# Analyysi A

Harjoitukset 6, 18.–19.2.2020

1. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = A \quad (A \in \mathbf{R}),$$

niin

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = A.$$

2. Kirjoita täsmällinen määritelmä sille, että $\lim_{x \to a-} f(x) = \infty$, ja osoita tätä määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{x \to 2-} \frac{x-3}{x-2} = \infty.$$

3. Määritä

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x^2}.$$

4. Tarkastellaan väitettä

$$\forall a > 0 \colon \exists\, b > 0 \colon \forall c > 0 \colon \exists\, d \in \mathrm{U}_c(a) \colon f(d) \notin \mathrm{U}_b(f(a)),$$

missä $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Mitä funktion $f$ jatkuvuudesta tällöin väitetään? Kirjoita väite myös käyttäen tavanomaisia kirjainsymboleja $\varepsilon, \delta$ jne.

5. Määritä vakiot $a$ ja $b$ siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\,|x| \cos x + b\,|x| + 2b \sin x}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 4, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 0$.

6. Anna esimerkki funktiosta $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, joka on epäjatkuva pisteissä $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ja jatkuva muualla. Tässä tehtävässä funktion jatkuvuutta tai epäjatkuvuutta ei tarvitse perustella täsmällisesti. Esimerkiksi funktion kuvaajaan tukeutuva perustelu on riittävä.

7. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jatkuvan ja epäjatkuvan funktion yhdistetty funktio on aina epäjatkuva.

8. Olkoon $f \colon [0, \pi] \to \mathbf{R}$ sellainen funktio, että $f$ on oikealta jatkuva pisteessä $x = 0$ ja $|f(x)| > \sin x$ kaikilla $x \in [0, \pi]$. Osoita, että funktio

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

on rajoitettu välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.