Analyysi A

Harjoitukset 2, 21.–22.1.2020

1. Voidaan helposti osoittaa, että 2 on joukon
$$A = \left\{ \frac{4n-2}{2n+1} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$$
yläraja. Osoita, että mikään luku $2-t$ ($t>0$) ei voi olla joukon A yläraja antamalla jokin sellainen joukon A alkio a, että $a > 2-t$.

2. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$ jokin sellainen joukko, että $\inf A = 1$ ja $\sup A = 6$. Osoita lausetta 2.5 käyttäen, että jos
$$B = \{ y \in \mathbf{R} \mid y = x + 2, x \in A \},$$
niin $\inf B = 3$ ja $\sup B = 8$.

3. Olkoon
$$A = \left\{ y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y = \frac{x+2}{x+1},\ x \geq 0 \right\}.$$
Määritä täsmällisesti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$.

4. Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään nojautuen, että
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} \;=\; 1.$$

5. Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään nojautuen, että
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3} - n\right) \;=\; 0.$$

6. Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään nojautuen, että
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{2n^3-n^2+3} \;=\; \frac{1}{2}.$$

7. Tutki, suppeneeko lukujono (x_n), kun
$$x_n = n^{-\left|\sin \frac{n\pi}{2}\right|}.$$

8. Lukujonosta (x_n) oletetaan, että
$$x_1 = 3 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$
Osoita täsmällisesti perustellen, että lukujonon (x_n) termien joukossa on suurin luku.