiikassa.

6.1. Peruskäsitteet ja integraalitarkastin

Sarjalla tarkoitetaan numeroituvasti äärettömän monen luvun summaa. Yhteenlaskettavat luvut voidaan numeroituvuuden ansiosta järjestää jonoksi $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Luonnollinen tapa käsitellä ääretöntä summaa

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

on aloittaa yhteenlasku alkupään termeistä ja tarkastella *osasummia* S_n:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1, \\
S_2 &= a_1 + a_2, \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k, \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}$$

6.1. Määritelmä. Jonoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liittyvää osasummien jonoa $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ kutsutaan sarjaksi ja sitä merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Sarja *suppenee*, merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$, jos osasummien jonolla on äärellinen raja-arvo S. Tätä raja-arvoa kutsutaan *sarjan summaksi*. Sarjalle käytetään merkintöjä

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Jos osasummien jono (S_n) ei suppene (eli raja-arvoa ei ole olemassa tai se on $\pm\infty$), sarja *hajaantuu*. Tällöin merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$. Yhteenlaskettavia a_n kutsutaan sarjan *termeiksi*.

6.2. Huomautus. Ei ole millään tavalla oleellista, että termien indeksointi alkaa ykkösestä. Yleisemmin, jos indeksointi alkaa kokonaisluvusta k, niin voidaan määritellä vastaavasti

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=k}^{n} a_i.$$

Etenkin tapaus $k = 0$ esiintyy usein.

6.3. Esimerkki. Päättymättömät desimaalikehitelmät voidaan tulkita suppeneviksi sarjoiksi. Esimerkiksi

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \cdots .$$

6.4. Esimerkki. Jonoa $a_n = 1,\ n \in \mathbf{N}$, vastaava sarja hajaantuu, sillä osasummien

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

jono kasvaa rajatta.

6.5. Esimerkki. Sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \pm 1 \cdots$$

hajaantuu, sillä osasumma $S_n = 1$, kun n on parillinen, ja $S_n = 0$, kun n on pariton. Näin ollen raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} S_n$ ei ole olemassa (raja-arvon tulee olla yksikäsitteinen).

`haj.tark.` **6.6 . Lause** (Hajaantumistarkastin). *Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Näin ollen, jos $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.*

Todistus: Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

$\square$

6.7. Huomautus. Edellisessä lauseessa on oltava tarkkana päättelyn suunnan kanssa. Nimittäin siitä, että $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ **ei seuraa**, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Tämän vuoksi lause onkin nimetty *hajaantumis*tarkastimeksi.

6.8. Esimerkki. Kurssilla Analyysi I todistettiin, että jono $a_n = q^n$

- lähestyy raja-arvoa nolla, kun $|q| < 1$,
- lähestyy raja-arvoa yksi, kun $q = 1$,
- hajaantuu muulloin.

Näin ollen hajaantumistarkastimen nojalla geometrinen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ hajaantuu, kun $|q| \geq 1$. Kun $|q| < 1$ tämän sarjan osasummaksi tulee

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to \frac{1}{1-q}, \qquad \text{kun } n \to \infty$$

eli geometrinen sarja suppenee, kun $|q| < 1$, ja tällöin

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Edellisessä huomautuksessa todettiin, ettei hajaantumistarkastin anna riittävää ehtoa sille, että sarja suppenisi. Toisin sanoen on mahdollista, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu, vaikka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Havainnollistetaan tätä pian esimerkein. Pohditaan kuitenkin ensin sarjojen suppenemisen ja epäoleellisten integraalien suppenemisen välistä yhteyttä, sillä tämä auttaa mainittujen esimerkkien ymmärtämisessä.

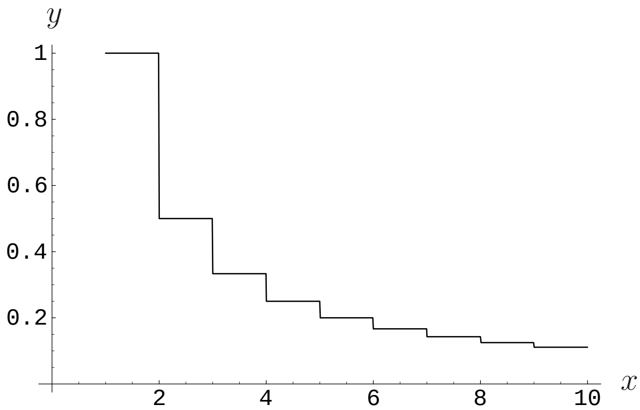
Määritellään harjoituksista tuttu hakasfunktio, joka yksinkertaisesti pyöristää reaaliluvun alaspäin lähimmäksi kokonaisluvuksi:

$$[x] = n, \qquad \text{kun } x \in [n, n+1[\,,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Hakasfunktion avulla jono $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \ldots)$ voidaan muuttaa välillä $[1, \infty[$ määritellyksi reaalifunktioksi f_p asettamalla

$$f_p(x) = a_{[x]}.$$

Funktio f_p saa täten arvon a_1 välillä $x \in [1, 2[$, arvon a_2 välillä $x \in [2, 3[$ ja niin edespäin. Funktiota f_p kutsutaan tästä syystä sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vastaavaksi porrasfunktioksi (kertaa tarvittaessa porrasfunktio luvusta 2 – ainoana erona aiempaan määritelmään tässä kohtaa on se, että funktiolle annetaan tietty arvo aina välin alkupisteessä). Alla olevassa kuvassa näemme osan harmonista sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ vastaavan porrasfunktion kuvaajasta.



Olkoon sitten $n \in \mathbf{Z}_+$ mielivaltainen. Välillä $x \in [n, n+1[$ funktio f_p saa vakioarvon a_n, joten

$$a_n = \int_n^{n+1} f_p(x)\, dx.$$

Käyttämällä hyväksi integraalin additiivisuutta saadaan tästä sarjan $\sum_n a_n$ osasummille esitys

$$S_n = \int_1^{n+1} f_p(x)\, dx.$$

Tämän esimerkin valossa seuraava tulos ei ole lainkaan yllättävä.

`porr.tark.` **6.9. Lemma** (porrasfunktiotarkastin). *Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee silloin ja vain silloin, kun epäoleellinen integraali*

$$\int_1^{\infty} f_p(x)\, dx$$

suppenee. Lisäksi tällöin integraalin arvo yhtyy sarjan summaan.

Todistus: Merkitään $F(c) = \int_1^c f_p$. Oletetaan ensin, että sarja suppenee ja sen summa on S. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin $|S - S_n| < \varepsilon/2$, kun n on tarpeeksi suuri. Hajaantumistarkastimen nojalla myös $|a_n| < \varepsilon/2$, kun n on tarpeeksi suuri. Olkoon siis $M = M(\varepsilon)$ sellainen luku, että nämä molemmat ehdot toteutuvat, kun $n > M$. Jos sitten $c > M + 2$, niin

$$\begin{aligned}
|F(c) - S| &= \left| F([c]) + \int\limits_{[c]}^{c} f_p - S \right| \leq |F([c]) - S| + \left| \int\limits_{[c]}^{c} f_p \right| \\
&\leq \left| S_{[c]-1} - S \right| + \int\limits_{[c]}^{c} |f_p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

sillä $F(c) = \int_1^c f_p = \int_1^{[c]} f_p + \int_{[c]}^c f_p$, ja välillä $[[c], c]$ on $|f_p(x)| = |a_{[c]}| < \varepsilon/2$. Näin ollen epäoleellinen integraali suppenee kohti raja-arvoa S.

Oletetaan sitten, että kyseinen epäoleellinen integraali suppenee kohti raja-arvoa S. Tällöin $S_n = F(n+1)$ lähestyy raja-arvonaan sekin lukua S, kun $n \to \infty$. □

lin **6.10. Seuraus** (sarjan summan lineaarisuus)**.** *Oletetaan, että sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat, ja että niiden summat ovat A ja B. Jos $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ovat mielivaltaisia vakioita, niin tällöin myös lineaarikombinaationa saatu sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ suppenee ja sen summa on $\alpha A + \beta B$.*

Todistus: Aiemmin todistettiin, että sekä määrätty integraali että funktion raja-arvo käyttäytyvät vastaavalla tavalla lineaarisesti. Näin ollen väite seuraa nyt välittömästi Lemmasta 6.9. □

Sanotaan, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppenee itseisesti*, jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, ja että sarja suppenee *ehdollisesti*, jos se suppenee, mutta ei suppene itseisesti. Epäoleellisten integraalien vastaavasta tuloksesta saadaan jälleen välittömästi alla oleva sarjojen suppenemista koskeva seuraus.

6.11. Seuraus. *Itseisesti suppeneva sarja suppenee.*

Palautetaan mieleen luennolla (todistuksetta) esitetty epäoleellisten integraalien Cauchy-ehto.

int.C-ehto **6.12. Lause** (Cauchy-ehto). *Oletetaan, että f on Riemann-integroituva välillä $[a, c]$ kaikilla $c > a$. Tällöin epäoleellinen integraali*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee, jos ja vain jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $M = M(\varepsilon) > a$, että

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

aina, kun $c_2 > c_1 > M$.

Epäoleellisten integraalien Cauchy-ehto saa sarjojen puolella seuraavan muodon. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. Ideana on, että epäoleellisen integraalin 'häntäpään pätkää' $\int_{c_1}^{c_2} f$ vastaa osasummien erotus

$$S(m) - S(n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m = \int_{n+1}^{m+1} f_p.$$

C-ehto **6.13. Seuraus** (Cauchy-ehto). *Sarja $\sum_{n=1}^\infty a_n$ suppenee, jos ja vain jos kutakin lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen rajaluku $M = M(\varepsilon)$, että aina, kun $n > M$ ja $p > 0$, niin*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Cauchy-ehto kertoo tarkemmassa muodossa sen tosiasian, että sarjan suppeneminen riippuu ainoastaan siitä, miten sarjan äärettömän häntäpään termit käyttäytyvät. Näin ollen esimerkiksi äärellisen monen termin poistaminen sarjasta ei muuta sen suppenemista. Toisaalta suppenevan sarjan summan S suuruusluokka määräytyy alkupään termeistä *jäännöstermien* $R_n = S - S_n = \sum_{k>n} a_k$ lähestyessä nollaa, kun $n \to \infty$.

Seuraavaksi lähdetään liikkelle funktiosta f, määritellään jono $a_n = f(n)$ ja tutkitaan näin muodostuvaa sarjaa. Jotta arviot varmasti onnistuisivat, rajoitutaan tapaukseen, jossa funktio f on ei-negatiivinen ja monotonisesti vähenevä.

int.tark.

6.14. Lause (Integraalitarkastin). *Oletetaan, että funktio $f : [1,\infty[\to \mathbf{R}$ on ei-negatiivinen ja vähenevä. Tällöin*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \downarrow \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \downarrow .$$

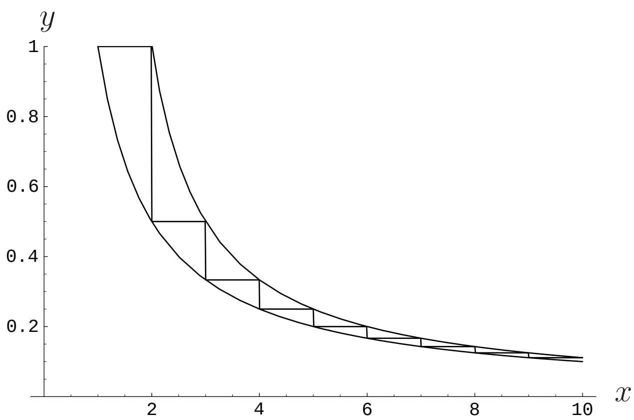
Molempien supetessa on voimassa arviot

$$\int_1^{\infty} f \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \int_1^{\infty} f.$$

TODISTUS: Olkoon f_p sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ vastaava porrasfunktio, ts. $f_p(x) = f([x])$. Funktion f monotonisuudesta seuraa, että aina, kun $x \ge 2$, niin

$$f(x) \le f_p(x) \le f(x-1).$$

Tätä havainnollistetaan alla olevassa kuvassa, jossa nähdään funktion $f(x) = 1/x$ (alin), sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ vastaavan porrasfunktion (kesk.) ja funktion $f(x-1)$ (ylin) kuvaajat yhdessä.



Jos tässä integraali $\int_2^{\infty} f(x-1)\,dx = \int_1^{\infty} f$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen nojalla myös integraali $\int_2^{\infty} f_p$ suppenee, joten sarja suppenee tällöin Lemman 6.9 nojalla. Jos taas $\int_2^{\infty} f_p$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen nojalla $\int_2^{\infty} f$ suppenee. Koska lisäksi f on vähenevyyden nojalla integroituva välillä $[1,2]$, integraali $\int_1^{\infty} f$ suppenee silloin ja vain silloin, kun $\int_2^{\infty} f$ suppenee. Integraalien supetessa niiden välillä on voimassa epäyhtälöt

$$\int_2^{\infty} f \le \int_2^{\infty} f_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \right) - f(1) \le \int_2^{\infty} f(x-1)\,dx = \int_1^{\infty} f.$$

Väitetyt arviot seuraavat näistä epäyhtälöistä lisäämällä niihin puolittain luku $f(1)$ ja ottamalla huomioon monotonisuuden seurauksena saatava arvio $\int_1^2 f \le f(1)$. $\square$

harm.sarja **6.15. Esimerkki.** Koska integraali $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ hajaantuu (Esimerkki 5.5, $\alpha \le 1$), niin ns. *harmoninen sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

hajaantuu integraalitarkastimen nojalla. Yleisemmin Esimerkin 5.5 seurauksena nähdään, että kun $s > 0$, niin sarja

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

suppenee, kun $s > 1$, ja hajaantuu, kun $0 < s \le 1$.

6.16. Huomautus. Esimerkissä 6.15 esiintyvät suppenevat sarjat määrittelevät (osin) ns. Riemannin zeta-funktion $\zeta(s)$. Riemann päätyi tutkimaan tätä funktiota pohtiessaan alkulukujen jakautumista. Kyseinen funktio on keskeisessä roolissa *analyyttiseksi lukuteoriaksi* kutsutulla matematiikan osa-alueella. Suppenevia sarjoja $\zeta(s)$ kutsutaan myös *yliharmonisiksi sarjoiksi.*

Myöhemmillä kursseilla johdetaan menetelmiä, joiden avulla voidaan laskea funktion $\zeta(s)$ arvo, kun s on parillinen positiivinen kokonaisluku. Näistä useimmin esiintyy

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

6.17. Esimerkki. Todistetaan välillä $s > 1$ voimassa olevat arviot

$$\frac{1}{s-1} \le \zeta(s) \le \frac{s}{s-1}.$$

Kun $s > 1$, niin epäoleellinen integraali $\int_1^\infty (1/x^s)\,dx = 1/(s-1)$. Koska sarjan $\zeta(s)$ ensimmäinen termi $= 1$ ja $1 + (1/(s-1)) = s/(s-1)$, niin väitteet seuraavat Lauseen 6.14 arvioista.

Esitetään vielä tämän kappaleen lopuksi yksi hieman mutkikkaampi esimerkki. Esimerkissä esitettävää tekniikkaa käyttämällä saadaan tuotettua vastaesimerkkifunktioita eri tarkoituksiin. Analyysin sovellusten kannalta nämä eivät ole erityisen keskeisiä, mutta toisaalta osoittavat hyvin pelkkiin alkeisfunktioesimerkkeihin perustuvan ajattelun vaarat.

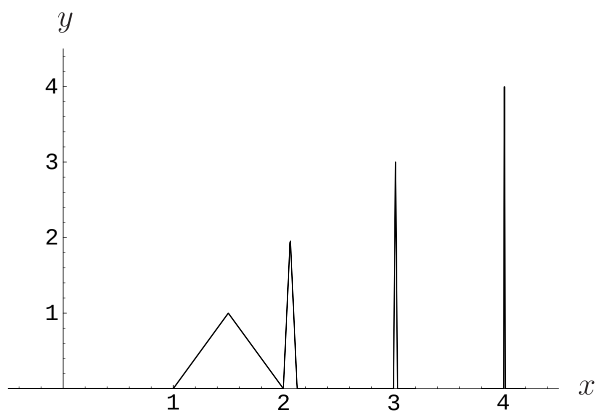
Edellisen luvun perusteella saattoi syntyä sellainen mielikuva, että jos epäoleellinen integraali $\int_0^\infty f$ suppenee, niin tällöin välttämättä $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Tämän luvun hajaantumistarkastin vielä vahvistaa osaltaan tätä käsitystä. Tämä (enemmän tai vähemmän intuitiivinen) käsitys on kuitenkin virheellinen, kuten seuraavassa esimerkissä nähdään. Funktio voi nimittäin olla äärettömän pitkällä välillä jopa rajoittamaton, vaikka sen epäoleellinen integraali suppenee.

`piikki` **6.18. Esimerkki.** Annetaan esimerkki välillä $[1, \infty[$ määritellystä jatkuvasta ja ei-negatiivisesta funktiosta $f(x)$, jolle epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

suppenee, mutta joka ei ole rajoitettu ja jolle raja-arvoa $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ei ole olemassa.

Ideana on koota funktion kuvaaja äärettömän monesta kolmiomaisesta piikistä, jolloin funktio saa arvon nolla piikkien ulkopuolella. Piikkejä on numeroituvasti ääretön määrä, joten ne voidaan kätevästi indeksoida positiivisilla kokonaisluvuilla. Oletetaan, että piikin numero k pinta-ala on a_k, ja että ko. piikki esiintyy osana funktion kuvaajaa välin $[k, k+1]$ (pienellä) osavälillä. Tällöin $\int_1^{n+1} f = S(n) = \sum_{k=1}^n a_k$, joten jos sarja $\sum_{n=1}^\infty a_n$ suppenee, niin vastaava epäoleellinen integraalikin suppenee. Suppenevalle sarjalle tietenkin $a_n \to 0$, mutta piikkien korkeuden voidaan silti antaa kasvaa rajatta, kun $k \to \infty$, kunhan niitä vastaavasti kavennetaan. Alla olevassa kuvassa on rajoittamaton ja jatkuva funktio f, jolle $\int_1^\infty f = \pi^2/12$.



Valitaan siis suppenevaa sarjaa $\zeta(2)/2$ seuraten $a_k = 1/(2k^2)$. Kolmiolla, jonka korkeus on $h = k$ ja kanta $a = 1/(k^3)$ on pinta-alana a_k. Jatkuvuuden takaamiseksi asetetaan piikin huippu puoliväliin (jolloin kolmiosta tulee tasakylkinen). Kyseisen kolmion nouseva reuna nousee h:n verran matkalla $a/2$, joten sen kulmakerroin on $2k^4$. Vastaavasti laskevan reunan kulmakerroin on $-2k^4$. Funktio määritellään siten välillä $[n, n+1[$ paloittain seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 2n^4(x-n), & \text{jos } x \in [n, n+\frac{1}{2n^3}[\,, \\ 2n - 2n^4(x-n), & \text{jos } x \in [n+\frac{1}{2n^3}, n+\frac{1}{n^3}[\,, \\ 0, & \text{jos } x \in [n+\frac{1}{n^3}, n+1[\,. \end{cases}$$

Koska piikit eivät leikkaa toisiaan, ne ovat lineaarisen polynomin kuvaajan osia. Lisäksi piikkien välillä funktio saa arvon nolla, joten funktion kuvaaja on yhtenäinen murtoviiva. Integraali $\int_1^\infty f$ laskee piikkien pinta-alojen summan, joka on $\zeta(2)/2 = \pi^2/12$ (vaikka sitä ei tämän kurssin tiedoilla pystykään laskemaan). Juuri tämän funktion kuvaaja oli yläpuolella olevassa kuvassa.

6.2. Suppenemistarkastimia

Tässä kappaleessa johdetaan muutamia käyttökelpoisia kriteerejä, joiden avulla kysymys annetun sarjan suppenemisesta tai hajaantumisesta voidaan jatkossa usein (mutta ei aina) helposti ratkaista. Seuraavat kaksi tulosta perustuvat siihen, että tunnetaan jokin positiiviterminen sarja, jonka suppeneminen tai hajaantuminen on jo tiedossa. Tunnetun sarjan avulla voidaan sitten tehdä vastaava päätelmä (suppenee/hajaantuu?) jostakin toisesta sarjasta, kunhan vastintermien vertailu onnistuu sopivalla tavalla. Tästä syystä näitä tuloksia kutsutaan myös *vertailutarkastimiksi* (vertaa epäoleellisten integraalien vertailuperiaatteisiin!).

6.19. Lause (Majoranttiperiaate). *Olkoon $K > 0$ jokin vakio. Oletetaan, että sarjojen $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ja $\sum_{n=1}^\infty b_n$ termit toteuttavat jostakin rajasta n_1 alkaen epäyhtälön $|a_n| \le K b_n$. Erityisesti siis $b_n \ge 0$, kun $n \ge n_1$. Tällöin*

$$\sum_{n=1}^\infty b_n \downarrow \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \downarrow \ \text{(itseisesti).}$$

Todistus: Väite seuraa suoraan epäoleellisten integraalien majoranttiperiaatteesta ja Lauseesta 6.9. □

6.20. Esimerkki. Kun $a_n = (2^n + 4^n)/(3^n + 5^n)$, niin sarja $\sum_{n=1}^\infty a_n$ suppenee, koska kaikille $n \in \mathbf{Z},\ n > 0$, on voimassa arvio

$$a_n = \frac{2^n + 4^n}{3^n + 5^n} \le \frac{4^n + 4^n}{5^n} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

ja majoroiva sarja $\sum_{n=1}^\infty q^n$, $q = 4/5 < 1$, suppenee.

6.21. Seuraus (Minoranttiperiaate). *Olkoon $K > 0$ jokin vakio. Oletetaan, että sarjojen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ termit toteuttavat jostakin rajasta n_1 alkaen epäyhtälön $|a_n| \leq K b_n$. Erityisesti siis $b_n \geq 0$, kun $n \geq n_1$. Tällöin*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \uparrow .$$

Todistus: Jos majoroiva sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenisi, niin tällöin majoranttiperiaatteen nojalla myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenisi. Tämä on ristiriita. $\square$

6.22. Esimerkki. Sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-5}{\sqrt[4]{n^7 - 3n^2}}$$

hajaantuu, koska

$$\frac{2n-5}{\sqrt[4]{n^7 - 3n^2}} \geq \frac{n}{n^{7/4}} = \frac{1}{n^{3/4}},$$

kun $n > 5$, ja sarja $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$ hajaantuu.

6.23. Huomautus. Vertailutarkastimia käytettäessä on huomattava, että jos halutaan perustella positiivitermisen sarjan hajaantumista, sarjan termejä on arvioitava *alaspäin*. Jos taas halutaan todistaa postiiviterminen sarja suppenevaksi, termejä on arvioitava *ylöspäin*. Edelleen, jos majoroiva sarja (yllä $\sum b_n$) hajaantuu tai minoroiva sarja (yllä $\sum a_n$) suppenee, mitään johtopäätöksiä ei voida tehdä, vaan on keksittävä jokin toinen lähestymistapa.

6.24. Esimerkki. Oletetaan, että termit a_n ovat kaikki > 0, ja että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Osoitetaan, että tällöin myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$$

suppenee. Kääntäen, jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu, niin myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ hajaantuu.

Logaritmifunktion jatkuvuuden nojalla $\lim_{n\to\infty} \log(1+a_n) = \log(1+\lim_{n\to\infty} a_n)$. Näin ollen, jos hajaantumistarkastin (Lause 6.6) kertoo toisen sarjoista hajaantuvan, niin samoin käy toisenkin sarjan. Rajoituksetta voidaan siis olettaa, että $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} \log(1+a_n)$. Koska l'Hospitalin säännön nojalla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

saadaan raja-arvotulos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1.$$

On siis olemassa sellainen rajaluku $n_1 \in \mathbf{N}$, että aina, kun $n \geq n_1$, suhde $\log(1+a_n)/a_n$ poikkeaa luvusta 1 vähemmän kuin 1/2. Toisin sanoen,

$$\begin{aligned} n > n_1 \qquad &\Rightarrow \qquad 1 - \frac{1}{2} \leq \frac{\log(1+a_n)}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\, a_n \leq \log(1+a_n) \leq \frac{3}{2}\, a_n. \end{aligned}$$

Jos nyt sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin saadaan arviot (kun $n > n_1$)

$$0 < \log(1+a_n) \leq \frac{3}{2}\, a_n,$$

joten majoranttiperiaatteen nojalla sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ suppenee niin ikään.

Jos taas sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu, niin epäyhtälöt (kun $n > n_1$)

$$0 < a_n \leq \frac{1}{1/2} \log(1+a_n)$$

yhdessä minoranttiperiaatteen kanssa takaavat, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ hajaantuu sekin.

Vertailutarkastinta käytettäessä tunnettuna vertailusarjana esiintyy ylivoimaisesti useimmin geometrinen sarja (sekä suppeneva että hajaantuva). Seuraavaksi yleisimpiä ovat harmoninen ja yliharmoninen sarja. Seuraavaksi johdetaan geometrisia sarjoja vertailusarjoina käyttäen suppenemis/hajaantumistarkastin, joka perustuu ainoastaan tutkittavan sarjan termien ominaisuuksiin. Tarkastin nimittäin tutkii kahden peräkkäisen termin osamäärän a_{n+1}/a_n käyttäytymistä, kun $n \to \infty$.

osam.tark **6.25. Lause** (Osamäärätarkastin).

(i) *Oletetaan, että on olemassa vakio L, $0 < L < 1$, ja luku $n_1 \in \mathbf{N}$ siten, että sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ termit toteuttavat epäyhtälön*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq L \qquad \textit{aina, kun } n \geq n_1.$$

Tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$.

(ii) *Oletetaan, että on olemassa vakio $L \geq 1$ ja luku $n_1 \in \mathbf{N}$ siten, että sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ termit toteuttavat epäyhtälön*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq L \qquad \textit{aina, kun } n \geq n_1.$$

Tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$.

TODISTUS: Merkitään kummassakin tapauksessa $A = |a_{n_1}|$. Tällöin on oltava $A > 0$, koska muutoin kahden peräkkäisen termin osamäärää ei voitaisi muodostaa.

Tapauksessa (i) saadaan suoraviivaisella induktiolla, että $|a_{n_1+k}| \leq AL^k$ aina, kun $k \geq 0$. Näin ollen suppeneva geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} AL^k$ majoroi alkuperäisen sarjan jäännöstermiä $\sum_{n \geq n_1} a_n$. Väite seuraa majoranttiperiaatteesta.

Tapauksessa (ii) nähdään induktiolla, että $|a_{n_1+k}| \geq AL^k$. Näin ollen $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ja väite seuraa hajaantumistarkastimesta. □

Osamäärätarkastimesta käytetään usein muotoa, jossa tutkitaan raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Tällöin on oltava tarkkana, sillä tapauksessa, missä kyseinen raja-arvo on yksi ei voida päätellä mitään!

osam.lim **6.26. Lause** (Osamäärätarkastin). *Oletetaan, että sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ termien suhteen itseisarvolla on raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = K.$$

Jos $K < 1$, niin sarja suppenee. Jos $K > 1$, niin sarja hajaantuu.

TODISTUS: Merkitään $\varepsilon = |L - K|$. Olkoon $L = (K+1)/2$ lukujen K ja 1 keskiarvo. Jos $K < 1$, niin tällöin $K < L < 1$, joten oletuksen perusteella jostakin luvusta $n_1 = n(\varepsilon)$ alkaen $|a_{n+1}/a_n| \leq L$. Sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppeneminen seuraa siten osamäärätarkastimen ensimmäisestä versiosta.

Jos $K > 1$, niin tällöin $K > L > 1$, joten oletuksen perusteella jostakin luvusta $n_1 = n(\varepsilon)$ alkaen $|a_{n+1}/a_n| \geq L$. Sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuminen seuraa siten osamäärätarkastimen ensimmäisestä versiosta 6.25. □

Koska raja-arvomuodon kanssa tehdään usein virheitä, ensimmäinen esimerkki on varoittava.

6.27. Esimerkki. Annetaan esimerkit kahdesta sellaisesta sarjasta, joista toinen suppenee, toinen hajaantuu, ja kummallekin $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Harmonisella sarjalla $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ on $a_n = 1/n$, joten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1,$$

kun $n \to \infty$. Harmoninen sarja kelpaa siten hajaantuvaksi esimerkiksi.

Suppeneva esimerkki saadaan yliharmonisesta sarjasta, jolle $a_n = 1/n^2$. Tässäkin

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1,$$

kun $n \to \infty$, ja sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee kohti summaansa $\zeta(2)$.

e:n sarja

6.28. Esimerkki. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

suppenee.

Tässä $a_n = 1/n!$, joten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Sarjan suppeneminen seuraa siten Lauseesta 6.26. Seuraavassa luvussa näytämme, että tämän sarjan summa on Neperin luku e.

exp.sarja

6.29. Esimerkki. Olkoon $x \in \mathbf{R}$ jokin reaalinen parametri. Osoitetaan Esimerkkiä 6.28 yleistäen, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

suppenee itseisesti.

Nyt sarjan yleinen termi on $a_n = x^n/n!$. Tällöin

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right|.$$

Koska $\left|\frac{x}{n+1}\right| \to 0$, kun $n \to \infty$, niin väite seuraa.

Seuraava esimerkki osoittaa, että Lausetta 6.25 voidaan käyttää silloinkin, kun peräkkäisten termien suhteella ei ole raja-arvoa.

6.30. Esimerkki. Tutkitaan sarjan

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2^2}{3^4} + \frac{2^2}{3^5} + \frac{2^3}{3^6} + \cdots$$

suppenemista. Sarjan yleisen termin lauseke on

$$a_n = \frac{2^{[n/2]}}{3^n}$$

kaikille $n = 1, 2, 3 \ldots$.

Tässä kahden peräkkäisen termin suhde a_{n+1}/a_n on

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{2^k/3^{2k+1}}{2^k/3^{2k}} = \frac{1}{3},$$

kun $n = 2k$ on parillinen. Kun $n = 2k+1$ on pariton, suhteeksi tulee

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{2^{k+1}/3^{2k+2}}{2^k/3^{2k+1}} = \frac{2}{3}.$$

Näin ollen raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ ei ole olemassa. Sarja kuitenkin suppenee Lauseen 6.25 nojalla, koska kohdassa (i) voidaan valita $L = 2/3 < 1$.

6.3. Vuorottelevat sarjat ja termien järjestyksen vaihto

Jos sarjan termeistä kaikki äärellistä poikkeusjoukkoa lukuun ottamatta ovat samanmerkkisiä (+ tai −), niin sarjan mahdollinen suppeneminen on aina itseistä, koska äärellisen monen termin jättäminen pois sarjasta ei muuta sen suppenemista.

Näin ollen ehdollista suppenemista voi esiintyä vain silloin, kun sarjassa on äärettömän monta positiivista ja äärettömän monta negatiivista termiä. Yksinkertaisin tilanne, jossa näin käy on ns. *vuorotteleva (alternoiva) sarja.*

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

missä $a_n > 0 \ \forall\, n \in \mathbf{N}$. Tällaisten jonojen suppenemista käsittelee seuraava erittäin yksinkertainen kriteeri.

alternoiva

6.31. Lause (Leibnizin lause). *Jos*

(i) positiivisten lukujen jono $(a_n), n \in \mathbf{N}$, *on vähenevä eli*

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots \geq 0$$

ja

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

niin vuorotteleva sarja $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *suppenee. Lisäksi jäännöstermi* $R_n = S - S_n$ *on samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi, ja*

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

TODISTUS: Tutkitaan erikseen parillisten ja parittomien osasummien jonoja. Jos $k \in \mathbf{N}$, niin ensimmäisen oletuksen nojalla

$$S_{2k+2} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} = S_{2k} - (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \leq S_{2k},$$

joten parillisten osasummien jono on vähenevä: $S_0 \geq S_2 \geq S_4 \geq \cdots$. Vastaavasti

$$S_{2k+3} = S_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} = S_{2k+1} + (a_{2k+2} - a_{2k+3}) \geq S_{2k+1},$$

joten parittomien osasummien jono on kasvava: $S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots$. Kaikille $k \in \mathbf{N}$ on lisäksi voimassa epäyhtälö

$$S_{2k+1} = S_{2k} - a_{2k+1} \leq S_{2k}. \tag{$*$}$$

Jokainen parillinen osasumma on siis $\geq$ kuin sitä edeltävä pariton osasumma, joka on puolestaan $\geq S_1$. Näin ollen parillisten osasummien jono (S_{2k}), $k \in \mathbf{N}$, on vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Monotonisten jonojen peruslauseen nojalla tällä jonolla on raja-arvo

$$S_{\text{parillinen}} = \lim_{k\to\infty} S_{2k}.$$

Edelleen epäyhtälön $(*)$ nojalla jokainen pariton osasumma on $\leq$ kuin sitä edeltänyt parillinen osasumma, joka on puolestaan $\leq S_0$. Näin ollen jono $(S_{2k+1}), k \in \mathbf{N}$, on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, joten sillä on raja-arvo

$$S_{\text{pariton}} = \lim_{k\to\infty} S_{2k+1}.$$

Jälkimmäisen oletuksen nojalla

$$0 = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}(S_{2k} - S_{2k+1}) = S_{\text{parillinen}} - S_{\text{pariton}}.$$

Näin ollen $S_{\text{parillinen}} = S_{\text{pariton}} = S$ eli parillisten osasummien ja parittomien osasummien jonoilla on yhteinen raja-arvo S, mikä on tällöin myös sarjan summa. Osajonojen monotonisuuden perusteella sitten

$$S_0 \geq S_2 \geq S_4 \geq \cdots \geq S \geq \cdots S_5 \geq S_3 \geq S_1.$$

Jäännöstermiä koskeva väite seuraa tästä, koska sarjan osasummia muodostettaessa seuraavan termin ottaminen mukaan siirtää aina osasumman arvon raja-arvon S toiselle puolelle. □

6.32. Huomautus. Leibnizin lausetta sovellettaessa riittää, että sen ehdot (termien etumerkkien vuorottelu ja itseisarvojen monotoninen väheneminen kohti nollaa) toteutuvat jostakin indeksin arvosta $n_1 \in \mathbf{N}$ alkaen. Tällöin tietenkin jäännöstermiä koskeva väite on voimassa vain, kun $n \geq n_1$.

`log2 sarja`

6.33. Esimerkki. Koska jono (a_n), $a_n = 1/n$, $n \in \mathbf{Z}_+$, toteuttaa Leibnizin lauseen ehdot, niin sarja

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

suppenee. Suppeneminen on ehdollista, koska termien itseisarvoista muodostuva harmoninen sarja hajaantuu. Olkoon tarkasteltavan sarjan summa S. Leibnizin lauseen arvioista $S_2 \leq S \leq S_3$ (huomaa, että nyt kun parillisen indeksin omaavat termit ovat negatiivisia, niin parilliset osasummat ovatkin $\leq S$ ja parittomat $\geq S$) nähdään, että

$$\frac{1}{2} \leq S \leq \frac{5}{6}.$$

Seuraavassa luvussa osoittamme, että $S = \log 2$. Osasummien suppeneminen on varsin hidasta. Jotta sarjan osasumma S_n olisi oikein (siis S) kolmen desimaalin tarkkuudella, jäännöstermin R_n tulee olla itseisarvoltaan $< 1/1000$. Leibnizin lauseen nojalla tähän päästään vasta, kun $n \geq 1000$, jolloin osasummassa on mukana jo tuhat termiä.

Esimerkin 6.33 ehdollisesti suppenevalla sarjalla on ilmeisiä yhteisiä piirteitä Esimerkin 5.13 epäoleellisen integraalin

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

kanssa. Kuten nähtiin, integraali suppenee, mutta ei suppene itseisesti. Tässä integraalissa säännöllisesti merkkiään vaihtava sinifunktio tuottaa vuorottelua vastaavan positiivisten ja negatiivisten termien osittaisen kumoutumisen.

Suppenevassa sarjassa perättäisiä termejä voidaan yhdistellä lisäämällä sarjaan sulkuja. Näin saatu uusi sarja suppenee ja sillä on sama summa alkuperäisen sarjan kanssa. Tämä johtuu siitä, että suluttamalla saadun sarjan osasummien jono on alkuperäisen sarjan osasummien jonon osajono, joten se suppenee kohti samaa raja-arvoa. Näin ollen Esimerkin 6.33 sarjasta voidaan muodostaa uusi sarja

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right),$$

jonka termit on saatu laskemalla yhteen kaksi alkuperäisen sarjan peräkkäistä termiä. Tämän sarjan osasummat ovat tarkalleen ne alkuperäisen sarjan osasummat, joissa on parillinen määrä yhteenlaskettavia. Tämän sarjan yleinen termi on

$$\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{2k-(2k-1)}{2k(2k-1)} = \frac{1}{2k(2k-1)},$$

joten sarja suppenee itseisesti, koska sitä majoroi suppeneva yliharmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Tämän sarjan suppeneminen on kuitenkin melkein yhtä hidasta kuin alkuperäisen sarjankin.

Sulkujen poistaminen suppenevasta sarjasta ei sen sijaan ole luvallista, ellei niin syntynyt uusi sarja sekin suppene (jolloin äsken esitettyjen perustelujen nojalla sulkujen lisääminen takaisin ei muuta sarjan suppenemista eikä summaa). Varoittavana esimerkkinä toimii suppeneva sarja

$$1 + 0 + 0 + \cdots = 1 + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots,$$

jonka summa on selvästi 1. Jos sulut poistetaan, saadaan sarja

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots,$$

joka hajaantuu, koska sen osasummina esiintyvät vuorotellen luvut 1 ja 0.

Ehdollisesti suppenevan sarjan termien järjestyksen vaihtaminenkaan ei ole luvallista (tilanne on siis hyvin erilainen kuin äärellisen monen luvun summan tapauksessa), kuten seuraavaksi nähdään.

$\boxed{\texttt{permut}}$ **6.34. Esimerkki.** Osoitetaan, että kun Esimerkin 6.33 sarjan $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ termit lasketaankin yhteen järjestyksessä

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots,$$

niin syntyvä sarja kyllä edelleen suppenee, mutta sen summan arvoksi tulee nyt $\frac{S}{2}\neq S$.

Sulkuja lisäämällä nähtiin jo, että

$$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right),$$

joten

$$\frac{S}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right).$$

Käyttämällä Seurausta 6.10 saadaan sitten, että

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}=S-\frac{S}{2}&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)-\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)\right]\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots.\end{aligned}$$

Merkitään sarjaa, joka saadaan poistamalla tästä sulut

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots,$$

ja olkoot $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ vastaavat osasummat. Yllä tarkastellun sarjan osasummina esiintyvät luvut $S_{3n}, n \in \mathbf{Z}_+$, joten jo nähdyn perusteella

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n} = \frac{S}{2}.$$

Toisaalta muut eli muotoa S_{3n+1} tai S_{3n+2} olevat osasummat eivät poikkea osasummista S_{3n} merkittävästi. Nimittäin

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{3n} + b_{3n+1}) = \frac{S}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{S}{2}$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n+2} = \lim_{n\to\infty} (S_{3n+3} - b_{3n+3}) = \frac{S}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(n+1)} = \frac{S}{2}.$$

Koska kaikilla näillä kolmella osajonolla on yhteinen raja-arvo $S/2$, se on myös sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ summa. Esimerkissä 6.33 nähtiin, että $S > 1/2$, joten $S \neq S/2$.

Usein vastaan tulee tilanteita, joissa ei haluta tai edes voida spesifioida termien järjestystä. Tällaisia tilanteita varten todistetaan seuraavaksi, ettei Esimerkin 6.34 tapainen anomalia voi esiintyä, jos sarja suppenee itseisesti. Itseisesti suppenevan sarjan termien järjestyksen vaihtaminen on siis luvallista.

its.permut

6.35. Lause. *Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisesti suppeneva sarja ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siitä termien järjestystä vaihtamalla saatu sarja. Tällöin myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenee itseisesti ja sen summa on S.*

TODISTUS: Merkitään osasummia $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ja $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Soveltamalla Cauchy-ehtoa suppenevaan sarjaan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ löydetään sellainen luku $N(\varepsilon)$, että aina, kun $n \geq N(\varepsilon)$ ja $p \geq 1$, niin

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon/2.$$

Termit a_k, $k = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon)$, esiintyvät kukin myös toisessa sarjassa: $a_k = b_{f(k)}$, missä $f : \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{Z}_+$ on järjestyksen vaihtoa kuvaava bijektio. Oletetaan sitten, että n on suurempi kuin mikään luvuista $N(\varepsilon)$, $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(N(\varepsilon))$ ja tutkitaan erotusta $T_n - S_n$. Tässä erotuksessa esiintyy lukuja b_k plusmerkkisinä ja lukuja a_k miinusmerkkisinä. Pari $b_{f(k)} - a_k = a_k - a_k = 0$, kunhan sekä k että $f(k)$ ovat $\leq n$. Erityisesti kaikki termit $a_1, a_2, \ldots, a_{N(\varepsilon)}$ ovat kumoutuneet. Kun kumoutumiset on otettu huomioon, jäljellä on äärellinen määrä termejä $T_n - S_n = \sum(\pm a_\ell)$, missä aina

$\ell > N(\varepsilon)$. Näin ollen voidaan valita luonnollinen luku p siten, että kaikille mukana oleville termeille $\pm a_\ell$ epäyhtälö $\ell \leq N(\varepsilon) + p$ on tosi. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$|T_n - S_n| \leq |a_{N(\varepsilon)+1}| + |a_{N(\varepsilon)+2}| + \cdots + |a_{N(\varepsilon)+p}| < \varepsilon/2.$$

Edelleen

$$|T_n - S| \leq |T_n - S_n| + |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Näin ollen $\lim_{n\to\infty} T_n = S$ ja siis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$. Soveltamalla jo todistettua tulosta sarjaan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nähdään, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ suppenee, joten sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppeneminen on itseistä. □

Tutkitaan luvun lopuksi kahden sarjan kertolaskua. Kurssilla Analyysi I esitettiin tulos, jonka mukaan rationaalilukujen joukko on numeroituva. Tutkimalla sen todistusta näet, että joukko $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ on sekin numeroituva. Näin ollen parit (i, j) voidaan asettaa jonoon.

Olkoot siis $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ kaksi sarjaa. Kutsumme (numeroituvasti äärettömän monen termin) summaa

$$\sum a_i b_j$$

näiden sarjojen *tulosarjaksi*, jos tässä summassa esiintyvät kaikki indeksiparit (i, j) jossakin järjestyksessä.

tulosarja

6.36. Lause. *Oletetaan, että sarjat $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = S$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} b_j = T$ suppenevat itseisesti. Tällöin jokainen tulosarja $\sum a_i b_j$ suppenee itseisesti kohti tuloa ST.*

Todistus: Olkoon $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, missä $c_k = a_{i(k)} b_{j(k)}$, jokin tulosarja. Tutkitaan osasummaa

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} |c_k|.$$

Olkoon N suurin indekseistä $i(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, ja M suurin indekseistä $j(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Tällöin jokainen osasumman U_n termi $|c_k| = |a_{i(k)}| \cdot |b_{j(k)}|$ esiintyy terminä osasummien tulossa $\left(\sum_{i=0}^{N} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{M} |b_j|\right)$. Tämä tulo on $\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\right)$, joten myös

$$U_n \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\right).$$

Kasvava jono U_n on siis ylhäältä rajoitettu. Näin ollen se suppenee eli tulosarja $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ suppenee itseisesti. Täten Lauseen 6.35 nojalla kaikki tulosarjat suppenevat ja niillä on sama summa. Olkoot sitten $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ ja $T_n = \sum_{j=0}^{n} b_j$. Tulosarjassa, jossa on ryhmitelty tulot $a_i b_j$ sen mukaan, miten suuri suurempi indekseistä i ja j on (alla sulut osoittavat ryhmittelyn), ts. sarjassa

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1) + (a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2) + \cdots$$

osasummina esiintyvät tulot S_0T_0, S_1T_1, S_2T_2, ... (aina sulkulausekkeen päättyessä). Kahden suppenevan jonon tulona jono (S_nT_n) suppenee kohti raja-arvoa ST. Koska nämä esiintyivät tässä suppenevan tulosarjan osasummina, myös tulosarjan osasummien jono suppenee kohti samaa raja-arvoa ST. □

Laskennallisesti (etenkin seuraavassa luvussa) kätevin tulosarja on sellainen, jossa tulot a_ib_j ryhmitellään indeksien summan $i + j$ mukaan:

$$a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)+\cdots+(a_nb_0+a_{n-1}b_1+a_{n-2}b_2+\cdots+a_0b_n)+\cdots .$$

Kun kiinnitetään summan arvoksi $i + j = k$, niin indeksin i mahdolliset arvot ovat $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1, k$, ja toinen indeksi j määräytyy yhtälöstä $i+j = k \Leftrightarrow j = k-i$. Näin saadaan itseisesti suppenevien sarjojen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ns. *Cauchyn tulo.*

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}\right).$$

geom.nelio

6.37. Esimerkki. Kun $|x| < 1$, niin geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ suppenee itseisesti ja sen summa $S = 1/(1-x)$. Tämän sarjan Cauchyn tulona sen itsensä kanssa saadaan siten tulos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} x^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} x^i x^{k-i}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k.$$

Siis aina, kun $|x| < 1$, on voimassa kaava

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots .$$

7. Potenssisarjoista

Tämän luvun aluksi tarkastellaan funktiosarjoja, joiden termit ovat (lukujen sijaan) jollakin välillä I määriteltyjä funktioita. Funktiosarjoja kutsutaan usein lyhyesti sarjoiksi.

7.1. Funktiosarjat ja suppeneminen

Ehkä huomasitkin jo Cauchy-tulon määritelmän yhteydessä, että sarjan $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ensimmäinen termi vaikuttaisi olevan 0^0, kun $x = 0$. Aiemmin opittiin, että tämä muoto ei ole hyvin määritelty.

Sarjojen yhteydessä ongelmaa ei kuitenkaan tule, sillä voidaan perustellusti sopia, että sarjassa esiintyvä termi $0^0 = 1$. Toisin sanoen määritellään vakiotermi samaksi x:n arvosta riippumatta, kuten luonnollista on. Toinen tapa käsitellä asia on täydentää funktio $f(x) = x^0$ jatkuvaksi pisteessä nolla. Funktio saa arvon 1 kaikkialla, paitsi (poistuvassa) epäjatkuvuuskohdassaan 0. Näin ollen funktiosta tulee jatkuva, kun määritellään $f(0) = 1$.

Huomaa kuitenkin, että tällaiset sopimukset tai määrittelyt eivät poista sitä tosiasiaa, että 0^0 on epämääräinen muoto. Tämän voit huomata tutkimalla raja-arvoja

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{n\to 0} x^n) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

ja

$$\lim_{n\to 0}(\lim_{x\to 0} x^n) = \lim_{n\to 0} 0 = 0.$$

Kahden muuttujan funktiota $f(x, y) = x^y$ ei nimittäin saada jatkuvaksi pisteessä $(0, 0)$, vaikka sen arvo määriteltäisiin miten tahansa tässä pisteessä.

Jatkossa kuitenkin siis noudatetaan **sopimusta**, että sarjassa esiintyvä termi $0^0 = 1$.

7.1. Määritelmä. Funktioista $w_n : I \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, muodostettu (funktio)sarja

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$$

suppenee pisteittäin joukossa I kohti summafunktiota $S(x)$, jos jokaisessa pisteessä $x \in I$ lasketuista funktioiden arvoista muodostettu lukujen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee kohti raja-arvoa $S(x)$.

Käytetään osasummafunktiosta merkintää

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} w_k(x).$$

Kvanttorikielellä pisteittäinen suppeneminen ilmaistaan seuraavasti:

$$(\forall\, x \in I)(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N = N(x,\varepsilon))(n > N \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon).$$

Kvanttorien kirjoittamisjärjestys pakottaa tulkitsemaan tämän proposition siten, että rajaluku N riippuu toleranssin ε arvon lisäksi myös luvusta x. Tätä on selvyyden vuoksi korostettu kirjoittamalla nämä riippuvuudet näkyviin muodossa $N = N(x, \varepsilon)$.

Olisi varsin mukavaa, mikäli summafunktio $S(x)$ perisi termien $w_n(x)$ hyvät ominaisuudet, kuten integroituvuuden, jatkuvuuden ja derivoituvuuden. Seuraava esimerkki osoittaa, että tämä ei kuitenkaan ole aivan automaattista.

7.2. Esimerkki. Olkoot $w_0(x) = 1 - x$ ja $w_n(x) = x^n - x^{n+1}, n = 1, 2, \ldots$. Tällöin jokainen funktioista $w_n(x)$ on jatkuva ja derivoituva välillä $I = [0, 1]$. Osasummilla on teleskooppirakenne (eli termit kumoavat toisiaan järjestelmällisesti), joten

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} w_k(x) = 1 - x^{n+1}.$$

Tästä nähdään, että sarja suppenee pisteittäin välillä I, ja että summafunktio on

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [0, 1[\\ 0, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Näin ollen summafunktio ei ole jatkuva pisteessä $x = 1$.

Kuten pian nähdään, tämän ongelman alkusyyksi osoittautuu se, että pisteittäisessä suppenemisessa rajaluku $N = N(x, \varepsilon)$ voi hyvin voimakkaasti riippua pisteen x valinnasta. Vaikka kutakin pistettä $x \in I$ kohti löytyykin jokin rajaluku, niin kiinteällä muuttujan ε arvolla rajaluku voidaan joutua valitsemaan mielivaltaisen suureksi, kun x liikkuu välin I sisällä.

geom.ei-tas **7.3. Esimerkki.** Tutkitaan rajaluvun $N = N(x,\varepsilon)$ riippuvuutta pisteestä x välillä $I =]-1,1[$ suppenevan geometrisen sarjan

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

tapauksessa.

Osasumma on tällä kertaa $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, ja sitä vastaava jäännöstermi

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Valitaan testiä varten $\varepsilon = 1/100$. Jos $x = 1/2 \in I$, niin $|R_n(x)| = 1/2^n$, mikä on $< \varepsilon$, kun $n > 6$, joten $N(1/2, 1/100) = 6$. Jos $x = 99/100 \in I$, niin $x^{100} = [1 - (1/100)]^{100} \approx 1/e$. Koska nimittäjä on tällöin $1 - x = 1/100$, saadaan likimääräinen arvio $R_{100k}(99/100) \approx 100e^{-k}$. Jotta tämä olisi itseisarvoltaan $< \varepsilon$, on valittava $k \geq 10$, joten $N(99/100, 1/100) = 1000$. Jos ei vaadita, että $k \in \mathbf{Z}$ ja tehdään tarkka lasku, niin nähdään, että itse asiassa jo $N(99/100, 1/100) = 917$ riittää.

Lisätarkastelut osoittavat, että $N(x, 1/100) \to \infty$ kun $x \to 1-$. Toisin sanoen suppeneminen on sitä hitaampaa, mitä lähempänä lukua 1 liikutaan. Samaan johtopäätökseen viittaa myös se, ettei katkaisuvirhe $R_n(x)$ ole rajoitettu välillä I, sillä $R_n(1 - 1/n) \approx ne$.

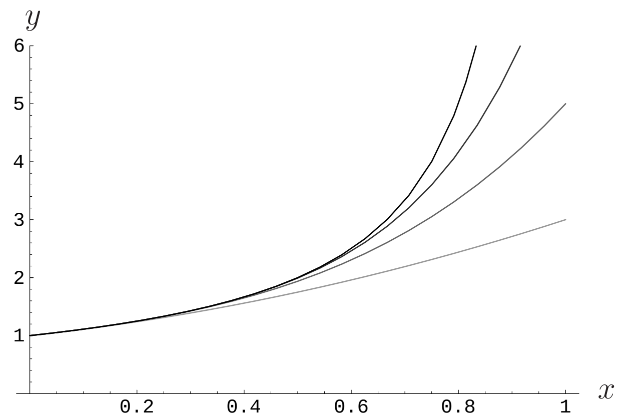
Myös pistettä $x = -1$ oikealta lähestyttäessä rajaluku $N(x,\varepsilon)$ kasvaa rajatta. Tilanne ei siellä ole aivan yhtä paha, koska nimittäjä $1 - x$ ei nyt samalla lähesty nollaa.

Alla olevassa kuvassa näet vielä sarjan $S(x) = 1/(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ summafunktion (musta) sekä osasummafunktiot $S_2(x)$ (vaalein harmaa), $S_4(x)$ ja $S_7(x)$ (tummin harmaa). Sarja ei suppene tasaisesti (ks. seuraava määritelmä).

7.2. Tasainen suppeneminen

Edellisessä esimerkissä osoitettiin, että välillä $]-1,1[$ suppenevaan sarjaan $S(x) = \frac{1}{1-x}$ liittyvä rajaluku $N(x,\varepsilon)$ ei pysy rajoitettuna. Juuri tämä estää tasaisen suppenemisen, kuten seuraavaksi nähdään.

7.4. Määritelmä. Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee *tasaisesti välillä* I kohti summafunktiota $S(x)$, jos kutakin lukua $\varepsilon > 0$ kohti voidaan valita sellainen rajaluku



$N = N(\varepsilon)$, että katkaisuvirhe $|R_n(x)| < \varepsilon$ välin I jokaisessa pisteessä x, kun $n > N$. Kvanttorikielellä tämä ilmaistaan ehtona

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N = N(\varepsilon))(\forall\, x \in I)(n > N \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon).$$

Tasaisesta suppenemisesta käytetään merkintää $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \downarrow$ (tasaisesti I).

7.5. Huomautus. Kvanttorikielessä eksistenssi- tai universaalikvanttorin yhteydessä esiintyminen *sitoo* muuttujan, ja esiintymisjärjestys määrää sitomisjärjestyksen. Niinpä pisteittäisessä suppenemisessa ensin kiinnitetään muuttujan $x \in I$ arvo, sitten muuttujan $\varepsilon > 0$, ja sen jälkeen kysytään löytyykö sopivaa rajalukua, joka toteuttaa implikaation näillä kiinteillä arvoilla. Tällöin rajaluku saa riippua aikaisemmin kiinnitetyistä muuttujien arvoista. Tasaisessa suppenemisessa taas kiinnitetään ensin ε, ja sen jälkeen kysytään löytyykö sopivaa rajalukua, jolle vaadittu implikaatio toteutuisi *kaikilla* muuttujan x arvoilla. Ennen eksistenssikysymyksen ilmaantumista on tällöin kiinnitetty ε, joten rajaluku saa edelleen riippua muuttujan ε arvosta.

Ero pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen välillä ei ole siinä, että pisteittäisessä suppenemisessa paras mahdollinen rajaluku $N(x, \varepsilon)$ riippuisi luvun $x \in I$ arvosta. Suppenemistarkasteluissa ei koskaan varsinaisesti välitetä siitä, mikä paras mahdollinen rajaluvun arvo olisi. Ero syntyy sen sijaan siitä (kuten Esimerkissä 7.3), että pisteittäisessä suppenemisessa voi käydä niin, että jollakin muuttujan ε arvolla rajaluku $N(x, \varepsilon)$ ei ole muuttujan x funktiona rajoitettu välillä I.

Seuraava esimerkki tuo hieman lisävalaistusta pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen väliseen eroon.

geom.tas **7.6. Esimerkki.** Valitaan luku $a \in]0,1[$. Rajoitetaan Esimerkin 7.3 tarkastelu suljetulle välille $I_a = [-a, a]$. Osoitetaan, että välillä I_a sarjan

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

suppeneminen on tasaista.

Jäännöstermi $R_n(x)$ laskettiin jo Esimerkin 7.3 yhteydessä, joten sen itseisarvo on $|R_n(x)| = |x^{n+1}|/(1-x)$. Välillä I_a osoittaja saa suurimman arvonsa pisteissä $x = \pm a$ ja nimittäjä pienimmän arvonsa pisteessä $x = a$, joten on voimassa arvio

$$|R_n(x)| \le \frac{a^n}{1-a}, \qquad \text{kun } x \in I_a.$$

Kun $n > \log((1-a)\varepsilon)/\log a = N(\varepsilon)$, niin $a^n/(1-a) < \varepsilon$, ja näin ollen myös $|R_n(x)| < \varepsilon$ koko välillä I_a.

jtas->jatk **7.7. Lause.** *Jos funktiot $w_n(x)$ ovat jatkuvia välillä I ja sarja*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$$

suppenee tasaisesti välillä I, niin tällöin summafunktio $S(x)$ on jatkuva välillä I.

Todistus: Kiinnitetään piste $x_0 \in I$ ja muuttujan $\varepsilon > 0$ arvo. Tasaisen suppenemisen nojalla on olemassa sellainen luku $N(\varepsilon)$, että kaikilla $x \in I$ on voimassa arvio

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{kun } n > N(\varepsilon).$$

Olkoon sitten n jokin lukua $N(\varepsilon)$ suurempi kokonaisluku. Osasummafunktio $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} w_n(x)$ on äärellisen monen jatkuvan funktion summana jatkuva pisteessä x_0. Näin ollen on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Oletetaan nyt, että $|x - x_0| < \delta$. Kolmioepäyhtälön nojalla nähdään, että tällöin

$$\begin{aligned}
|S(x) - S(x_0)| &= |(S(x) - S_n(x)) + (S_n(x) - S_n(x_0)) + (S_n(x_0) - S(x_0))| \\
&\le |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Koska ε oli mielivaltainen, funktion $S(x)$ jatkuvuus pisteessä x_0 on todistettu. □

Esimerkin 7.6 tilanne yleistyy käyttökelpoisella tavalla, kun sarjan termeille löydetään sellaiset koko tarkasteluvälillä voimassa olevat ylärajat, että ylärajojen muodostama (numeerinen) sarja suppenee.

M-testi

7.8. Lause (Weierstrassin M-testi). *Oletetaan, että positiiviterminen sarja* $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ *suppenee. Jos kaikilla välin* I *pisteillä* x *on voimassa arvio*

$$|w_n(x)| \leq M_n,$$

kun $n \geq n_1 \in \mathbf{N}$, *niin sarja*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$$

suppenee tasaisesti välillä I. *Suppeneminen on lisäksi itseistä jokaisessa pisteessä* $x \in I$.

Todistus: Majoranttiperiaatetta soveltamalla nähdään, että sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee pisteittäin itseisesti.

Oletetaan, että $n \geq n_1$ ja kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Soveltamalla Cauchy-ehtoa 6.13 sarjaan $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ löydetään sellainen luku n_2, että kaikilla $p \in \mathbf{Z}_+$ on voimassa epäyhtälö $\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$, kun $n \geq n_2$. Antamalla tässä $p \to \infty$ saadaan majoroivan sarjan jäännöstermeille arvio $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \leq \varepsilon$.

Oletetaan sitten, että $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Tällöin jokaisella $x \in I$

$$\begin{aligned} |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k(x) \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |w_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Suppeneminen on siis tasaista. □

7.9. Esimerkki. Esimerkin 7.6 tulos voidaan perustella vielä uudelleen käyttämällä Weierstrassin M-testiä. Kun $a \in]0, 1[$, niin itseisesti suppeneva sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ majoroi geometrista sarjaa $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ välillä $I_a = [-a, a]$, joten geometrisen sarjan suppeneminen on tällä välillä tasaista.

7.10. Esimerkki. Osoitetaan, että sarja

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

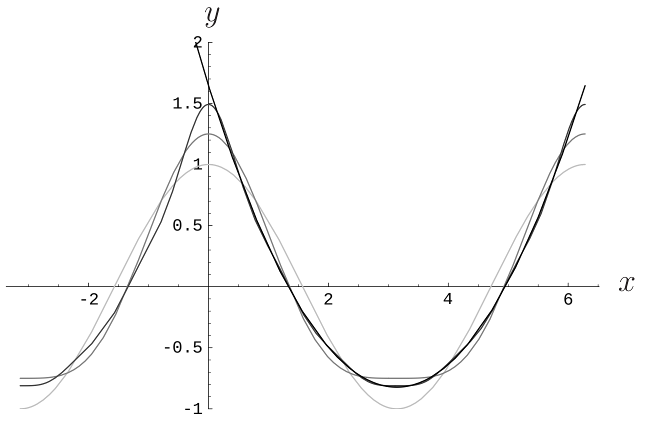
suppenee tasaisesti koko reaalisuoralla $I =]-\infty, \infty[$, ja että summafunktio $S(x)$ on kaikkialla jatkuva.

Funktiot $w_k(x) = k^{-2}\cos kx, k = 1, 2, \ldots$, ovat kaikki jatkuvia. Koska selvästi epäyhtälö $|w_k(x)| \leq 1/k^2$ on voimassa kaikilla $x \in \mathbf{R}$, ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ suppenee, niin Weierstrassin M-testin nojalla sarja $S(x)$ suppenee tasaisesti välillä $I = \mathbf{R}$. Summafunktio $S(x)$ on siten kaikkialla jatkuva Lauseen 7.7 nojalla.

Koska kaikilla funktioilla $w_k(x), k = 1, 2, \ldots$, on yhteisenä jaksona 2π, identiteetin $S(x + 2\pi) = S(x)$ on oltava voimassa kaikkialla. Jaksollisten funktioiden analyysiin keskittyvän *Fourier-sarjojen* teorian avulla voidaan todistaa, että välillä $x \in [0, 2\pi]$ on voimassa yhtälö

$$S(x) = \frac{3(x-\pi)^2 - \pi^2}{12}. \tag{$*$}$$

Yhtälö ei selvästikään voi olla voimassa tämän välin ulkopuolella, koska oikealla puolella oleva polynomi ei ole jaksollinen. Kuvassa alla on esitetty sarjan $S(x)$ eräitä osasummafunktioita sekä yhtälön $(*)$ oikean puolen polynomin kuvaaja. Tarkemmin sanoen kuvassa ovat sarjan $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\cos kx$ osasummafunktiot $S_1(x)$ (vaalein harmaa), $S_2(x)$ ja $S_6(x)$ (tummin harmaa). Sarja suppenee tasaisesti. Mustalla piirrettynä on paraabeli, joka yhtyy summafunktioon $S(x)$ välillä $[0, 2\pi]$, kuten nähtiin.



jtas->int

7.11. Lause. *Oletetaan, että funktiot $w_n(x)$ ovat välillä $I = [a, b]$ jatkuvia, ja että sarja $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee tasaisesti tällä välillä. Tällöin sarja voidaan* *integroida termeittäin eli*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b w_n(x)\,dx. \tag{†}$$

Erityisesti siis yhtälön (†) oikealla puolella oleva sarja suppenee.

Todistus: Summafunktio $S(x)$ on jatkuva välillä I Lauseen 7.7 nojalla. Näin ollen se on myös integroituva välillä I. Sama koskee myös osasummafunktioita $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} w_k(x)$. Kiinnitetään luku $\varepsilon > 0$. Suppenemisen tasaisuuden nojalla on olemassa sellainen luku n_1, että

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{kaikilla } x \in I,$$

kun $n > n_1$.

Tästä saadaan arvio

$$\left| \int_a^b S - \int_a^b S_n \right| \le \int_a^b |S(x) - S_n(x)|\,dx \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon,$$

kun $n > n_1$. Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Integraalin lineaarisuuden vuoksi tässä

$$\int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} w_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b w_k(x)\,dx,$$

joten osasummafunktion $S_n(x)$ määrätty integraali on yhtälön (†) oikean puolen sarjan n:s osasumma. Väite seuraa. □

Lauseen todistus on analoginen (ilmeisin muunnoksin) myös siinä tapauksessa, että $b < a$ ja suppeneminen on tasaista välillä $[b, a]$.

7.12. Huomautus. Lauseessa 7.11 oletus tasaisesta suppenemisesta on välttämätön. Monomin $x^k, k \in \mathbf{N}$, integraali välin $[0,1]$ yli on $1/(k+1)$. Sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ integroiminen termeittäin siis epäonnistuu, koska sarja $\sum_{k=0}^{\infty} 1/(k+1)$ hajaantuu. Toisaalta on helposti todettavissa (harjoitustehtävä), että summafunktion epäoleellinen integraali $\int_0^1 1/(1-x)\,dx$ hajaantuu sekin.

log sarja

7.13. Esimerkki (logaritmifunktion sarjakehitelmä). Osoita, että kun $x \in]-1,1]$, niin

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.$$

Oletetaan ensin, että $x \in]-1,1[$. Valitaan $a \in]0,1[$ siten, että $|x| < a$. Tällöin Esimerkin 7.6 perusteella (sijoitetaan siellä x:n paikalle $-x$) sarja $1/(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ suppenee tasaisesti välillä $I = [0,x]$ (tai välillä $I = [x,0]$, jos $x < 0$). Lauseen 7.11 nojalla identiteetti

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

voidaan siis integroida puolittain yli välin I, ja oikean puolen sarja voidaan integroida termeittäin:

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},$$

mistä saadaan väiteyhtälön oikean puolen sarja sijoittamalla $k = n+1$. Näin ollen väite on todistettu, kun $x \in]-1,1[$.

Tutkitaan sitten sarjaa

$$L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

välillä $I_2 = [0,1]$. Tällä välillä sarja on selvästi vuorotteleva. Sen kahden peräkkäisen termin itseisarvojen suhde on

$$\frac{x^{k+1}/(k+1)}{x^k/k} = \frac{kx^{k+1}}{(k+1)x^k} = \frac{kx}{k+1} < x \leq 1,$$

joten aina $x^{k+1}/(k+1) \leq x^k/k$. Lisäksi $0 \leq x^k/k \leq 1/k$, joten $x^k/k \to 0$, kun $k \to \infty$. Sarja täyttää siis Leibnizin lauseen 6.31 ehdot koko välillä. Näin ollen sen jäännöstermiä voidaan arvioida

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Tämä on $< \varepsilon$, kun n on tarpeeksi suuri, joten sarja $L(x)$ suppenee tasaisesti välillä I_2. Näin ollen $L(x)$ on Lauseen 7.7 nojalla jatkuva välillä I_2. Toisaalta myös funktio $\log(1+x)$ on jatkuva välillä I_2. Näin ollen

$$\log 2 = \log(1+1) = \lim_{x \to 1-} \log(1+x) = \lim_{x \to 1-} L(x) = L(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Sarjan $L(x)$ summa on siis $\log(1+x)$ myös pisteessä $x = 1$. Esimerkin 6.33 väite

$$\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

on näin tullut todistetuksi.

Tasaisen suppenemisen ja derivoituvuuden välistä suhdetta käsittelevä tulos on työläämmin ilmaistavissa. Tämä on itse asiassa Lauseelle 7.11 käänteinen tulos, joten tällä kertaa tullaan vaatimaan, että *termeittäin derivoitu sarja suppenee tasaisesti.*

tas-der **7.14. Lause.** *Oletetaan, että*

(i) termit $w_n(x)$ ovat derivoituvia välillä I, ja derivaatat $w_n'(x)$ ovat jatkuvia kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$,

(ii) sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x_0)$ suppenee ainakin yhdessä pisteessä $x_0 \in I$, ja

(iii) sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n'(x)$ suppenee tasaisesti välillä I.

Tällöin sarja $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee koko välillä I. Lisäksi summafunktio on derivoituva välillä I, ja derivaatta saadaan derivoimalla sarja termeittäin:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n'(x).$$

Todistus: Lauseiden 7.7 ja 7.11 mukaan funktio $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n'(t)$ on välillä I jatkuva ja integroituva, ja kaikille $x \in I$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} w_n'(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(w_n(x) - w_n(x_0)\right),$$

missä viimeisenä esiintyvä sarja suppenee. Oletuksen (ii) mukaan sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x_0)$ suppenee, joten Seurauksen 6.10 nojalla myös sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee, ja edelleen $F(x) = S(x) - S(x_0)$. Analyysin peruslauseen perusteella lopulta

$$S'(x) = F'(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n'(x).$$

□

geom.der **7.15. Esimerkki.** Selvitetään nyt, miksi sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ derivoiminen termeittäin on luvallista välillä $I =]-1, 1[$.

Lauseen 7.14 ehdoista ainoastaan kolmatta ei ole selvitetty aikaisemmin. Kiinnitetään $x \in I$ ja valitaan $a \in]0, 1[$ siten, että $a > |x|$. Tutkitaan termeittäin derivoimalla saatua sarjaa

$$D(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

pisteessä a. Tässä kahden peräkkäisen termin suhde

$$\frac{(k+1)a^k}{ka^{k-1}} = \frac{(k+1)a}{k} \to a,$$

kun $k \to \infty$, joten osamäärätarkastimen nojalla sarja $D(a)$ suppenee itseisesti. Selvästi sarja $D(a)$ majoroi sarjaa $D(x)$ välillä $x \in I_a = [-a, a]$, joten Weierstrassin M-testin perusteella (Lause 7.8) sarja $D(x)$ suppenee tasaisesti välillä I_a. Lauseen 7.14 nojalla sitten

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

kaikissa välin I_a pisteissä x. Varioimalla lukua a nähdään, että sama tulos pitää paikkansa kaikilla $x \in]-1, 1[$.

Aiemmassa Esimerkissä 6.37 päädyimme samaan tulokseen toista menetelmää (Cauchyn tuloa) käyttäen.

7.3. Eksponenttifunktion sarja

Tässä pykälässä tutkimme intensiivisesti sarjaa

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

Kuten Esimerkissä 6.29 osamäärätarkastimen avulla jo nähtiin, sarja $E(x)$ suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Merkitään sarjan $E(x)$ yleistä termiä $w_n(x) = x^n/n!$, $n \in \mathbf{N}$. Jos $a > 0$, niin $w_n(a) \geq |w_n(x)|$ kaikilla $x \in I_a = [-a, a]$. Koska sarja $E(a)$ suppenee, niin Weierstrassin M-testin nojalla sarja $E(x)$ suppenee tasaisesti välillä I_a. Näin ollen summafunktio $E(x)$ on jatkuva koko $\mathbf{R}$:ssä.

Derivoimalla huomaamme, että $w_0'(x) = 0$ ja $w_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{n!} = w_{n-1}(x)$. Näin ollen termeittäin derivoimalla saatu sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{n-1}(x) = E(x),$$

mikä suppenee aiemmin nähdyn perusteella tasaisesti välillä I_a. Näin ollen Lauseen 7.14 perusteella funktio $E(x)$ on derivoituva jokaisella välillä I_a (toisin sanoen kaikkialla) ja se on itsensä derivaatta:

$$E'(x) = E(x) \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}.$$

Koska lisäksi selvästi $E(0) = 1$, alkaa näyttää vahvasti siltä, että funktio $E(x)$ jakaa useita ominaisuuksia funktion e^x kanssa (Analyysi I). Tässä pykälässä osoitetaan, että näin tosiaan on. Tämän jälkeen voidaankin *määritellä*

$$e^x := E(x).$$

Jatkuvuus ja derivoituvuus todettiin jo. Lisäksi osoitettiin, että kyseinen funktio on itsensä derivaatta. Muita ominaisuuksia varten johdetaan ensin seuraava tulos.

`exp.id` **7.16. Lemma** (Eksponenttifunktion identiteetti). *Kaikilla reaaliluvuilla x, y on voimassa*

$$E(x)E(y) = E(x+y).$$

Todistus: Sarjat $E(x)$ ja $E(y)$ suppenevat itseisesti, joten binomikaavaa kriittisessä kohdassa käyttäen niiden Cauchyn tuloksi tulee

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}\,\frac{y^{k-i}}{(k-i)!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k!}\,\frac{k!}{i!(k-i)!}\,x^i y^{k-i}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i y^{k-i}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,(x+y)^k = E(x+y).
\end{aligned}$$

□

Valitsemalla tässä $y = -x$ saadaan seurauksena, että kaikilla $x \in \mathbf{R}$ on voimassa yhtälö

$$E(x)E(-x) = E(x-x) = E(0) = 1.$$

Näin ollen jokaisella $x \in \mathbf{R}$ on voimassa $E(x) \neq 0$, sillä muuten olisikin $E(x)E(-x) = 0 \cdot E(-x) = 0 \neq 1$. Edelleen voidaan päätellä, että $E(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Jos nimittäin jossakin pisteessä x_0 olisikin $E(x_0) < 0$, niin funktion $E(x)$ jatkuvuuden, havainnon $E(0) = 1$ ja Bolzanon lauseen nojalla lukujen 0 ja x_0 välissä olisi funktion $E(x)$ nollakohta. Kuten juuri nähtiin, ei nollakohtia ollut, joten päädytään ristiriitaan, ja $E(x)$ saa siis pelkästään positiivisia arvoja.

Jos $x > 0$, niin jokainen termeistä $w_n(x)$ on positiivinen. Näin ollen sarjan $E(x)$ osasummien jono on kasvava. Erityisesti siis

$$x > 0 \Rightarrow E(x) > w_0(x) + w_1(x) = 1 + x,$$

joten

$$\lim_{x\to\infty} E(x) = \infty.$$

Jatkuvan funktion väliarvolauseen perusteella funktio $E(x)$ saa siis kaikki arvot $y \in [1, \infty[$, kun $x \geq 0$. Toisaalta $E(-x) = 1/E(x)$, joten

$$\lim_{x\to-\infty} E(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{E(x)} = 0.$$

Näin ollen funktio $E(x)$ saa kaikki arvot $y \in]0,1]$, kun $x \leq 0$. Koska $E'(x) = E(x) > 0$, funktio $E(x)$ on kaikkialla aidosti kasvava ja siis bijektio $E : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $x \mapsto E(x)$. Erityisesti sillä on bijektiivinen käänteiskuvaus $L : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. Esitetään yhteenveto näistä havainnoista seuraavassa lauseessa.

exp.omin **7.17. Lause.** *Sarja*

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

määrittelee bijektiivisen, aidosti kasvavan funktion $E : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, jolle $E(0) = 1$. Funktio $E(x)$ on kaikkialla derivoituva, ja $E'(x) = E(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Funktiolla $E(x)$ on käänteisfunktio $L : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. Kaikilla $x, y \in \mathbf{R}, u, v \in \mathbf{R}_+$ on voimassa

$$E(x)E(y) = E(x+y), \qquad L(uv) = L(u) + L(v).$$

Lisäksi myös funktio $L(x)$ on derivoituva, ja $L'(x) = 1/x$ kaikilla $x > 0$.

TODISTUS: Ainoastaan funktiota $L(x)$ koskevia väitteitä ei vielä todistettu. Sen derivoituvuus ja derivaatan lauseke seuraavat yleisistä käänteisfunktioiden derivoituvuutta koskevista tuloksista (Analyysi I). Olkoon siis $u > 0$. Valitaan $x \in \mathbf{R}$ siten, että $E(x) = u$. Tällöin $E'(x) = E(x) \neq 0$, joten käänteisfunktio $L(x)$ on derivoituva pisteessä u, ja derivaatta on

$$L'(u) = L'(E(x)) = 1/E'(x) = 1/E(x) = 1/u.$$

Jos luvut u ja v ovat positiivisia, niin $u = E(x)$ ja $v = E(y)$ joillakin (yksikäsitteisillä) muuttujien $x, y \in \mathbf{R}$ valinnoilla. Tällöin $uv = E(x)E(y) = E(x+y)$, joten käänteisfunktio-ominaisuuden nojalla

$$L(uv) = L(E(x+y)) = x + y = L(u) + L(v).$$

□

7.18. Lause. *Lauseessa 7.17 luetellut ominaisuudet määräävät funktion $E(x)$ yksikäsitteisesti.*

TODISTUS: Oletetaan, että $F(x)$ olisi jokin toinen funktio, joka toteuttaa ehdot $F(0) = 1$ ja $F(x) = F'(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Tällöin osamäärän derivoimissäännön mukaan kaikilla $x \in \mathbf{R}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{E(x)}\right) = \frac{F'(x)E(x) - F(x)E'(x)}{E(x)^2} = \frac{F(x)E(x) - F(x)E(x)}{E(x)^2} = 0.$$

Integraalilaskennan peruslauseen mukaan tällöin funktio $F(x)/E(x)$ on vakio C. Koska $F(0)/E(0) = 1$, niin $C = 1$. Siis $F(x) = E(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. □

7.19. Määritelmä. Määritellään eksponenttifunktio e^x ja sen käänteisfunktio $\log y$ kaikille $x \in \mathbf{R}$, $y > 0$ asettamalla

$$e^x = E(x) \qquad \text{ja} \qquad \log y = L(y).$$

Jos $a > 0$, $a \neq 1$, määritellään

$$a^x = E(xL(a)) \qquad \text{ja} \qquad \log_a(y) = \frac{L(y)}{L(a)}.$$

Todistetaan vielä seuraava pieni yksityiskohta.

7.20. Lause.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = E(1) = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

TODISTUS: Binomikaavan avulla nähdään, että kun $n > k > 0$, niin

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!n^i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!n^i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n^i} \\
&\geq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n^i}.
\end{aligned}$$

Kiinnitetään hetkeksi k ja annetaan luvun n kasvaa rajatta. Tällöin kaikilla $i = 0, 1, 2, \ldots, k$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n^i} = \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n} \to 1,$$

kun $n \to \infty$. Siirtymällä raja-arvoihin saadaan epäyhtälö

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{k} w_i(1).$$

Tämä epäyhtälö on voimassa olipa parametrilla k mikä positiivinen kokonaislukuarvo tahansa. Antamalla sitten $k \to \infty$ saadaan raja-arvona tulos

$$e \geq \sum_{i=0}^{\infty} w_i(1) = E(1).$$

Toisaalta, kun katkaistaan positiiviterminen sarja $E(1/n)$ kahden termin jälkeen, nähdään, että kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ on voimassa

$$E(1/n) \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

Korottamalla tämä yhtälö puolittain n. potenssiin ja soveltamalla identiteettiä $E(x)^n = E(nx)$ (todistus harjoitustehtävä) saadaan

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq E(1/n)^n = E(n \cdot (1/n)) = E(1).$$

Ottamalla tässä puolittain raja-arvo $n \to \infty$ saadaan käänteinen epäyhtälö

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq E(1).$$

Molemmat epäyhtälöt voivat olla samanaikaisesti voimassa vain, jos $E(1) = e$. □

7.4. Potenssisarjojen perusominaisuuksia

Oletetaan, että $a_0, a_1, \ldots$ ovat reaalisia vakioita, ja kiinnitetään $x_0 \in \mathbf{R}$.

7.21. Määritelmä. Muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots$$

olevaa sarjaa sanotaan x_0-*keskiseksi potenssisarjaksi.*

Tekemällä tässä muunnos $t = x - x_0$ saadaan 0-keskinen potenssisarja $\sum_n a_n t^n$. Teoreettisissa tarkasteluissa voidaan siis aina palauttaa tarkastelu tilanteeseen $x_0 = 0$.

Potenssisarja $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ selvästi suppenee vakioiden $a_n, n \in \mathbf{N}$ arvoista riippumatta, kun $x = 0$.

7.22. Määritelmä. Jos sarja suppenee jollakin välillä I ja sen summa on $S(x)$, kun $x \in I$, sanotaan, että potenssisarja *esittää funktiota $S(x)$ välillä I.*

Aiemman perusteella siis esimerkiksi potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ esittää funktiota $1/(1-x)$ välillä $]-1,1[$, potenssisarja $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n/n$ funktiota $\log(1+x)$ välillä $]-1,1]$, ja potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ funktiota e^x välillä $]-\infty,\infty[$.

Edellä suppenemisväli on (mahdollisesti päätepisteitä lukuun ottamatta) symmetrinen potenssisarjan keskipisteen suhteen. Seuraavaksi osoitetaan, että näin käy aina.

PSlemma **7.23. Lemma.** *Oletetaan, että potenssisarja*

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

suppenee pisteessä $x = c \neq 0$. Tällöin sarja $S(x)$ suppenee itseisesti pisteessä x, kun $|x| < |c|$. Jos kiinnitetään luku a, $0 < a < |c|$, niin sarjan $S(x)$ suppeneminen on tasaista välillä $I_a = [-a,a]$.

Todistus: Oletuksen perusteella $S(c) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ suppenee. Hajaantumistarkastimen nojalla $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$. Suppeneva jono on rajoitettu, joten on olemassa sellainen vakio $K > 0$, että $|a_n c^n| \leq K$ kaikilla indeksin $n \in \mathbf{N}$ arvoilla.

Kiinnitetään sitten luku x, joka toteuttaa ehdon $|x| < |c|$. Merkitään $q = |x|/|c|$, jolloin $0 < q < 1$. Tällöin

$$|a_n x^n| = |a_n c^n| \cdot \frac{|x|^n}{|c|^n} = |a_n c^n| q^n \leq K q^n.$$

Suppeneva geometrinen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} K q^n$ siis majoroi sarjaa $S(x)$, joten $S(x)$ suppenee itseisesti majoranttiperiaatteen seurauksena.

Jos $a \in]0,|c|[$, niin kaikilla $n \in \mathbf{N}$ ja kaikilla $x \in I_a$ on voimassa epäyhtälö $|a_n x^n| \leq |a_n a^n|$. Itseisesti suppeneva sarja $S(a)$ siis majoroi sarjaa $S(x)$ välillä $x \in I_a$, joten Weierstrassin M-testin perusteella sarja $S(x)$ suppenee tasaisesti välillä I_a. □

PSvali **7.24. Lause.** *Sarjan $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenemisella on seuraavat kolme toisensa poissulkevaa mahdollisuutta.*

(i) Sarja $S(x)$ hajaantuu, kun $x \neq 0$.

(ii) Sarja $S(x)$ suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

(iii) On olemassa yksikäsitteinen sellainen luku $R > 0$, että

$$|x| < R \Rightarrow S(x) \downarrow \qquad \textit{ja} \qquad |x| > R \Rightarrow S(x) \uparrow .$$

TODISTUS: Tutkitaan joukkoa $S = \{|x| \neq 0 \mid S(x) \downarrow\}$. Jos vaihtoehto (i) ei toteudu, niin joukko S on epätyhjä. Jos joukko S ei ole ylhäältä rajoitettu, niin kutakin lukua $x \in \mathbf{R}$ kohti on olemassa sellainen $|c| \in S$, että $|x| < |c|$. Joukon S määritelmän perusteella tässä $S(c) \downarrow$, joten Lemman 7.23 mukaan myös $S(x)$ suppenee. Tällöin vaihtoehto (ii) toteutuu.

Jäljelle jää tapaus, jossa joukko S on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu. Merkitään $R = \sup S$. Jos $|x| < R$, niin $|x|$ ei ole joukon S yläraja. On siis olemassa sellainen luku c, että $|c| > |x|$ ja $S(c) \downarrow$. Lemman 7.23 perusteella nyt $S(x) \downarrow$. Jos taas $|x| > R$, niin sarja $S(x)$ hajaantuu, sillä muutoin $|x| \in S$, eikä R olisikaan joukon S yläraja.

□

7.25. Määritelmä. Lauseessa 7.24 tapauksessa (iii) esiintyvää lukua R kutsutaan potenssisarjan $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *suppenemissäteeksi.* Tapauksessa (i) sanotaan, että $R = 0$ ja tapauksessa (ii) vastaavasti $R = \infty$.

Väliä $]-R, R[$ sanotaan sarjan $S(x)$ *suppenemisväliksi.* Jos sarjan $S(x)$ suppenemisväli on $]-R, R[$, niin vastaavan x_0-keskisen sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ suppenemisväli on $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Jos x on potenssisarjan suppenemisvälillä, niin sarja $S(x)$ suppenee itseisesti. Lisäksi potenssisarja voi supeta joko molemmissa, toisessa tai ei kummassakaan suppenemisvälin päätepisteistä. Esimerkkeinä näistä tilanteista käyvät sarjat $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$, joiden kaikkien suppenemisväli on $]-1, 1[$.

Koska potenssisarjan suppeneminen on tasaista millä tahansa suppenemisväliin sisältyvällä suljetulla välillä, niin potenssisarjan integroiminen termeittäin yli tällaisen välin on aina luvallista (Lause 7.11). Termeittäistä derivointia varten tarvitaan sen sijaan vielä yksi aputulos.

7.26. Lemma. *Potenssisarjoilla*

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \textit{ja} \qquad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

on sama suppenemissäde.

TODISTUS: Oletetaan ensin, että sarjan $A(x)$ suppenemissäde $R = R_A > 0$. Olkoon sitten $x \in \mathbf{R}$ luku, joka toteuttaa ehdon $0 < |x| < R$. Valitaan luku c siten, että $|x| < c < R$ ja merkitään $q = |x|/c$. Tällöin

$$|na_n x^{n-1}| = \frac{1}{|x|}\,|a_n c^n| n \left(\frac{|x|}{c}\right)^n .$$

Tässä jonossa tekijä $|1/x| \cdot |a_n c^n|$ on rajoitettu (muuttujan n funktiona), koska soveltamalla hajaantumistarkastinta suppenevaan sarjaan $A(c)$ saadaan $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$. On siis olemassa sellainen luku $K > 0$, että kaikille $n \in \mathbf{N}$

$$|na_n x^{n-1}| \leq Knq^n.$$

Koska $0 < q < 1$, sarja $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = q\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$ suppenee itseisesti Esimerkin 7.15 perusteella. Majoranttiperiaatteen nojalla sarja $B(x)$ suppenee. Näin ollen sarjan $B(x)$ suppenemissäde $R_B \geq |x|$. Tämä päätelmä voidaan tehdä aina, kun $|x| < R$, joten $R_B \geq R$.

Jos taas $R_B > 0$, niin Lemman 7.23 nojalla $B(x)$ suppenee tasaisesti kaikilla väleillä $[-a, a]$, $a < R_B$. Olkoon x mielivaltainen ehdon $|x| < R_B$ toteuttava luku. Valitsemalla a väliltä $|x| < a < R_B$ nähdään Lauseen 7.11 nojalla, että sarja $A(x)$ suppenee (koska se saatiin integroimalla tasaisesti suppeneva sarja termeittäin). Näin ollen $R_A \geq |x|$. Koska tämä päättely voitiin tehdä aina, kun $|x| < R_B$, saadaan epäyhtälö $R_A \geq R_B$.

Olemme todistaneet, että $R_B \geq R_A$ aina, kun $R_A > 0$, ja että $R_A \geq R_B$ aina, kun $R_B > 0$. On siis mahdotonta, että vain toinen suppenemissäteistä olisi nolla, tai että vain toinen niistä olisi ääretön. Lisäksi näistä epäyhtälöistä seuraa, että molempien suppenemissäteiden ollessa äärellisiä ja positiivisia niiden on pakko yhtyä. □

Yhdistämällä kaikki yllä olevat tulokset saadaan potenssisarjojen teorian päätulos.

PSlause **7.27. Lause.** *Oletetaan, että potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenemissäde $R > 0$. Sen summafunktio $S(x)$ on välillä $x \in\,]-R, R[$*

(i) jatkuva,

(ii) integroituva, ja jos lisäksi $[a, b] \subset\,]-R, R[$, niin

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_n x^n\,dx\right),$$

(iii) derivoituva, ja

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Erityisesti siis termeittäin integroimalla tai derivoimalla saadut potenssisarjat suppenevat itseisesti kaikilla $x \in]-R, R[$. Lisäksi suppeneminen on tasaista jokaisella välillä $[-a, a], a < R$.

7.28. Huomautus. Huomaa, että mikään näistä tuloksista ei kerro mitään siitä, mitä tapahtuu suppenemisvälin päätepisteissä ($x = \pm R$).

PSyl.termi

7.29. Seuraus. *Potenssisarjan $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ summafunktiolla on sarjan suppenemisvälillä $]-R, R[$ jokaisella $n \in \mathbf{N}$ n. kertaluvun derivaatta $S^{(n)}(x)$ ja*

$$a_n = \frac{1}{n!} S^{(n)}(0).$$

TODISTUS: Sovelletaan Lauseen 7.27 kohtaa (*iii*) n kertaa ja sijoitetaan sen jälkeen $x = 0$. $\square$

7.30. Lause (Potenssisarjojen identtisyyslause)**.** *Jos jossakin origon ympäristössä $]-\delta, \delta[$ on*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

niin $a_n = b_n$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

TODISTUS: Jos näiden kahden potenssisarjan yhteinen summafunktio välillä $x \in]-\delta, \delta[$ on $S(x)$, niin Seurauksen 7.29 mukaan kaikille $n \in \mathbf{N}$

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = b_n.$$

$\square$

Suppenevien potenssisarjojen kesken voidaan tehdä peruslaskutoimituksia. Huomaa, että kahden (samankeskisen) potenssisarjan Cauchyn tulo on edelleen potenssisarja, koska siinä termejä ryhmiteltäessä ryhmän sisällä $i + j = k$ on vakio, joten termit $a_i x^i b_j x^j = a_i b_j x^{i+j}$ ovat kaikki keskenään samaa astetta.

7.31. Lause. *Oletetaan, että potenssisarjojen $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ja $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ suppenemissäteet ovat R_S ja R_T. Tällöin potenssisarjat*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

ja Cauchyn tulo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$$

kaikki suppenevat (ainakin) välillä $x \in]-R, R[$, missä $R = \min\{R_T, R_S\}$, ja esittävät funktioita $S(x) \pm T(x)$, $S(x)T(x)$ tällä välillä.

TODISTUS: Summan ja erotuksen tapauksessa väite seuraa Lauseesta 6.10. Tulon tapauksessa vedotaan Lauseeseen 6.36. □

7.32. Esimerkki. Määritetään sarjojen $1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ja $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ Cauchyn tulon $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ kertoimet $c_k, k = 0, 1, 2, 3$. Tutkitaan lisäksi, mitä voidaan sanoa potenssisarjan $P(x)$ suppenemissäteestä.

Tällä kertaa $a_n = 1$ ja $b_n = 1/n!$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Cauchyn tulon kertoimiksi saadaan siten

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0 && = 1, \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 && = 1 + 1 = 2, \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 && = \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{2}, \\
c_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 && = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{8}{3}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Siis

$$P(x) = 1 + 2x + \frac{5}{2} x^2 + \frac{8}{3} x^3 + \cdots$$

Koska molemmat tekijäsarjat suppenevat välillä $x \in I =]-1,1[$, niin myös sarja $P(x)$ suppenee tällä välillä.

Kahden samankeskisen potenssisarjan osamäärä on sen sijaan pulmallisempi käsite. Tämä johtuu siitä, ettei ole lainkaan selvää voidaanko välillä $]-R,R[$ suppenevan potenssisarjan esittämän funktion $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ käänteislukujen antamaa funktiota $1/S(x)$ ylipäätään esittää suppenevana 0-keskisenä potenssisarjana. Joissakin tilanteissa on ilmeistä, että näin ei voida tehdä. Jos nimittäin $S(0) = 0$, niin funktio $1/S(x)$ ei ole määritelty eikä jatkuva pistessä $x = 0$, kun taas potenssisarjan esittämällä funktiolla on suppenemisvälillä kaikkien kertalukujen derivaatat.

Joskus kuitenkin tiedetään tai arvataan, että on olemassa jokin sellainen potenssisarja $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, joka suppenee jollakin välillä, ja jonka summa on kahden suppenevan potenssisarjan suhde $S(x)/T(x)$, missä $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ja $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ovat tunnettuja sarjoja, ja $b_0 \neq 0$. Tällöin tuntemattomat kertoimet c_n, $n \in \mathbf{N}$, määräytyvät yksikäsitteisesti siitä, että sarjojen $Q(x)$ ja $T(x)$ Cauchyn tulona saatavan sarjan on potenssisarjojen identtisyyslauseen perustella oltava juuri sarja $S(x)$. Nyt pystytään nimittäin muodostamaan riittävä määrä tuntemattomia kertoimia c_n, $n \in \mathbf{N}$, sitovia lineaarisia yhtälöitä ja ratkaisemaan kertoimet näitä yhtälöitä käyttäen. Tähän perustuu ns. tuntemattomien kertoimien menetelmä potenssisarjojen osamäärän laskemiseksi. Joskus pystytään jälkeenpäin selvittämään myös saadun sarjan suppenemisväli.

7.33. Esimerkki. Oletetaan, että on olemassa sellainen origokeskinen potenssisarja $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, että jollakin välillä $]-R,R[$

$$Q(x) = \frac{1+x}{1+2x+3x^2+4x^3+\cdots}.$$

Määritetään sarjan $Q(x)$ kertoimet.

Nimittäjänä esiintyvän sarjan $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ ja tuntemattoman sarjan $Q(x)$ Cauchyn tulona on tällä kertaa äärellinen sarja (=polynomi) $P(x) = 1 + x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$. Kirjoittamalla Cauchyn tulo auki ja soveltamalla potenssisarjojen identtisyyslausetta tulosarjaan $Q(x)T(x)$ ja 'sarjaan' $P(x)$ saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1 = p_0 &= c_0 \\ 1 = p_1 &= c_1 + 2c_0 \\ 0 = p_2 &= c_2 + 2c_1 + 3c_0 \\ 0 = p_3 &= c_3 + 2c_2 + 3c_1 + 4c_0 \\ \quad\vdots &= \vdots \\ 0 = p_n &= c_n + \cdots + (n-2)c_3 + (n-1)c_2 + nc_1 + (n+1)c_0 \\ \quad\vdots &= \vdots \end{cases}$$

Tässä ensimmäisestä yhtälöstä ratkeaa $c_0 = 1$. Sijoittamalla se toiseen yhtälöön saadaan $1 = c_1 + 2c_0 = c_1 + 2$, mistä ratkeaa $c_1 = -1$. Sijoittamalla c_0 ja c_1 kolmanteen yhtälöön seuraa $0 = c_2 + 2c_1 + 3c_0 = c_2 + 2(-1) + 3 \cdot 1 = c_2 + 1$, joten $c_2 = -1$. Neljännestä yhtälöstä $0 = c_3 + 2(-1) + 3(-1) + 4 \cdot 1$ ratkeaa $c_3 = 1$.

Yleisessä tilanteessa tätä 'ketjureaktiota' voidaan jatkaa niin pitkälle kuin laskijan kärsivällisyys riittää. Jos nimittäjän vakiotermi on $\neq 0$, niin seuraavasta yhtälöstä ratkeaa aina yksi uusi kerroin. Käsillä olevassa erikoistapauksessa jakolasku on kuitenkin jo päättynyt, ja ratkaisuksi tulee $c_n = 0$ aina, kun $n > 3$. Ratkaisu on nimittäin ketjureaktion vuoksi yksikäsitteinen. Sijoittamalla löydetyt c_0, c_1, c_2, c_3 ja $c_n = 0$, $n > 3$ yhtälöön

$$0 = p_n = c_n + \cdots + (n-2)c_3 + (n-1)c_2 + nc_1 + (n+1)c_0$$

nähdään, että se toteutuu.

Vastaukseksi saadaan, että

$$Q(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (1-x)(1-x^2) = (1-x)^2(1+x).$$

Tämä ei varsinaisesti ollut yllätys, sillä Esimerkin 7.15 mukaan jakajana oleva sarjan suppenee välillä $x \in]-1,1[$ kohti summafunktiota $T(x) = 1/(1-x)^2$, joten $(1+x)/T(x) = (1+x)(1-x)^2$. Tällä kertaa osamääränä saatu äärellinen potenssisarja tietenkin suppenee kaikkialla. Näin siitä huolimatta, että jakaja suppeni vain välillä $]-1,1[$.

7.5. Taylorin ja Maclaurinin sarjakehitelmistä ja niiden sovelluksista

Viimeisessä pykälässä käsitellään Taylorin ja Maclaurinin sarjakehitelmiä, joiden avulla voidaan mm. arvioida funktioita sekä niiden derivaattoja ja integraaleja. Luennoilla asian opetteluun käytetään melko niukasti aikaa, mutta pykälään on lisätty lukuisia esimerkkejä itsenäisen opiskelun tukemiseksi.

Tähän asti on lähinnä pyritty laskemaan potenssisarjojen summafunktioita. Seuraavaksi pohditaan käänteistä tehtävää: etsitäänkin potenssisarjaa, jolla on haluttu summafunktio. Tällöin Seuraus 7.29 rajoittaa vaihtoehtojen määrää, mutta toisaalta samalla viitoittaa tien ainoaan mahdolliseen ratkaisuun. Jotta funktiota $f(x)$ esittäisi jokin välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ suppeneva potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, funktiolla $f(x)$ on ensinnäkin oltava tällä välillä kaikkien kertalukujen derivaatat. Lisäksi potenssisarjan kertoimet a_n määräytyvät yhtälöistä

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

missä $n \in \mathbf{N}$.

Jäljelle jäävät nyt kysymykset:

1. Millä muuttujan x arvoilla sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \tag{$*$}$$

suppenee?

2. Millä muuttujan x arvoilla sen summa on $f(x)$?

7.34. Määritelmä. Sarjaa $(*)$ kutsutaan *funktion $f(x)$ Taylorin sarjaksi pisteessä* x_0. Erikoistapauksessa $x_0 = 0$ puhutaan yleensä *Maclaurinin sarjasta*. Sarjojen osasummia kutsutaan vastaavasti *Taylorin polynomeiksi* tai *Maclaurinin polynomeiksi*.

Jos funktio $f(x)$ voidaan laajentaa säännölliseksi (ns. holomorfiseksi) kompleksimuuttujan funktioksi, näihin kysymyksiin saadaan yllättävän yksinkertainen vastaus. Tällä kurssilla joudutaan kuitenkin tyytymään hiukan mutkikkaampiin menetelmiin, mikä vaikeuttaa täydellisen tilannekuvan luomista. Siksi joidenkin funktioiden kohdalla on tyydytty ainoastaan kertomaan vaikkapa suppenemissäde kykenemättä perustelemaan sitä lainkaan.

`Taylor`

7.35. Lause. *Oletetaan, että funktio $f(x)$ on välillä $I =]x_0 - R, x_0 + R[$ derivaattoineen jatkuva kertalukuun $n+1$ saakka. Tällöin välillä I*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

missä osasumma $T_n(x)$ on astetta n oleva Taylorin polynomi. *Jäännöstermi on muotoa*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

missä ξ on tuntematon lukujen x ja x_0 välissä oleva luku.

Todistus: Kiinnitetään $x \in I$. Jos $x = x_0$, niin $T_n(x_0) = f(x_0)$ ja väite on tosi. Muussa tapauksessa $x - x_0 \neq 0$, joten voidaan valita luku K siten, että

$$f(x) = T_n(x) + K(x - x_0)^{n+1}.$$

Muodostetaan muuttujan t apufunktio

$$\varphi(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + K(x-t)^{n+1} \right].$$

Tällöin selvästi $\varphi(x) = 0$ ja K:n valinnan perusteella myös $\varphi(x_0) = 0$. Käyttämällä tulon derivointikaavaa ja oletusta nähdään, että funktio $\varphi(t)$ on derivoituva lukujen x ja x_0 välillä, ja sen derivaatta on

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!} \right) + K(n+1)(x-t)^n \\
&= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k - f^{(k)}(t)k(x-t)^{k-1}}{k!} \right) + K(n+1)(x-t)^n \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} + K(n+1)(x-t)^n \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + K(n+1)(x-t)^n,
\end{aligned}$$

sillä muut termit kumoutuvat pareittain. Rollen lauseen ehdot ovat voimassa, joten lukujen x ja x_0 välillä on sellainen kohta $t = \xi$, että $\varphi'(\xi) = 0$. Yhtälöstä

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + K(n+1)(x-\xi)^n = 0$$

seuraa, että

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Rollen lauseen lupaama piste ξ ei ole kumpikaan välin päätepisteistä, joten $x - \xi \neq 0$. Väite seuraa tästä. □

Lause 7.35 avaa nyt yhden mahdollisen tavan vastata kysymyksiin 1 ja 2. Jos funktion $f(x)$ kaikkien kertalukujen derivaatat hallitaan riittävän hyvin, niin voidaan (ehkä) osoittaa, että $R_n(x) \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin saadaan varmuus sarjan suppenemisen lisäksi myös siitä, että se esittää ko. funktiota.

sin sarja

7.36. Esimerkki. Osoitetaan, että sinifunktion $f(x) = \sin x$ Maclaurinin sarja on

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Osoitetaan sitten edelleen, että tämä sarja suppenee kaikkialla ja sen summa $= \sin x$ aina, kun $x \in \mathbf{R}$.

Induktiolla nähdään helposti, että $D^n \sin x = \sin(x + n\pi/2)$ kaikille $n \in \mathbf{Z}_+$. Siten $f^{(n)}(0) = 0$, kun n on parillinen, ja $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Näin ollen sinin Maclaurinin sarja on väitettyä muotoa.

Kiinnitetään $x \neq 0$ ja $n > 0$. Koska aina $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$, saadaan Lauseen 7.35 perusteella jäännöstermille arvio

$$R_n(x) \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Kun $n \to \infty$, niin $R_n(x) \to 0$ (vrt. Esimerkki 6.29), joten potenssisarja suppenee ja sen summa $= \sin x$.

`cos sarja`

7.37. Esimerkki. Potenssisarjojen teorian päätuloksen 7.27 nojalla suppeneva sarja voidaan derivoida termeittäin, ja näin saatu sarja esittää summafunktion derivaattaa. Näin ollen (potenssisarjojen identtisyyslauseen nojalla) kosinin Maclaurinin sarja on

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Sarja suppenee ja esittää kosinifunktiota kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Kuten eksponenttifunktionkin tapauksessa, myös sini- ja kosinifunktio voitaisiin *määritellä* Esimerkkien 7.36 ja 7.37 sarjojen summina. Puritaaninen lähestymistapa analyysiin toimisikin tällä tavalla. Kurssilla Analyysi I esitetty sinin ja kosinin määritelmähän perustui pitkälti visuaaliseen havaintoon, ja sivuutimme muun muassa ympyrän kaaren pituuden määrittelyyn ja olemassaoloon liittyvät ongelmat. Kaikki trigonometrisia funktioita koskevat identiteetit (kahden kulman summaa koskevat kaavat, 'summat tuloiksi'-kaavat jne.) voidaan todistaa myös potenssisarjojen Cauchyn tulojen avulla. Kompleksianalyysin kursseilla menetellään juuri näin, koska kompleksisen muuttujan x siniä tai kosinia ei voida määritellä kuvan avulla samoin kuin tapauksessa $x \in \mathbf{R}$.

Näistä sarjoista voidaan johtaa uusia sarjoja esimerkiksi algebrallisilla manipulaatioilla.

7.38. Esimerkki. Etsitään funktion $f(x) = \sin^2 x$ Maclaurinin sarjan kolme ensimmäistä nollasta eroavaa termiä.

Yksi tapa tuottaa Maclaurinin sarja funktiolle f on muodostaa sinin Maclaurinin sarjan Cauchyn tulo itsensä kanssa:

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right).$$

Tässä

$$\begin{array}{rcl}
xf(x) & = & x^2 - \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x^6}{120} - \cdots \\
-\dfrac{x^3}{3!}f(x) & = & \quad\;\; - \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x^6}{36} + \cdots \\
+\dfrac{x^5}{5!}f(x) & = & \quad\quad\quad\quad\; + \dfrac{x^6}{120} + \cdots \\
\hline
f(x)^2 & = & x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \dfrac{2x^6}{45} + \cdots
\end{array}$$

Toinen ratkaisu saadaan käyttämällä trigonometristen funktioiden identiteettiä

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \qquad \Rightarrow \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Sijoitetaan siis kosinin Maclaurinin sarjaan x:n paikalle $2x$ ja sijoitetaan edelleen ylläolevaan yhtälöön:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^4}{24} + \frac{(2x)^6}{720} - \cdots\right) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \cdots
\end{aligned}$$

Kolmas tapa olisi laskea funktion derivaattoja riittävän pitkälle, jotta haluttu määrä termejä selviää. Tämä johtaa kuitenkin mutkikkaampiin laskuihin, joissa virheen riski kasvaa. Tällöin myös saatavan sarjan suppeneminen tulisi selvittää erikseen esimerkiksi Lausetta 7.35 käyttäen.

7.39. Esimerkki. Määritetään funktion $f(x) = \tan x$ Maclaurinin sarjan neljä ensimmäistä nollasta eroavaa termiä potenssisarjojen jakolaskua käyttäen.

Funktio f on pariton. Näin ollen sen derivaatta f' on parillinen (harjoitustehtävä), toinen derivaatta f'' pariton jne. Koska pariton funktio häviää nollassa, niin sen

Maclaurinin sarjassa esiintyy vain muuttujan x parittomia potensseja. Tämän perusteella voidaan päätellä (edellyttäen, että tangentin Maclaurinin sarja ylipäätään suppenee ja esittää tangenttia jollakin välillä), että

$$\tan x = T(x) = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + c_7 x^7 + \cdots .$$

Ratkaistaan alkupään kertoimia $c_1, c_3, \ldots$ muodostamalla tarvittavat yhtälöt potenssisarjojen identtisyyslauseen avulla sekä hyödyntämällä tietoa siitä, että sarjan $T(x)$ ja kosinin sarjan $C(x)$ Cauchyn tulon on oltava sinin sarja $S(x)$. Cauchyn tulo on

$$\begin{aligned} T(x)C(x) &= T(x)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots\right) \\ &= x \cdot c_1 + x^3\left(c_3 - c_1 \cdot \frac{1}{2}\right) + x^5\left(c_5 - c_3 \cdot \frac{1}{2} + c_1 \cdot \frac{1}{24}\right) + \\ &\qquad + x^7\left(c_7 - c_5 \cdot \frac{1}{2} + c_3 \cdot \frac{1}{24} - c_1 \cdot \frac{1}{720}\right) + \cdots , \end{aligned}$$

joten vertailemalla vastinkertoimia sinin Maclaurinin sarjan kanssa saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} c_1 & = \quad 1 \\ c_3 - c_1 \cdot \frac{1}{2} & = \quad -\frac{1}{6} \\ c_5 - c_3 \cdot \frac{1}{2} + c_1 \cdot \frac{1}{24} & = \quad \frac{1}{120} \\ c_7 - c_5 \cdot \frac{1}{2} + c_3 \cdot \frac{1}{24} - c_1 \cdot \frac{1}{720} & = \quad -\frac{1}{5040} \\ \vdots & \quad\ \vdots \end{cases}$$

Tästä ratkeaa ketjureaktiona tangentin sarjaksi

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots .$$

Kompleksianalyysissä osoitetaan, että sarja suppenee ja esittää tangenttia välillä $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Koska tangenttia ei ole edes määritelty pisteissä $x = \pm\pi/2$, ei ole kovin yllättävää, että suppenemissäde $R \leq \pi/2$. Tällä hetkellä käytössä olevilla metodeilla olisi vaikeaa nähdä, miksi $R = \pi/2$.

Edellisen esimerkin alussa tehdyt havainnot yleistyvät:

- Parittoman funktion Maclaurinin sarjassa esiintyy vain muuttujan x parittomia potensseja.

$$f(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \cdots$$

- Parillisen funktion Maclaurinin sarjassa esiintyy vain muuttujan x parillisia potensseja.

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \cdots$$

7.40. Huomautus. On olemassa funktioita, joiden Maclaurinin sarja suppenee kaikkialla, mutta ei esitä kyseistä funktiota muualla kuin pisteessä $x = 0$. Esimerkki tällaisesta funktiosta on

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0, \\ e^{-1/x^2}, & \text{kun } x \neq 0. \end{cases}$$

Voidaan osoittaa, että tällä funktiolla on kaikkien kertalukujen derivaatat, ja että $f^{(n)}(0) = 0$ olipa $n \in \mathbf{N}$ mikä tahansa. Todistus hyödyntää seuraavaa seikkaa, joka nähdään todeksi induktiolla. Kun $x \neq 0$, niin $f^{(n)}(x)$ on muotoa $P_n(1/x)e^{-1/x^2}$, missä P_n on jokin polynomi. Tällöin funktion $f^{(n)}$ pisteessä nolla muodostettu erotusosamäärä on samanlaista muotoa. Vaihtamalla muuttujaksi $t = 1/x$ (jolloin $t \to \pm\infty$, kun $x \to 0$) ja käyttämällä tulosta "eksponenttifunktio voittaa potenssifunktion" nähdään, että kyseisen erotusosamäärän raja-arvoksi tulee nolla, joten $f^{(n+1)}(0) = 0$. Tämän jälkeen väite seuraa induktiolla.

Kun kerran kaikkien kertalukujen derivaatat origossa häviävät, Maclaurinin sarjan kertoimet ovat kaikki nollia. Näin ollen sarjan summa on identtisesti nolla. Toisaalta $f(x) = 0$ ainoastaan silloin, kun $x = 0$.

`binomisarja`

7.41. Esimerkki (Binomisarja)**.** Oletetetaan, että $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$. Osoitetaan, että

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots,$$

kun $|x| < 1$.

Funktiolle $f(x) = (1+x)^\alpha$ on $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$, joten väiteyhtälön oikea puoli on funktion $f(x)$ Maclaurinin sarja

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Koska α ei ole kokonaisluku, tämän sarjan kaikki kertoimet ovat nollasta eroavia. Määrätään ensin sarjan $S(x)$ suppenemissäde osamäärätarkastimen raja-arvomuotoa käyttäen. Koska

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\frac{|\alpha - n|}{n+1} \to |x|,$$

kun $n \to \infty$, niin suppenemissäde $R = 1$. Sarjan $S(x)$ derivoiminen termeittäin on siis luvallista välillä $x \in]-1, 1[$. Suoraviivainen lasku osoittaa, että

$$\alpha S(x) = (1 + x)S'(x).$$

Tämän avulla nähdään, että funktion $g(x) = (1+x)^\alpha / S(x)$ derivaatta häviää välillä $]-1, 1[$, joten $g(x)$ on vakiofunktio $g(x) = g(0) = 1$. Näin ollen $S(x) = f(x)$, kun $|x| < 1$.

Tunnetuista Maclaurinin ja Taylorin sarjoista saadaan potenssisarjojen teorian päätulosten (Lause 7.27) avulla uusia sarjoja derivoimalla ja integroimalla. Derivointia käytettiinkin yllä johdettaessa kosinin sarjaa sinin sarjasta. Seuraavaksi johdetaan sarjat arkustangentille ja arkussinille termeittäin integroimalla.

`arctan sarja`

7.42. Esimerkki. Osoitetaan, että kun $x \in [-1, 1]$, niin

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Koska arkustangentti on funktion $f(x) = 1/(1 + x^2)$ määräämätön integraali, tarkastellaan suppenevaa geometrista sarjaa ($|t| < 1$)

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}.$$

Väitetty sarja saadaan tästä Lauseen 7.27 mukaisesti laskemalla puolittain määrätyt integraalit yli välin $[0, x]$. Kuten Esimerkissä 7.13, vuorottelevia sarjoja koskevan Leibnizin lauseen 6.31 nojalla nähdään, että suppeneminen on itse asiassa tasaista koko välillä $[-1, 1]$. Jakuvuuspäättelyn avulla (vrt. Esimerkki 7.13) nähdään sitten, että sarja esittää arkustangenttia myös pisteissä $x = \pm 1$. Erityisesti, kun $x = 1$, saadaan tulos

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots.$$

Periaatteessa tätä sarja voitaisiin käyttää luvun π arvon määrittämiseen, mutta sarjan suppeneminen on tähän tarkoitukseen liian hidasta. Jotta summassa olisi edes kolme oikeaa desimaalia, osasummaan on otettava mukaan noin 500 termiä.

arcsin sarja

7.43. Esimerkki. Kun sijoitetaan binomisarjaan $x = -t^2$ ja $\alpha = -1/2$, saadaan välillä $|t| < 1$ voimassa oleva sarjaesitys

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}t^{2n} + \cdots.$$

Integroimalla tämä termeittäin yli välin $t \in [0, x]$ saadaan

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots.$$

Kun luku x on hyvin lähellä sarjan keskipistettä x_0, potenssit $(x - x_0)^n$ ovat sitä pienempiä, mitä suurempi eksponentti n on. Näin ollen Taylorin sarja matala-asteiset termit ovat määrääviä tällaisessa tilanteessa. Seuraavaksi näytetään, miten tätä voidaan hyödyntää mahdollisen ääriarvokohdan luonteen selvittämiseksi sekä raja-arvojen tutkimiseen.

7.44. Esimerkki. Selvitetään, onko funktiolla $f(x) = \sin x - x\sqrt{1+x^3}$ ääriarvokohta origossa.

Nyt $f'(x) = \cos x - \sqrt{1+x^3} - x\cdot 3x^2(1+x^3)^{-1/2}/2$, joten $f'(0) = 1 - 1 - 0 = 0$ ja ääriarvokohta on mahdollinen. Toinen derivaatta ei tuo selvyyttä asiaan, sillä

$$f''(x) = \frac{9x^5}{4(1+x^3)^{3/2}} - \frac{6x^2}{\sqrt{1+x^3}} - \sin x,$$

joten $f''(0) = 0$. Yhdistämällä binomisarjaa ($\alpha = 1/2$) ja sinifunktion sarjaa koskevat tiedot nähdään, että funktiota $f(x)$ esittää välillä $x \in]-1, 1[$ suppeneva Maclaurinin sarja

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cdots) - x(1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \cdots) \\ &= -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{629}{5040}x^7\cdots \\ &= x^3\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{120}x^2 + \frac{629}{5040}x^4\cdots\right). \end{aligned}$$

Merkitään viimeisen muodon sulkulauseketta $g(x) = -1/6 - x/2 + x^2/120 + \cdots$. Aiemmin todettiin, että $f(x)$:n Maclaurinin sarja suppenee, kun $|x| < 1$. Täten sarja $g(x)$ suppenee niin ikään tällä välillä, ja sen summafunktio on tällä välillä jatkuva. Koska $g(0) = -1/6 < 0$, niin jossakin luvun 0 ympäristössä $g(x)$ saa vain negatiivisia arvoja. Tekijä x^3 sen sijaan vaihtaa merkkiään tässä samassa ympäristössä. Näin ollen niiden tulo $f(x) = x^3 g(x)$ saa nollan mielivaltaisen pienessä ympäristössä kummankin merkkisiä arvoja. Tästä voidaan päätellä, että $x = 0$ ei ole funktion f ääriarvokohta.

7.45. Esimerkki. Selvitetään, onko $x = 0$ funktion $f(x) = \cos x + (1/2)x \sin x$ ääriarvokohta.

Jälleen $f'(0) = f''(0) = 0$, joten kurssin Analyysi I metodeista ei ole apua. Kombinoimalla sinin ja kosinin sarjat nähdään, että funktiota $f(x)$ esittää kaikkialla suppeneva Maclaurinin sarja

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{1}{2}x(x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots) \\
&= 1 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12}\right)x^4 + \cdots \\
&= 1 + x^4(-1/12 + c_6x^2 + c_8x^4 + \cdots),
\end{aligned}$$

missä $c_6, c_8, \ldots$ ovat parillisen funktion $f(x)$ Maclaurinin sarjan korkeampiasteisten termien kertoimia.

Sulkulausekkeen sarjan määrittämä funktio $g(x) = -1/12 + c_6x^2 + \cdots$ on kaikkialla jatkuva, ja $g(0) = -1/12 < 0$, joten jossakin nollan ympäristössä $B(0; \delta)$ funktion g saamat arvot ovat kaikki negatiiviisia. Koska $x^4 \geq 0$ kaikkialla ja $= 0$ vain, kun $x = 0$, niin ympäristössä $B(0; \delta)$ (nollaa mahdollisesti lukuunottamatta) on aina $x^4 g(x) < 0$. Näin ollen $f(0) = 1$ on lokaali maksimi.

Kahden edellisen esimerkin tulokset on helppo yleistää seuraavaksi yleiseksi säännöksi.

7.46. Lause. *Oletetaan, että funktiota $f(x)$ esittää pisteen $x = x_0$ jossakin ympäristössä Taylorin sarja*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Olkoon $n_0 > 0$ pienin sellainen indeksin n arvo, jolle $a_n \neq 0$. Jos n_0 on pariton, niin funktiolla f ei ole ääriarvokohtaa pisteessä x_0. Jos n_0 on parillinen, niin funktiolla f on lokaali ääriarvokohta pisteessä x_0. Lisäksi jos $a_{n_0} > 0$, kyseinen ääriarvokohta on lokaali minimi. Jos taas $a_{n_0} < 0$, niin kyseessä on lokaali maksimi.

Todistus: Harjoitustehtävä. □

7.47. Huomautus. Edellisen lauseen tulosta voidaan yleistää koskemaan myös sellaista tilannetta, jossa ei vielä tiedetä jonkin Taylorin sarjan esittävän kyseistä funktiota. Erityisesti, jos tiedetään ainoastaan derivaattojen $f^{(k)}, 1 \leq k \leq n_0$ olemassaolo, ja että $f^{(k)}(x_0) = 0$, kun $k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$, voidaan käyttää Taylorin lausetta. Jos kertoimen $f^{(n_0)}(\xi)$ etumerkin selvittäminen on mahdollista, niin johtopäätös on täsmälleen sama kuin yllä.

Tässä(kin) mielessä Taylorin lause on nähtävissä differentiaalilaskennan väliarvolauseen (DVAL) korkeampia derivaattoja koskevana yleistyksenä.

Seuraavana esimerkkinä sarjojen käytöstä on määrättyjen integraalien likiarvojen laskeminen. Aina ei ole mahdollista laskea funktion integraalifunktiota. Jos kuitenkin tunnetaan funktiota esittävä Taylorin sarja, voidaan käyttää potenssisarjojen termeittäistä integrointia. Haluttuun tarkkuteen pääsemiseksi on arvioitava termeittäin integroimalla saadun sarjan jäännöstermiä. Seuraavassa ei pyritä esittämään yleistä teoriaa, vaan ainoastaan valaisemaan yleisimpiä tekniikoita esimerkkien avulla.

7.48. Esimerkki. Etsitään määrätylle integraalille

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx$$

sellainen likiarvo, joka poikkeaa tarkasta arvosta enintään 1/1000.

Funktiolla $f(x) = e^{x^2}$ ei ole alkeisfunktioiden avulla lausuttavaa primitiiviä (ei todisteta), mutta sille saadaan kuitenkin Maclaurinin sarjakehitelmä sijoittamalla kaikkialla suppenevan eksponenttifunktion sarjan $E(x)$ muuttujan paikalle x^2. Siis

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

kaikille $x \in \mathbf{R}$.

Integroimalla tämä välillä $[0, 1]$ tasaisesti suppeneva sarja termeittäin välin yli saadaan

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^{2k}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

Merkitään tulokseksi saadun sarjan yleistä termiä $a_k = 1/(2k+1)k!$. Tällöin kahden peräkkäisen termin suhteelle saadaan arvio

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k!(2k+1)}{(k+1)!(2k+3)} = \frac{2k+1}{(k+1)(2k+3)} \leq \frac{1}{k+1}.$$

Merkitään $q = 1/(n+1)$. Tällöin kaikille $k \geq n$ on voimassa $a_{k+1}/a_k \leq q$, joten induktiolla saadaan arvio $a_{n+p} \leq q^p a_n$, kun $p > 0$. Näin ollen jäännöstermille saadaan sitä majoroivan geometrisen sarjan avulla edelleen arvio

$$0 \leq R_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k \leq \sum_{p=0}^{\infty} q^n a_n = \frac{a_n}{1-q} = \frac{1}{n!(2n+1)} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)}{n!(2n+1)n}.$$

Kun $n = 5$, niin $R_n = 6/(120 \cdot 11 \cdot 5) = 1/1100 < 1/1000$, joten vastaukseksi saadaan

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \approx 1{,}462.$$

7.49. Esimerkki. Etsitään määrätylle integraalille

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

sellainen likiarvo, joka poikkeaa tarkasta arvosta enintään $1/1000$.

Tällä kertaa Maclaurinin sarja on

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Termeittäin integroimalla saadaan

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}.$$

Tämä sarja on alternoiva ja vähenevä heti ensimmäisestä termistä alkaen. Näin ollen jäännöstermiä on yksinkertaisinta arvioida Leibnizin lauseen 6.31 avulla. Ensimmäinen termi, joka on itseisarvoltaan $< 1/1000$, saadaan arvolla $k = 3$. Halutulla tarkkuudella vastaukseksi saadaan siten

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0{,}946.$$

Raja-arvojen määrittämisessä Taylorin sarjojen käyttö on joskus houkutteleva vaihtoehto useampikertaiselle l'Hospitalin säännön soveltamiselle.

7.50. Esimerkki. Määritetään raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x - x^3/2}{\arctan x - x + x^3/3}.$$

Osoittajan Maclaurinin sarja on

$$f(x) = \tan x - \sin x - x^3/2 = x(1-1) + x^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right) + x^5\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{120}\right)^+ c_7x^7 + c_9x^9 + \cdots = \frac{1}{8}x^5 + c_7x^7 + \cdots$$

joillekin kertoimille $c_7, c_9, \ldots$. Aikaisemmin opitun perusteella tämä sarja suppenee ja esittää osoittajan funktiota, kun $|x| < \pi/2$. Näin ollen kyseinen sarja soveltuu käytettäväksi, kun $x \to 0$. Vastaavasti nimittäjää esittävä sarja saadaan arkustangentin sarjasta

$$g(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3} = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots.$$

Tämä sarja suppenee ja esittää funktiota $g(x)$, kun $|x| \leq 1$. Näin ollen tutkittavaa funktiota esittää sarjojen osamäärä

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^5(\frac{1}{8} + c_7x^2 + c_9x^4 + \cdots)}{x^5(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}x^2 + \cdots)} \underset{=}{\text{ol. } x \neq 0} \frac{\frac{1}{8} + c_7x^2 + c_9x^4 + \cdots}{\frac{1}{5} - \frac{1}{7}x^2 + \cdots}.$$

Tässä selvästi osoittaja ja nimittäjä ovat jatkuvia välillä $|x| \leq 1$, joten kun $x \to 0$, ne lähestyvät ilmeisiä raja-arvojaan, ja tulokseksi saadaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/8}{1/5} = \frac{5}{8}.$$

Vaihtoehtoinen ratkaisutapa olisi soveltaa l'Hospitalin sääntöä viisi kertaa. Tällä kertaa vaadittavat korkean kertaluvun derivaatat olisivat kohtuullisen mutkikkaita lausekkeita (kokeile, jos haluat!).

JA NYT, AURINKOISTA KESÄÄ!