

Analyysi A

Harjoitukset 3, 28.–29.1.2020

1. Osoita täsmällisesti perustellen, että jos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -4$, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|x_n| > 3 \quad \forall n > n_0.$$

2. Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään perustuen, että jos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, niin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^3 = x^3.$$

3. Anna esimerkki sellaisista lukujonoista (x_n) ja (y_n) , että $x_n < y_n$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 3.$$

4. Olkoot $A \subseteq \mathbf{R}$ ja $B \subseteq \mathbf{R}$ sellaisia epätyhjiä joukkoja, että $a \leq b$ kaikilla $a \in A$ ja kaikilla $b \in B$. Oletetaan lisäksi, että on olemassa sellaiset lukujonot (a_n) ja (b_n) , että $a_n \in A$, $b_n \in B$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Todista täsmällisesti perustellen, että

$$\sup A = \inf B.$$

5. Määritä sellainen vakio $b \in \mathbf{R}$, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + bn} - \sqrt{n^2 + n} \right) = 3.$$

6. Määritä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + (-1)^n + \sin(n + \pi)}{n^3 + 2}.$$

7. Olkoon lukujono (x_n) kasvava. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos

$$y_n = x_n + x_{n+1} \quad (n \in \mathbf{Z}_+),$$

niin myös lukujono (y_n) on kasvava.

8. Joukko $S \subseteq \mathbf{R}$ on avoin, jos jokaista joukon S pistettä s kohti on olemassa sellainen positiiviluku $\varepsilon > 0$, että

$$U_\varepsilon(s) \subseteq S.$$

Osoita täsmällisesti perustellen, että jos (x_n) on aidosti kasvava ja ylhäältä rajoitettu lukujono ja

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\},$$

niin joukko $\mathbf{R} \setminus A$ ei ole avoin.