Analyysi A

Harjoitukset 1, 14.–15.1.2020

1. Osoita, että 5 on joukon
$$A = \left\{ \frac{4n+1}{2n-1} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$$
yläraja.

2. Osoita täsmällisesti perustellen, että joukko
$$A \;=\; \left\{ \frac{2x}{x-4} \;\middle|\; x \in \left]4, \infty\right[\right\}$$
ei ole ylhäältä rajoitettu.

3. Oletetaan, että $|x-a| < 2^{-15}$ ja $|y-a| < 2^{-15}$ $(x, y, a \in \mathbf{R})$. Mitä voit kolmioepäyhtälön avulla päätellä etäisyydestä $|x-y|$?

4. Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{kun } |x| < 1, \\ 3-2x^3, & \text{kun } |x| \geq 1. \end{cases}$$
Anna laajin sellainen väli $I \subseteq \mathbf{R}$, että

   (a) $\inf A = 2$ ja $\sup A = 4$, (b) $\inf A = 2$ ja $\sup A = 5$,
   (c) $\inf A = 1$ ja $\sup A = 4$, (d) $\inf A = 1$ ja $\sup A = 5$,

   kun $A = \{f(x) \,|\, x \in I\}$. Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa täsmällistä perustelua, että infimum ja supremum toteuttavat vaaditut ehdot. Esimerkiksi funktion kuvaajaan tukeutuva perustelu on riittävä.

5. Olkoot $A, B \subseteq \mathbf{R}$, $A, B \neq \emptyset$ rajoitettuja joukkoja. Osoita, että jos $A \subseteq B$, niin
$$\inf B \;\leq\; \inf A \;\leq\; \sup A \;\leq\; \sup B.$$

6. Määritä täsmällisesti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun
$$A = \left\{ y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y = 1 + 2\cos^2 x,\ x \in [5, \infty[\right\}.$$

7. Voidaan helposti osoittaa, että 2 on joukon
$$A = \left\{ \frac{4n-2}{2n+1} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$$
yläraja. Osoita vastaoletusta käyttämällä, että mikään luku $2-t$ $(t > 0)$ ei voi olla joukon A yläraja.

8. Määritä täsmällisesti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun
$$A \;=\; \left\{ \frac{2n+1}{3n-1} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$