

Analyysi A

Harjoitukset 7, 21.2.2020

1. Määritä luvut a ja b siten, että $b - a = \frac{1}{4}$ ja yhtälöllä

$$\frac{2x}{1+x^2} = |x-1|$$

on ainakin yksi ratkaisu välillä $]a, b[$.

2. Olkoon f sellainen välillä $[0, 2]$ jatkuva funktio, että

$$0 < f(x) < 2 \quad \forall x \in [0, 2].$$

Osoita, että on olemassa sellainen $c \in]0, 2[$, että $f(c) = c$.

Vihje: Tarkastele sopivaa apufunktiota.

3. Olkoon f sellainen kaikilla $x \in \mathbf{R}$ jatkuva funktio, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2.$$

Osoita, että f on rajoitettu välillä $[-3, \infty[$.

4. Olkoon $A = \{f(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$, missä f on sellainen kaikilla $x \in \mathbf{R}$ jatkuva funktio, että

$$f(0) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3.$$

Osoita täsmällisesti perustellen, että on olemassa sellainen alkio $s \in A$, että $a \leq s$ kaikilla $a \in A$.

5. Määritä käyttämättä laskinta tai taulukkokirjaa $\arcsin x$, kun $x = \frac{1}{2}$ ja $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Määritä (perustellen) $\inf A$ ja $\sup A$, kun

$$A = \left\{ y \in \mathbf{R} \mid y = \arccos|x| + \arcsin\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1] \right\}.$$

7. Määritä vakiot a ja b siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} a + \arccos \frac{1}{x^2+1}, & \text{kun } x < 0, \\ \pi, & \text{kun } x = 0, \\ b \arctan \frac{1}{x}, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 0$.

8. Osoita täsmällisesti perustellen, että funktiolla

$$f(x) = \arccos x + 2 \arctan x - 2x^2$$

on ainakin kaksi nollakohtaa välillä $] -1, 1[$.