

Analyyysi A

Harjoitukset 5, 11.–12.2.2020

1. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{6x + 1} = 5.$$

2. Todista, että jos funktion raja-arvo on olemassa, se on yksikäsitteinen.

3. Oletetaan, että

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0.$$

Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(f(x))^2} = \frac{1}{A^2}.$$

4. Määritä

$$\lim_{x \rightarrow 0} (4x^6 + \pi x^2) \cos \frac{x + \pi}{x}.$$

5. Olkoon f sellainen funktio, että $|f(x)| \leq x^2$, kun $0 < |x| < 1$. Mitä voidaan sanoa raja-arvosta

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} ?$$

6. Määritä

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + ax} - 1}{\sin bx} \quad (b \neq 0).$$

7. Tutki, onko funktiolla

$$f(x) = \frac{|\sin(x - 3)|}{x - 3} \quad (x \neq 3)$$

raja-arvo pisteessä $x = 3$. Entä onko funktiolla f vasemman- tai oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä $x = 3$? Myönteisessä tapauksessa määritä raja-arvot.

8. Osoita suoraan raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x - 5} = 3.$$