

# Analyyysi A

Harjoitukset 4, 4.–5.2.2020

1. Olkoon

$$x_n = \cos(n^2 + 1) + \sin(n^2 - 1) \quad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Osoita, että lukujonolla  $(x_n)$  on suppeneva osajono.

2. Oletetaan, että  $(x_n)$  ja  $(y_n)$  ovat Cauchyn jonoja ja  $c \in \mathbf{R}$ . Todista suoraan Cauchyn jonon määritelmään nojautuen, että myös jono  $(cx_n + y_n)$  on Cauchyn jono.

3. Osoita suoraan raja-arvon määrittelyyn perustuen, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{2n - 1} = \infty.$$

4. Anna esimerkki sellaisista lukujonoista  $(x_n)$  ja  $(y_n)$ , että  $x_n \rightarrow \infty$ ,  $y_n \rightarrow 0$  ja

$$(a) \ x_n y_n \rightarrow \infty, \quad (b) \ x_n y_n \rightarrow 4, \quad (c) \ x_n y_n \rightarrow 0.$$

Huom. Riittää määrittää vaadittavat raja-arvot. Suppenemistuloksia ei tarvitse perustella nojautumalla suoraan määritelmään.

5. Funktion raja-arvon määritelmän ehdosta

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: |f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < |x - a| < \delta,$$

saadaan kvanttorien järjestystä vaihtamalla ehto

$$\exists \delta > 0: \forall \varepsilon > 0: |f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < |x - a| < \delta.$$

Tarkoittaako tämä ehto mitään järkevää ja jos, niin mitä?

6. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x \rightarrow 4} (5x + 3) = 23.$$

7. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 4x - 5) = 1.$$

8. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{3x - 5} = 5.$$