# Analyyysi A

Raja-arvo ja jatkuvuus

## Harjoitustehtäviä

Kevät 2020

# Sisältö

**1 Esitietoja** **3**
1.1 Merkintöjä ja peruskäsitteitä . . . . . 3
1.2 Itseisarvo . . . . . 5
1.3 Reaalimuuttujan funktioista . . . . . 7

**2 Reaaliluvut** **9**
2.2 Reaalilukujen joukon täydellisyys . . . . . 9

**3 Lukujonon raja-arvo** **13**
3.1 Määritelmä . . . . . 13
3.2 Perusominaisuuksia . . . . . 14
3.3 Laskusääntöjä . . . . . 17
3.4 Monotonisista jonoista . . . . . 19
3.5 Luvun $e$ määrittely . . . . . 22
3.6 Cauchyn jonoista . . . . . 23
3.7 Raja-arvokäsitteen laajentaminen . . . . . 24

**4 Funktion raja-arvo** **26**
4.1 Määritelmä . . . . . 26
4.2 Perustuloksia . . . . . 28
4.3 Toispuoleiset raja-arvot . . . . . 31
4.4 Monotoniset funktiot . . . . . 32
4.5 Raja-arvokäsitteen laajentaminen . . . . . 33

**5 Funktion jatkuvuus** **36**
5.1 Määritelmä ja perustuloksia . . . . . 36
5.2 Jatkuvia funktioita koskevia tuloksia . . . . . 38
5.3 Suljetulla välillä jatkuvan funktion ominaisuuksia . . . . . 41
5.4 Käänteisfunktion jatkuvuudesta . . . . . 43
5.5 Tasainen jatkuvuus . . . . . 46

**6 Eksponentti- ja logaritmifunktio** **48**
6.1 Eksponenttifunktio . . . . . 48
6.2 Logaritmifunktio . . . . . 49
6.3 Yleinen eksponentti-, logaritmi- ja potenssifunktio . . . . . 50

Ellei toisin mainita, tehtävissä esiintyvät muuttujat ja vakiot ovat mielivaltaisia reaalilukuja.

# 1 Esitietoja

## 1.1 Merkintöjä ja peruskäsitteitä

1. Olkoon $A = \{1\}$ ja $B = \{\{1\}, 1\}$. Mitkä väitteistä (a) $1 \in A$, (b) $1 \subseteq A$, (c) $1 \subset A$, (d) $A \subset B$, (e) $A \subseteq B$, (f) $A \in B$ ovat tosia?

2. Formalisoi (kvanttorien avulla) väite "Positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbf{R}_+$ ei ole pienintä alkiota", ja todista, että väite on tosi.

3. Osoita todeksi tai epätodeksi, että

   (a) $\forall x \in \mathbf{Z}_+ : \exists y \in \mathbf{Z}_+ : y < x,$ (b) $\exists y \in \mathbf{Z}_+ : \forall x \in \mathbf{Z}_+ : y \leq x.$

4. Todista (induktiolla) Bernoullin epäyhtälö: Jos $x \in \mathbf{R}$, $x > -1$, niin

   $$(1+x)^n \;\geq\; 1 + nx$$

   kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

5. Olkoon $A = \{1\}$ ja $B = \{\{1\}, 1\}$. Mitkä väitteistä (a) $1 \in A \cap B$, (b) $A \cap B = A$, (c) $B \setminus A = A$ ovat tosia?

6. Olkoon $A, B \subseteq \mathbf{R}$. Määritä $A \cap B$, $(A \cap B)^c$, $A^c \cap B^c$, $A \cup B$, $(A \cup B)^c$ ja $A^c \cup B^c$, kun

   (a) $A = \,]0, 1[\,,\ B = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right],$ (b) $A = \,]-\infty, 1[\,,\ B = \,]1, \infty[\,.$

   Tässä tehtävässä vastauksia ei tarvitse perustella täsmällisesti. Esimerkiksi joukkojen sijaintiin lukusuoralla tukeutuva perustelu on riittävä.

7. Olkoon $A_k = [k, 10k^2[$ $(k \in \mathbf{Z}_+)$. Määritä täsmällisesti perustellen joukot

   $$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \qquad \text{ja} \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

8. Osoita, että

   (a) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \,]2 - \tfrac{1}{k}, 2] \;=\; \{2\},$ (b) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \,]2 - \tfrac{1}{k}, 2 - \tfrac{1}{k+1}[ \;=\; \emptyset.$

9. Osoita, että

   $$\bigcup_{k=1}^{\infty} [\tfrac{1}{k}, 2 + \tfrac{1}{k}] \;=\; ]0, 3]\,.$$

10. Anna jokin ylä- ja alaraja joukoille

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x \le 6\} \quad \text{ja} \quad B = \{y \in \mathbf{R} \mid y = x^2 - 1,\, 0 \le x \le 2\}.$$

11. Anna jokin ylä- ja alaraja joukoille

$$A = \left\{ \frac{6}{x+1} \;\middle|\; x \in \mathbf{R},\, x > 1 \right\} \quad \text{ja} \quad B = \left\{ \frac{7n-3}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$

12. Anna jokin ylä- ja alaraja joukoille

$$A = \left\{ \frac{5n-2}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\} \quad \text{ja} \quad B = \left\{ \frac{3}{m} - \frac{2}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$

13. Anna jokin ylä- ja alaraja joukoille

$$A = \left\{ \frac{8n-5}{n+2} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\} \quad \text{ja} \quad B = \left\{ \frac{(-1)^{mn}}{m^2+n^2} \;\middle|\; m, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$

14. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos $M$ on joukon $A$ yläraja ja $N$ on joukon $B$ yläraja, niin $M + N$ on joukon $A \cup B$ yläraja.

15. Osoita, että $5$ on joukon

$$A = \left\{ \frac{4n+1}{2n-1} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$$

yläraja.

16. Osoita, että $2$ on joukon

$$A = \left\{ \frac{n^2+2}{2n-1} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$$

alaraja.

17. Osoita täsmällisesti perustellen, että joukko

$$\text{(a)}\;\; A = \left\{ \frac{2x}{x-4} \;\middle|\; x \in \left]4, \infty\right[ \right\}, \qquad \text{(b)}\;\; B = \left\{ \frac{5}{x-2} \;\middle|\; x \in \left]2, \infty\right[ \right\}$$

ei ole ylhäältä rajoitettu.

18. Osoita täsmällisesti perustellen, että joukko

$$A = \left\{ \frac{x-7}{x-4} \;\middle|\; x \in \left]4, \infty\right[ \right\}$$

ei ole alhaalta rajoitettu.

19. Osoita, että

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+)$$

esittämällä summattava lauseke kahden rationaalilausekkeen erotuksena ja hyödyntämällä sitten summauksessa tapahtuvaa kumoutumista.

20. Osoita induktiolla, että jos $a_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), niin

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \;\geq\; 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

## 1.2 Itseisarvo

1. Anna jokin ylä- ja alaraja joukolle

$$A = \left\{ \frac{x(1-x)}{|x|} \;\middle|\; x \in \left]-1, 1\right[,\; x \neq 0 \right\}.$$

2. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$ ja $c \in \mathbf{R}$. Oletetaan lisäksi, että jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $x \in A$, että $|c - x| > \varepsilon$. Voidaanko todistaa, että $A$ on rajoitettu?

3. Merkitse itseisarvoepäyhtälöillä, että

   (a) luvun $x$ etäisyys luvusta 6 on vähemmän kuin 2,

   (b) luvun $x$ etäisyys luvusta $-2$ on korkeintaan 1 ja luku $x$ on erisuuri kuin $-2$,

   (c) $5\sqrt{x^2+1}$ eroaa luvusta 3 vähemmän kuin $10^{-3}$.

4. Merkitse itseisarvoepäyhtälöillä, että

   (a) luvun $x$ etäisyys luvusta 5 on vähemmän kuin 3 ja luku $x$ on erisuuri kuin 5,

   (b) luvun $x$ etäisyys luvusta $-4$ on korkeintaan 2,

   (c) $2x^2 + 3$ eroaa luvusta 21 vähemmän kuin $10^{-100}$.

5. Mitkä luvut toteuttavat molemmat epäyhtälöt $|x + 1| < 3$ ja $|x - 3| < 2$ ?

6. Osoita, että jos $|x - 2| < 9^{-11}$, niin $|2x^2 - 8| < 9^{-10}$.

7. Osoita, että jos $|x - 1| < 10^{-99}$, niin myös

$$\left| \frac{3}{2x+1} - 1 \right| < 10^{-99}.$$

8. Oletetaan, että $|x - 4| < 9^{-11}$. Miksi tällöin $|x^2 - 16| < 9^{-10}$ ?

9. Etsi sellainen luku $K > 0$, että

$$\left|\frac{x+1}{x+4} - \frac{2}{3}\right| \leq K|x-5|$$

kaikilla $x \in \,]4,6[$.

10. Määritä suurin sellainen $\varepsilon > 0$, että $\mathrm{U}_\varepsilon(a) \subseteq I$, kun

$$\begin{array}{ll} \text{(a)}\ \ a = \tfrac{3}{4},\ I = \left[\tfrac{1}{2}, 1\right[, & \text{(b)}\ \ a = \tfrac{2}{3},\ I = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right], \\ \text{(c)}\ \ a = 5,\ I = \left]-1, \infty\right[, & \text{(d)}\ \ a = 1,\ I = \left]0, 2\right[. \end{array}$$

Tässä tehtävässä vastauksia ei tarvitse perustella täsmällisesti. Esimerkiksi joukkojen sijaintiin lukusuoralla tukeutuva perustelu on riittävä.

11. Määritä suurin sellainen $\varepsilon > 0$, että $\mathrm{U}_\varepsilon(a) \subseteq I$, kun

$$\begin{array}{ll} \text{(a)}\ \ a = 2,\ I = \left]0, 3\right[, & \text{(b)}\ \ a = \tfrac{2}{3},\ I = \left[\tfrac{1}{2}, 1\right], \\ \text{(c)}\ \ a = 0,\ I = \left[-1, 1\right[, & \text{(d)}\ \ a = 1,\ I = \left]-\infty, 4\right[. \end{array}$$

Tässä tehtävässä vastauksia ei tarvitse perustella täsmällisesti. Esimerkiksi joukkojen sijaintiin lukusuoralla tukeutuva perustelu on riittävä.

12. Anna jokin sellainen luku $\delta > 0$, että jos $x \in \mathrm{U}_\delta(4)$, niin

$$\left|\frac{1}{x-3} - 1\right| < 2h$$

aina, kun $|x-4| < h$ (missä $0 < h < 1$).

13. Anna jokin sellainen luku $\delta > 0$, että jos $x \in \mathrm{U}_\delta(2)$, niin

$$\left|x^2 - 4\right| < 2^{-100}.$$

14. Oletetaan, että $|x-a| < 2^{-15}$ ja $|y-a| < 2^{-15}$ ($x, y, a \in \mathbf{R}$). Mitä voit kolmioepäyhtälön avulla päätellä etäisyydestä $|x-y|$?

15. Olkoon $h > 0$. Osoita, että jos $|x-5| < h$ ja $|y-5| < h$, niin $|x-y| < 2h$.

16. Osoita täsmällisesti perustellen, että jos $a < x < b$ ja $a < y < b$, niin $|x-y| < b-a$. Mikä on väitteen geometrinen tulkinta?

17. Osoita, että jos $2 < x < 3$ ja $|x-y| < \frac{1}{2}$, niin $|x^2 - y^2| < 4$.

18. Osoita, että jos $|x-5| < 10^{-100}$ ja $|y-\sqrt{2}| < 10^{-100}$, niin $|xy - 5\sqrt{2}| < 10^{-99}$.

19. Olkoon $n \in \mathbf{Z}_+$ ja $a_j \in \mathbf{R}$, kun $j = 1, 2, \ldots, n$. Osoita, että

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 \leq n \sum_{j=1}^{n} a_j^2.$$

Vihje: Cauchy-Schwarzin epäyhtälö.

20. Osoita Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä käyttäen, että

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{6}\right)^2 \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{6}.$$

## 1.3 Reaalimuuttujan funktioista

1. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{kun } |x| < 1, \\ 3-x, & \text{kun } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Määritä sellaiset reaalilukuvälit $I_1$ ja $I_2$, että funktio $f\colon I_1 \to I_2$

| | |
|---|---|
| (a) on injektio ja surjektio, | (b) on injektio, mutta ei ole surjektio, |
| (c) on surjektio, mutta ei ole injektio, | (d) ei ole injektio eikä surjektio. |

Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa täsmällistä perustelua funktion injektiivisyydelle tai surjektiivisuudelle. Esimerkiksi funktion kuvaajaan tukeutuva perustelu on riittävä.

2. Osoita täsmällisesti (injektion ja surjektion määritelmiin nojautuen), että funktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = 2x - 3$$

on (a) injektio, (b) surjektio.

3. Määritä funktion $f\colon [3, \infty[ \to [2, \infty[$,

$$f(x) = x^2 - 6x + 11$$

käänteisfunktio. Voit olettaa tunnetuksi, että $f$ on bijektio.

4. Olkoon

$$A = \{n^2 + 7 \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Onko olemassa sellaista bijektiota $f\colon A \to \mathbf{N}$, että $f(8) = 8$?

5. Tarkastellaan funktioita $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad \text{ja} \qquad g(x) = x^2 + 1.$$

Määritä joukot $f^{-1}([-1,1])$, $g^{-1}([-1,1])$ ja $(g \circ f)^{-1}([-1,1])$.

6. Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Määritä yhdistetty kuvaus $f \circ f$. Mikä on funktion $f \circ f$ kuvajoukko? Onko $f \circ f$ injektio tai surjektio?

7. Esitä funktio $f\colon \mathbf{R} \to \,]0,1]$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

kolmen funktion yhdistettynä funktiona kahdella eri tavalla.

8. Olkoon $a, b, r \in \mathbf{R}$ ($a \neq 0$) ja tarkastellaan funktioita $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ ja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Osoita, että jos $g(r) = 0$, niin

$$(g \circ f)\left(\tfrac{r-b}{a}\right) = 0.$$

9. Mitkä ovat laajimmat sellaiset joukot, että funktio $f \circ g$ on määritelty, kun

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $g(x) = \cos x$, (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin 2x$?

Entä laajimmat sellaiset joukot, että funktio $g \circ f$ on määritelty?

10. Määritä $\cos x$ käyttämättä laskinta tai taulukkokirjaa, kun tiedetään, että

(a) $\sin x = \frac{4}{5}$ ja $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, (b) $\tan x = \frac{12}{5}$ ja $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

# 2 Reaaliluvut

## 2.2 Reaalilukujen joukon täydellisyys

1. Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{kun } |x| < 1, \\ 3 - 2x^3, & \text{kun } |x| \geq 1. \end{cases}$$
Anna laajin sellainen väli $I \subseteq \mathbf{R}$, että

   (a) $\inf A = 2$ ja $\sup A = 4$, (b) $\inf A = 2$ ja $\sup A = 5$,
   (c) $\inf A = 1$ ja $\sup A = 4$, (d) $\inf A = 1$ ja $\sup A = 5$,

   kun $A = \{f(x) \mid x \in I\}$. Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa täsmällistä perustelua, että infimum ja supremum toteuttavat vaaditut ehdot. Esimerkiksi funktion kuvaajaan tukeutuva perustelu on riittävä.

2. Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} x^2+2, & \text{kun } x \geq 2, \\ 3 - x, & \text{kun } -2 < x < 2, \\ 4 - x^2, & \text{kun } x \leq -2. \end{cases}$$
Anna laajin sellainen väli $I \subseteq \mathbf{R}$, että

   (a) $\inf A = 0$ ja $\sup A = 5$, (b) $\inf A = 0$ ja $\sup A = 6$,
   (c) $\inf A = 1$ ja $\sup A = 5$, (d) $\inf A = 1$ ja $\sup A = 6$,

   kun $A = \{f(x) \mid x \in I\}$. Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa täsmällistä perustelua, että infimum ja supremum toteuttavat vaaditut ehdot. Esimerkiksi funktion kuvaajaan tukeutuva perustelu on riittävä.

3. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$. Onko mahdollista, että
$$\sup A - \inf A < \varepsilon$$
kaikilla $\varepsilon > 0$?

4. Anna sellainen välillä $]1, 2[$ määritelty rationaalifunktio $f$, että

   (a) $\inf A = 0$ ja $\sup A = 1$, (b) $\inf A = -\infty$ ja $\sup A = 0$,
   (c) $\inf A = 1$ ja $\sup A = \infty$, (d) $\inf A = -\infty$ ja $\sup A = \infty$,

   kun $A = \{f(x) \mid x \in ]1, 2[\,\}$. Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa täsmällistä perustelua, että infimum ja supremum toteuttavat vaaditut ehdot. Esimerkiksi funktion kuvaajaan tukeutuva perustelu on riittävä.

5. Olkoot $A, B \subseteq \mathbf{R}$ ($A, B \neq \emptyset$) ylhäältä rajoitettuja joukkoja. Aseta suuruusjärjestykseen $\sup A$, $\sup A \cup B$ ja $\sup A \cap B$. Vastaus on perusteltava.

6. Olkoot $A, B \subseteq \mathbf{R}$ $(A, B \neq \emptyset)$ rajoitettuja joukkoja. Osoita, että jos $A \subseteq B$, niin

$$\inf B \;\leq\; \inf A \;\leq\; \sup A \;\leq\; \sup B.$$

7. Anna esimerkki sellaisesta joukosta $A \subseteq \mathbf{R}$, että

$$\inf A = \min A \qquad \text{ja} \qquad \sup A = \max A,$$

mutta $\min\{x^2 \mid x \in A\}$ ei ole olemassa. Tässä tehtävässä supremumin ja infimumin arvoja ei tarvitse perustella täsmällisesti. Esimerkiksi joukkojen sijaintiin lukusuoralla tukeutuva perustelu on riittävä.

8. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$ $(A \neq \emptyset)$ sellainen joukko, että $\inf A \neq \inf(A \cup \{2\})$. Ovatko $\min A$ ja $\min(A \cup \{2\})$ olemassa?

9. Olkoot $I_1$ ja $I_2$ suljettuja reaalilukuvälejä ja

$$A \;=\; \{z \in \mathbf{R} \mid z = x + y, x \in I_1, y \in I_2\}\,.$$

Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että

$$\sup A - \inf A \;\geq\; \sup I_1 - \inf I_2.$$

10. Määritä täsmällisesti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \big\{y \in \mathbf{R} \;\big|\; y = 2 + |\sin x|\,,\; x \in \mathbf{R}_+\big\}\,.$$

11. Määritä täsmällisesti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \big\{y \in \mathbf{R} \;\big|\; y = 1 + 2\cos^2 x,\; x \in [5, \infty[\big\}\,.$$

12. Määritä täsmällisesti perustellen $\sup A$ ja $\sup B$, kun

$$A = \left\{y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y = \sin\frac{1}{x}, x \in \mathbf{R}_+\right\} \;\text{ ja }\; B = \left\{y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y = \frac{8}{x+3}, x \in [1, \infty[\right\}.$$

Anna joukoille myös jokin alaraja.

13. Olkoon

$$A \;=\; \left\{\frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+\right\}.$$

Määritä $\min A, \inf A, \max A$ ja $\sup A$.

14. Määritä joukkojen

$$A = \big\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4 \leq 0\big\} \;\text{ ja }\; B = \big\{x \in \mathbf{R}_+ \mid (x-3)^2(x-2)(x^2-1) \leq 0\big\}$$

suurin ja pienin alkio sekä supremum ja infimum.

15. Olkoon $f(x) = 1 - x^2$ sekä

$$A = \{ f(x) \,|\, x \in [1,2] \} \quad \text{ja} \quad B = \{ f(x) \,|\, x \in \mathbf{R} \} .$$

Määritä $\sup A, \inf A, \sup B$ ja $\inf B$.

16. Määritä täsmällisesti perustellen $\inf A$, kun

$$\text{(a)}\ A = \left\{ \frac{n^2+7}{3n-1} \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}, \qquad \text{(b)}\ A = \left\{ \frac{n^2+9}{3n-1} \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$

17. Olkoon $f$ sellainen funktio, että $f(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja

$$f(x) \le \frac{1}{|x|} \qquad \forall x \neq 0.$$

Olkoon edelleen $A = \{f(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$. Osoita, että $\inf A \notin A$.

18. Voidaan helposti osoittaa, että 2 on joukon

$$A = \left\{ \frac{4n-2}{2n+1} \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$$

yläraja. Osoita vastaoletusta käyttämällä, että mikään luku $2 - t$ $(t > 0)$ ei voi olla joukon $A$ yläraja.

19. Voidaan helposti osoittaa, että 8 on joukon

$$A = \left\{ \frac{8n-5}{n+2} \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$$

yläraja. Osoita vastaoletusta käyttämällä, että mikään luku $8 - t$ $(t > 0)$ ei voi olla joukon $A$ yläraja.

20. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$, alhaalta rajoitettu joukko ja $m = \inf A$. Osoita, että jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $a \in A$, että $a < m + \varepsilon$.

21. Olkoon $A$ tehtävän 18 joukko. Osoita, että mikään luku $2 - t$ $(t > 0)$ ei voi olla joukon $A$ yläraja antamalla jokin sellainen joukon $A$ alkio $a$, että $a > 2 - t$.

22. Olkoon $A$ tehtävän 19 joukko. Osoita, että mikään luku $8 - t$ $(t > 0)$ ei voi olla joukon $A$ yläraja antamalla jokin sellainen joukon $A$ alkio $a$, että $a > 8 - t$.

23. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$ jokin sellainen joukko, että $\inf A = 1$ ja $\sup A = 6$. Osoita lauseta 2.5 käyttäen, että jos

$$B = \{y \in \mathbf{R} \mid y = x + 2, x \in A\} ,$$

niin $\inf B = 3$ ja $\sup B = 8$.

24. Olkoot $A, B \subseteq \mathbf{R}$ ($A, B \neq \emptyset$) sellaisia rajoitettuja joukkoja, että $\sup A < \sup B$. Osoita, että on olemassa sellainen joukon $B$ alkio $b$, että $a < b$ kaikilla $a \in A$.

25. Määritä täsmällisesti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$\text{(a)}\quad A = \left\{ \frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\}, \qquad \text{(b)}\quad A = \left\{ \frac{2n+1}{3n-1} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\},$$

$$\text{(c)}\quad A = \left\{ \frac{3n-2}{2n+7} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\}, \qquad \text{(d)}\quad A = \left\{ \frac{3n+7}{2n-1} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$

26. Määritä täsmällisesti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$\text{(a)}\ A = \left\{ y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y = \frac{x+2}{x+1},\ x \geq 0 \right\}, \ \text{(b)}\ A = \left\{ y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y = \frac{4x+3}{2x+1},\ x \geq 0 \right\}.$$

27. Määritä täsmällisesti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$\text{(a)}\ A = \left\{ \frac{n^2+4}{n^2+3} \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}_+ \right\}, \qquad \text{(b)}\ A = \left\{ \frac{3}{m} - \frac{2}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$

28. Olkoon

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left]2 - \tfrac{1}{k}, 3 + \tfrac{2}{k}\right[.$$

Määritä täsmällisesti perustellen (a) $\sup A$, (b) $\inf A$.

29. Olkoon

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left]\tfrac{(-1)^k}{k+2}, k - \tfrac{5}{k+1}\right[.$$

Määritä täsmällisesti perustellen (a) $\sup A$, (b) $\inf A$.

30. Todista, että kahden erisuuren reaaliluvun välissä on aina irrationaaliluku. Voit olettaa tunnetuksi, että esimerkiksi $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku.

# 3 Lukujonon raja-arvo

## 3.1 Määritelmä

1. Osoita, että
$$\left|\frac{6n+1}{2n+3}-3\right| < \frac{4}{n} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$
ja määritä jokin sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että
$$\left|\frac{6n+1}{2n+3}-3\right| < 10^{-87}$$
aina, kun $n > n_0$.

2. Olkoon
$$x_n = \frac{6n-5}{2n+5} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$
Määritä jokin sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $|x_n - 3| < 0{,}01$ aina, kun $n \geq n_0$.

3. Olkoon
$$x_n = \frac{3n-5}{9n+4} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$
Määritä jokin sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < 0{,}001$ aina, kun $n \geq n_0$.

4. Olkoon
$$x_n = \frac{2n+3}{n+1} \qquad \text{ja} \qquad y_n = \frac{2n+7}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$
Määritä jokin sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $|x_n - 2| < 0{,}01$ aina, kun $n \geq n_0$, ja jokin sellainen $n_1 \in \mathbf{Z}_+$, että $|y_n - 2| < 0{,}01$ aina, kun $n \geq n_1$.

5. Olkoon
$$x_n = \frac{3n+2}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$
Määritä jokin sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $|x_n - 3| < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_0$ ja (a) $\varepsilon = 0{,}1$, (b) $\varepsilon = 0{,}01$, (c) $\varepsilon = 0{,}001$.

6. Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään nojautuen, että

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1,$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2n}{2n} = -1,$ (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1.$

7. Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään nojautuen, että
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}+5}{\sqrt{n}} = 3.$$

8. Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)=0, \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=2.$$

9. Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+7n+2}{2n^2+3n+5}=\frac{1}{2}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n+1}{2n^3-n^2+3}=\frac{1}{2},$$

$$\text{(c)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{n^2+n+2}=2, \qquad \text{(d)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{6n^4+n^3+3}{2n^4-n+1}=3,$$

$$\text{(e)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{3n-4}=\frac{4}{3}, \qquad \text{(f)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{n^2-2n+4}=3.$$

10. Olkoon $A\subseteq\mathbf{R}$ sellainen epätyhjä joukko, että $\sup A=5$. Osoita täsmällisesti perustellen, että on olemassa sellainen lukujono $(a_n)$, että $a_n\in A$ kaikilla $n\in\mathbf{Z}_+$ ja

$$\lim_{n\to\infty}a_n=5.$$

## 3.2 Perusominaisuuksia

1. Olkoot $(x_n)$ ja $(y_n)$ sellaisia lukujonoja, että

$$y_n=|x_n| \qquad \forall n\in\mathbf{Z}_+.$$

Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että (a) jos lukujono $(y_n)$ suppenee, niin myös lukujono $(x_n)$ suppenee, ja (b) jos lukujono $(x_n)$ suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,$$

niin myös lukujono $(y_n)$ suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty}y_n=|x|.$$

2. Olkoon

$$x_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1+(-1)^n} \qquad \forall n\in\mathbf{Z}_+.$$

Osoita, että lukujono $(x_n)$ hajaantuu.

3. Tutki, suppeneeko lukujono $(x_n)$, kun

$$\text{(a)}\ x_n=\sin(n\pi)+\cos(n\pi), \qquad \text{(b)}\ x_n=n^{-\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|}.$$

4. Määritä raja-arvo
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2}-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)^n$$
tai osoita, että lukujono hajaantuu.

5. Olkoon
$$y_n = \frac{x_n}{n} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$
Osoita (esimerkillä), että lukujono $(y_n)$ voi supeta, vaikka lukujono $(x_n)$ hajaantuu.

6. Olkoot $(x_n)$, $(y_n)$ ja $(z_n)$ sellaisia lukujonoja, että
$$|x_n - y_n| \;\le\; z_n \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$
Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos lukujonot $(x_n)$ ja $(z_n)$ suppenevat, myös lukujono $(y_n)$ suppenee.

7. Olkoot $(x_n)$ ja $(y_n)$ rajoitettuja lukujonoja. Osoita, että myös lukujonot $(x_n + y_n)$ ja $(x_n y_n)$ ovat rajoitettuja.

8. Tutki, suppeneeko lukujono $(x_n)$, kun

   (a) $x_n = n + (-1)^n n$, (b) $x_n = 1 + n^{(-1)^n}$.

9. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos lukujono $(x_n)$ ei ole rajoitettu, niin kaikki lukujonon $(x_n)$ osajonot hajaantuvat.

10. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jokaisella lukujonolla on ainakin yksi suppeneva osajono.

11. Oletetaan, että
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$
Osoita, että vain äärellinen määrä jonon $(x_n)$ jäseniä voi kuulua väliin $[1,\ 1{,}999]$.

12. Osoita, että jos $0 < t < 1$ ja
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 5,$$
niin vain äärellinen määrä lukujonon $(x_n)$ jäseniä voi kuulua väliin $[4, 5 - t]$.

13. Lukujonosta $(x_n)$ oletetaan, että
$$x_1 = 3 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$
Osoita täsmällisesti perustellen, että lukujonon $(x_n)$ termien joukossa on suurin luku.

14. Anna esimerkki sellaisesta lukujonosta $(x_n)$, että

$$|x_1| = 1 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

mutta lukujonon $(x_n)$ termien joukossa ei ole suurinta lukua. Tässä tehtävässä tuloksia ei tarvitse perustella täsmällisesti (eli riittää antaa vaadittu esimerkki).

15. Lukujonosta $(x_n)$ oletetaan, että

$$x_1 = 0 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 7.$$

Osoita täsmällisesti perustellen, että lukujonon $(x_n)$ termien joukossa on pienin luku.

16. Anna esimerkki sellaisesta lukujonosta $(x_n)$, että jonon $(x_n)$ termien joukossa ei ole pienintä lukua ja

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 7.$$

Tässä tehtävässä tuloksia ei tarvitse perustella täsmällisesti (eli riittää antaa vaadittu esimerkki).

17. Oletetaan, että lukujono $(x_n)$ suppenee ja

$$1 < \lim_{n\to\infty} x_n < 2.$$

Osoita, että on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $1 < x_n < 2$ kaikilla $n > n_0$.

18. Anna esimerkki sellaisesta lukujonosta $(x_n)$, että

$$x_n < 3 \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+ \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 3.$$

Tässä tehtävässä tuloksia ei tarvitse perustella täsmällisesti (eli riittää antaa vaadittu esimerkki).

19. Todista täsmällisesti perustellen, että jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|x_n| > \frac{|x|}{2} \qquad \forall n > n_0\,.$$

20. Osoita täsmällisesti perustellen, että jos $\lim_{n\to\infty} x_n = -4$, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|x_n| > 3 \qquad \forall n > n_0.$$

## 3.3 Laskusääntöjä

1. Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään perustuen, että jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, niin
$$\lim_{n\to\infty} x_n^3 = x^3.$$

2. Anna esimerkki sellaisista lukujonoista $(x_n)$ ja $(y_n)$, että $x_n < y_n$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 3.$$

3. Olkoot $A \subseteq \mathbf{R}$ ja $B \subseteq \mathbf{R}$ sellaisia epätyhjiä joukkoja, että $a \leq b$ kaikilla $a \in A$ ja kaikilla $b \in B$. Oletetaan lisäksi, että on olemassa sellaiset lukujonot $(a_n)$ ja $(b_n)$, että $a_n \in A$, $b_n \in B$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$
Todista täsmällisesti perustellen, että
$$\sup A = \inf B.$$

4. Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään nojautuen, että jos $x_n \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0,$$
niin
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^3} = \frac{1}{x^3}.$$

5. Anna esimerkki sellaisista lukujonoista $(x_n)$ ja $(y_n)$, että

   (a) $x_n \to 0, y_n \to 0$ ja $x_n/y_n \to 0$, (b) $x_n \to 0, y_n \to 0$ ja $x_n/y_n \to 3$.

   Huom. Riittää määrittää kyseiset raja-arvot. Suppenemistuloksia ei tarvitse perustella nojautumalla suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään.

6. Osoita suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään perustuen, että jos $x_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x > 0,$$
niin
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{x_n}}{2x_n} = \frac{1+\sqrt{x}}{2x}.$$

7. Määritä raja-arvo
$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+2n+7}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{n^2+3} - \frac{n^2+1}{n+2}\right)$$
tai osoita, että lukujono hajaantuu.

8. Määritä raja-arvo

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+(n+1)\cos(n\pi)}{n}, \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+n\cos(n\pi+\pi)}{3n+1}$$

tai osoita, että lukujono hajaantuu.

9. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos lukujono $(x_n)$ hajaantuu ja

$$y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

niin myös lukujono $(y_n)$ hajaantuu.

10. Määritä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n-1}{a^n+2} \qquad (a \in \mathbf{R}).$$

11. Määritä

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}, \quad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^n}{1+2^{2n}}, \quad \text{(c)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}.$$

12. Määritä

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-5)}{9n-3}}, \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

13. Määritä

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+4}-n\right), \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right).$$

14. Määritä sellainen vakio $b \in \mathbf{R}$, että

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+bn}-\sqrt{n^2+n}\right) = 3.$$

15. Määritä

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}, \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right).$$

16. Määritä

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2+\cos(\pi+\sin(n+\pi))}{n}, \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+(-1)^n+\sin(n+\pi)}{n^3+2}.$$

17. Määritä

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+\sin k}.$$

18. Olkoot $(x_n)$ ja $(y_n)$ sellaisia lukujonoja, että $(x_n)$ suppenee ja

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Osoita suppiloperiaatetta käyttäen, että lukujono $(y_n)$ suppenee.

19. Olkoon $(x_n)$ sellainen lukujono, että

$$|2x_n - n| < 2020 \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Määritä

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n}{n}$$

ja todista tulos suoraan lukujonon raja-arvon määritelmään nojautuen.

20. Tarkastellaan seuraavaa päättelyä:

> Olkoon $(z_n)$ sellainen lukujono, että
>
> $$\forall \varepsilon > 0\colon\ 1 + \varepsilon < z_n < 1 + 3\varepsilon.$$
>
> Valitsemalla luvut $\varepsilon$ sopivasti (esimerkiksi $\varepsilon_n = 1/n$) voidaan muodostaa sellaiset lukujonot $(x_n)$ ja $(y_n)$, että $x_n \le z_n \le y_n$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja
>
> $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 1.$$
>
> Siis suppiloperiaatteen nojalla myös
>
> $$\lim_{n\to\infty} z_n = 1.$$

Mikä ongelma päättelyssä on?

## 3.4 Monotonisista jonoista

1. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos $(x_n)$ ja $(y_n)$ ovat kasvavia lukujonoja, niin myös lukujono (a) $(x_n + y_n)$, (b) $(x_n y_n)$ on kasvava.

2. Olkoon lukujono $(x_n)$ kasvava. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos

$$\text{(a)}\ \ y_n = x_n + x_{n+1}, \qquad \text{(b)}\ \ y_n = x_n x_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+),$$

niin myös lukujono $(y_n)$ on kasvava.

3. Olkoon

$$x_n = n^2 - 8n \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Tutki, onko olemassa sellaista lukua $k \in \mathbf{Z}_+$, että lukujono $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$ on kasvava.

4. Olkoon $(x_n)$ sellainen lukujono, että

$$x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+ \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Osoita, että lukujonolla $(x_n)$ on aidosti monotoninen osajono.

5. Anna esimerkki suppenevasta lukujonosta, joka ei ole monotoninen.

6. Olkoon

$$x_n = \frac{4n-1}{n} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Osoita monotonisten jonojen peruslausetta käyttäen, että lukujono $(x_n)$ suppenee.

7. Olkoon

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k + k} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Osoita, että lukujono $(x_n)$ suppenee.

8. Oletetaan, että lukujono $(x_n)$ on vähenevä, lukujono $(y_n)$ on kasvava ja $y_n \leq x_n$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$. Osoita, että lukujonot $(x_n)$ ja $(y_n)$ suppenevat.

9. Olkoon $(x_n)$ kasvava ja $(y_n)$ suppeneva lukujono. Oletetaan lisäksi, että on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $x_n \leq y_n$ kaikilla $n \geq n_0$. Osoita täsmällisesti perustellen, että lukujono $(x_n)$ suppenee.

10. Olkoon $(x_n)$ sellainen kasvava lukujono, että sen osajono $(x_{5n})$ suppenee. Osoita täsmällisesti perustellen, että lukujono $(x_n)$ suppenee.

11. Joukko $S \subseteq \mathbf{R}$ on avoin, jos jokaista joukon $S$ pistettä $s$ kohti on olemassa sellainen postiiviluku $\varepsilon > 0$, että

$$\mathrm{U}_\varepsilon(s) \subseteq S.$$

Osoita täsmällisesti perustellen, että jos $(x_n)$ on aidosti kasvava ja ylhäältä rajoitettu lukujono ja

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\},$$

niin joukko $\mathbf{R} \setminus A$ ei ole avoin.

12. Osoita käyttämättä täydellisyysaksioomaa, että jos kasvava ja ylhäältä rajoitettu lukujono $(x_n)$ suppenee, niin joukolla

$$A = \{x_n \,|\, n \in \mathbf{Z}_+\}$$

on pienin yläraja (eli on olemassa $\sup A$).

13. Olkoon $A \subset \mathbf{R}_+$ jokin epätyhjä ylhäältä rajoitettu joukko ja

$$m_n = \min\big\{m \in \mathbf{Z}_+ \mid m \cdot 10^{-n} \text{ on joukon } A \text{ yläraja}\big\} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Osoita, että lukujono $(x_n)$ suppenee, kun $x_n = m_n 10^{-n}$.

14. Olkoon $(x_n)$ tehtävän 13 lukujono. Osoita, että $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup A$.

15. Olkoon $x_1 = 1$ ja

$$x_{n+1} = \sqrt{7x_n + 8} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Osoita, että lukujono $(x_n)$ on kasvava jono, joka suppenee. Mikä on kyseisen jonon raja-arvo?

16. Olkoon $x_1 = 11$ ja

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Osoita, että lukujono $(x_n)$ on vähenevä jono, joka suppenee. Mikä on kyseisen jonon raja-arvo?

17. Olkoon $x_1 = 1$ ja

$$x_{n+1} = \frac{3x_n}{1 + x_n} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Osoita, että lukujono $(x_n)$ suppenee ja määritä $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$.

18. Olkoon

$$x_n \;=\; \cos\big(n^2 + 1\big) + \sin\big(n^2 - 1\big) \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Osoita, että lukujonolla $(x_n)$ on suppeneva osajono.

19. Olkoon $\pi = 3{,}x_1 x_2 x_3 \ldots$ luvun $\pi$ desimaaliesitys ja

$$y_n \;=\; x_n + \cos(n + x_n) \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Osoita, että lukujonolla $(y_n)$ on suppeneva osajono.

20. Osoita, että lukujonolla $(x_n)$ on suppeneva osajono sekä käyttämällä Bolzano-Weierstrassin lausetta että muodostamalla jokin lukujonon $(x_n)$ suppeneva osajono, kun

(a) $x_n = 1 + (-1)^n$, (b) $x_n = \dfrac{n+1}{n+2} + (-1)^n \dfrac{n}{2n+1}$,

(c) $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$, (d) $x_n = \dfrac{n+1}{n+2}\left(\sin \dfrac{2\pi n}{3} + \cos \dfrac{2\pi n}{3}\right)$.

## 3.5 Luvun $e$ määrittely

1. Osoita, että $2 < e < 3$.

2. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}, \quad \text{(b)} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n+4}, \quad \text{(c)} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{7n+3}.$$

3. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n+2}, \quad \text{(b)} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}, \quad \text{(c)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}.$$

4. Olkoon $k \in \mathbf{Z}_+$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n} = e^k.$$

Vihje: Totea, että $1+\frac{2}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$, ja yleistä tulos tapaukseen $1+\frac{k}{n}$.

5. Osoita, että

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} < e^{-1} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

6. Määritä

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

tai osoita, että lukujono hajaantuu.

7. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{2n}, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n}.$$

8. Osoita, että

$$\text{(a)}\ n^n e^{-n} < n!\,, \qquad \text{(b)}\ n!\,e^n > (n+1)^n$$

kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.

9. Osoita, että

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{i!} < \frac{2}{(n+1)!}$$

kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.

10. Osoita tehtävän 9 epäyhtälöiden avulla, että $e$ ei ole rationaaliluku.

Vihje: Tee vastaoletus, että e on rationaaliluku. Tällöin $n!e$ on kokonaisluku, kun $n$ on riittävän suuri. Kerro sitten epäyhtälöt puolittain $n!$ :lla.

## 3.6 Cauchyn jonoista

1. Olkoon
$$x_n = \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$
Osoita suoraan Cauchyn jonon määritelmään nojautuen, että jono $(x_n)$ on Cauchyn jono.

2. Olkoon
$$x_n = \frac{n+1}{n} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$
Tutki suoraan Cauchyn jonon määritelmään nojautuen, onko lukujono $(x_n)$ Cauchyn jono.

3. Olkoon
$$x_n = 1 + (-1)^n \frac{n+1}{n} \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$
Tutki suoraan Cauchyn jonon määritelmään nojautuen, onko lukujono $(x_n)$ Cauchyn jono.

4. Osoita Cauchyn suppenemisehtoa käyttäen, että raja-arvo
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
on olemassa.

5. Olkoon $(x_n)$ sellainen lukujono, että
$$|x_{n+1} - x_n| < 2^{-n} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$
Osoita Cauchyn suppenemisehtoa käyttäen, että lukujono $(x_n)$ suppenee.

6. Olkoon $(x_n)$ sellainen lukujono, että $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ja
$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \qquad \forall n \geq 3.$$
Osoita Cauchyn suppenemisehtoa käyttäen, että lukujono $(x_n)$ suppenee.

7. Oletetaan, että lukujono $(x_n)$ toteuttaa ehdon
$$\forall \varepsilon > 0 \colon \forall p \in \mathbf{Z}_+ \colon \exists N \in \mathbf{Z}_+ \colon \forall n \geq N \colon \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$
Onko $(x_n)$ välttämättä Cauchyn jono?

8. Oletetaan, että $(x_n)$ ja $(y_n)$ ovat Cauchyn jonoja ja $c \in \mathbf{R}$. Todista suoraan Cauchyn jonon määritelmään nojautuen, että myös jono $(cx_n + y_n)$ on Cauchyn jono.

9. Oletetaan, että $(x_n)$ on Cauchyn jono. Todista suoraan Cauchyn jonon määritelmään nojautuen, että myös lukujono $(x_n^2)$ on Cauchyn jono.

10. Oletetaan, että $(x_n)$ ja $(y_n)$ ovat Cauchyn jonoja. Todista suoraan Cauchyn jonon määritelmään nojautuen, että myös jono $(x_n y_n)$ on Cauchyn jono.

## 3.7 Raja-arvokäsitteen laajentaminen

1. Osoita suoraan raja-arvon määrittelyyn perustuen, että

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{2n-1} = \infty$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-4}{n^3+2n-1} = \infty$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+5n-1}{3n^2-2} = \infty$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^6-5}{n^5+2n^4+3} = \infty$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{-2n} = -\infty$, (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2n^3}{5n^2-3} = -\infty$.

2. Anna esimerkki sellaisista lukujonoista $(x_n)$ ja $(y_n)$, että

(a) $x_n \to \infty, y_n \to -\infty$ ja $x_n + y_n \to 3$, (b) $x_n \to \infty, y_n \to 0$ ja $x_n y_n \to -2$.

Huom. Riittää määrittää kyseiset raja-arvot. Suppenemistuloksia ei tarvitse perustella nojautumalla suoraan määritelmään.

3. Anna esimerkki sellaisista lukujonoista $(x_n)$ ja $(y_n)$, että $x_n \to \infty$, $y_n \to 0$ ja

(a) $x_n y_n \to \infty$, (b) $x_n y_n \to 4$, (c) $x_n y_n \to 0$.

Huom. Riittää määrittää vaadittavat raja-arvot. Suppenemistuloksia ei tarvitse perustella nojautumalla suoraan määritelmään.

4. Anna esimerkki sellaisista lukujonoista $(x_n)$ ja $(y_n)$, että $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ ja

(a) $x_n/y_n \to \infty$, (b) $x_n/y_n \to 2$, (c) $x_n/y_n \to 0$.

Huom. Riittää määrittää vaadittavat raja-arvot. Suppenemistuloksia ei tarvitse perustella nojautumalla suoraan määritelmään.

5. Olkoon

$$x_n = \frac{a^n}{n^k} \qquad (a > 1, k \in \mathbf{Z}_+).$$

Osoita täsmällisesti perustellen, että $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Vihje: Tarkastele esimerkiksi raja-arvoa $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

6. Osoita täsmällisesti perustellen, että jos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,$$

niin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Onko käänteinen väite tosi eli onko $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ aina, kun $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$?

7. Oletetaan, että $|x_n - y_n| < n$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja $x_n \to \infty$, kun $n \to \infty$. Onko mahdollista, että jono $(y_n)$ suppenee?

8. Onko mahdollista, että lukujono $(x_n)$ on kasvava ja $x_n \to -\infty$, kun $n \to \infty$?

9. Määritä

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{n+1}\right)^n$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^{2n+1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$, (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}$.

10. Osoita suoraan raja-arvon määrittelyyn perustuen, että

(a) jos $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, niin $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$,

(b) jos $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$, niin $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$.

# 4 Funktion raja-arvo

## 4.1 Määritelmä

1. Funktion raja-arvon määritelmän ehdosta

$$\forall\varepsilon > 0\colon \exists\delta > 0\colon |f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < |x - a| < \delta,$$

saadaan kvanttorien järjestystä vaihtamalla ehto

$$\exists\delta > 0\colon \forall\varepsilon > 0\colon |f(x) - A| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < |x - a| < \delta.$$

Tarkoittaako tämä ehto mitään järkevää ja jos, niin mitä?

2. Tarkastellaan väitettä

$$\exists a > 0\colon \forall b > 0\colon \exists c \in \mathrm{U}'_b(d)\colon f(c) \notin \mathrm{U}_a(e),$$

missä $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$. Mitä funktion $f$ raja-arvosta tällöin väitetään? Kirjoita väite myös käyttäen tavanomaisia kirjainsymboleja $\varepsilon, \delta$ jne.

3. Olkoon $f$ välillä $]a, b[$ määritelty funktio ja $x \in\, ]a, b[$. Tarkastellaan ehtoja

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \lim_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)| = 0, \\ &\text{(ii)} \quad \lim_{h\to 0} |f(x+h) - f(x-h)| = 0. \end{aligned}$$

Osoita, että ehto (ii) seuraa ehdosta (i), mutta ehto (i) ei välttämättä seuraa ehdosta (ii).

4. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

(a) $\lim_{x\to 4} (5x + 3) = 23$, (b) $\lim_{x\to 2} (7x - 5) = 9$, (c) $\lim_{x\to 3} (3x + 2) = 11$.

5. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x\to a} (6x + b) \;=\; 6a + b,$$

kaikilla $a, b \in \mathbf{R}$.

6. Voidaan helposti osoittaa, että $f(x) \to 5$, kun $f(x) = x^2 + 1$ ja $x \to 2$. Määritä jokin sellainen luku $\delta > 0$, että

$$|f(x) - 5| \;<\; 0{,}01$$

aina, kun $0 < |x - 2| < \delta$.

7. Määritä jokin sellainen luku $M > 0$, että

$$|2x^2 - 18| \;\le\; M \cdot |x-3| \qquad \forall x \in \,]2,4[\,,$$

ja osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen (yllä olevaa tulosta hyödyntäen), että

$$\lim_{x\to 3}\big(2x^2 - 8\big) = 10.$$

8. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 3} x^2 = 9, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 4}\big(2x^2 - 7\big) = 25, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 2}\big(3x^2 - 4\big) = 8.$$

9. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 2}\big(x^2 + x - 2\big) = 4, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 3}\big(2x^2 - 4x - 5\big) = 1.$$

10. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1}\big(x^3 + 2\big) = 3, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 1}\big(x^4 + 1\big) = 2.$$

11. Etsi sellainen funktio $g$ ja sellainen $\delta > 0$, että $g$ on rajoitettu ja

$$\left|\frac{x}{x-2} - 3\right| \;=\; g(x) \cdot |x-3|$$

kaikilla $x \in \,]3-\delta, 3+\delta[$.

12. Määritä jokin sellainen $h > 0$, että

$$\left|\frac{2x+1}{2x-3} - 5\right| \;\le\; 16\,|x-2| \qquad \forall x \in \,]2-h, 2+h[\,,$$

ja osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen (yllä olevaa tulosta hyödyntäen), että

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{2x-3} = 5.$$

13. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{x+2} = \frac{5}{4}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x+3}{3x-5} = 5, \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{9-4x} = 5.$$

14. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2} = 1, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

15. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+1}{2x+1}=1, \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 1}\frac{4x^2+2}{3x-1}=3, \quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-1}{4x-3}=1.$$

16. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x\to a}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2a}{a^2+1}$$

kaikilla $a \in \mathbf{R}$.

17. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x\to\pi} 3(\pi-x)\cos(x-\tfrac{\pi}{2})=0.$$

18. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 3}\sqrt{x+6} = 3, \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 4}\sqrt{6x+1} = 5, \quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 4}6\sqrt{x+5} = 18.$$

19. Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että jos $a > 0$, niin

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

20. Olkoon $A \in \mathbf{R}$ ja $f$ sellainen funktio, että kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|f(x)-A| < \frac{1}{n}$$

aina, kun $0 < |x| < \frac{1}{n_0}$. Osoita, että

$$\lim_{x\to 0} f(x) = A.$$

## 4.2 Perustuloksia

1. Todista, että jos funktion raja-arvo on olemassa, se on yksikäsitteinen.

2. Olkoon $b > 0$, $I = ]-b,b[$ ja $f$ jokin sellainen välillä $I$ määritelty funktio, että $\lim_{x\to 0} f(x) = A$. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että

(a) jos $f(x) > 0$ kaikilla $x \in I \setminus \{0\}$, niin $A > 0$,
(b) jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in I \setminus \{0\}$, niin $A \geq 0$.

3. Todista, että jos $\lim_{x\to a} f(x) = A$, niin jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } x_1, x_2 \in \mathrm{U}'_\delta(a).$$

4. Osoita täsmällisesti perustellen, että funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \geq 0, \\ -1, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 0$.

5. Osoita täsmällisesti perustellen, että funktiolla

$$f(x) = \cos \frac{1}{3x} \qquad (x \neq 0)$$

ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 0$.

6. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ x, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Tutki täsmällisesti perustellen, onko funktiolla $f$ raja-arvo pisteessä $a$, kun (a) $a = 1$, (b) $a \neq 1$.

7. Todista,että jos raja-arvo $\lim_{x \to a} f(x)$ on olemassa, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $f$ on rajoitettu puhkaistussa ympäristössä $\mathrm{U}'_\delta(a)$.

8. Oletetaan, että

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; 2 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to a} g(x) \;=\; 3.$$

Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) \;=\; 6.$$

9. Oletetaan, että

$$\lim_{x \to a} \; f(x) \;=\; A \;\neq\; 0.$$

Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} \;=\; \frac{1}{A}.$$

10. Oletetaan, että

$$\lim_{x \to a} \; f(x) \;=\; A \;\neq\; 0.$$

Osoita suoraan funktion raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(f(x))^2} \;=\; \frac{1}{A^2}.$$

11. Osoita lausetta 4.12 käyttäen, että funktiolla

$$f(x) \;=\; \sin\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 0$.

12. Määritä

$$\text{(a)}\;\; \lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x - 10}{x^2 + x - 6}, \qquad\qquad \text{(b)}\;\; \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}.$$

13. Olkoon $x \neq 0$. Määritä

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}\right).$$

14. Määritä

$$\lim_{x\to 0}\, (4x^6 + \pi x^2) \cos\frac{x+\pi}{x}.$$

15. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Määritä $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

16. Olkoon $f$ sellainen funktio, että

$$1 \;<\; f(x) - x \;<\; 3 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Määritä

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{f(x)}.$$

17. Olkoon $f$ sellainen funktio, että $|f(x)| \leq x^2$, kun $0 < |x| < 1$. Mitä voidaan sanoa raja-arvosta

$$\text{(a)}\;\; \lim_{x\to 0} f(x), \qquad \text{(b)}\;\; \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}, \qquad \text{(c)}\;\; \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}\,?$$

18. Määritä

$$\text{(a)}\;\; \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{2x}, \qquad \text{(b)}\;\; \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}, \qquad \text{(b)}\;\; \lim_{x\to 0} \frac{\sin px}{\sin qx} \quad (q \neq 0).$$

19. Määritä

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x + \sin x)}{x}.$$

20. Määritä

$$\text{(a)}\;\; \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x}, \qquad \text{(b)}\;\; \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + ax} - 1}{\sin bx} \quad (b \neq 0).$$

## 4.3 Toispuoleiset raja-arvot

1. Tarkastellaan väitettä

$$\forall a > 0 \colon \exists b > 0 \colon \forall c \in \left]0, b\right[ \, : \, f(c) \in \left]-a, a\right[ \, ,$$

missä $a, b, c \in \mathbf{R}$. Mitä funktion $f$ toispuoleisesta raja-arvosta tällöin väitetään? Kirjoita väite myös käyttäen tavanomaisia kirjainsymboleja $\varepsilon$, $\delta$, jne.

2. Osoita suoraan funktion oikean- ja vasemmanpuoleisten raja-arvojen määritelmiin nojautuen, että

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2+} \frac{3x^2 - 5x - 2}{|x - 2|} = 7, \qquad \text{(b)} \lim_{x \to 2-} \frac{3x^2 - 5x - 2}{|x - 2|} = -7.$$

3. Osoita suoraan funktion vasemman- ja oikeanpuoleisten raja-arvojen määritelmiin nojautuen, että

$$\text{(a)} \lim_{x \to 1-} \sqrt{1 - x^2} = 0, \qquad \text{(b)} \lim_{x \to -1+} \sqrt{1 - x^2} = 0.$$

4. Tutki, onko funktiolla

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} \qquad (x \neq 1)$$

raja-arvo pisteessä $x = 1$. Entä onko funktiolla $f$ vasemman- tai oikeanpuoleista raja-arvoa pisteessä $x = 1$? Myönteisessä tapauksessa määritä raja-arvot.

5. Tutki, onko funktiolla

$$f(x) = \frac{|\sin(x - 3)|}{x - 3} \qquad (x \neq 3)$$

raja-arvo pisteessä $x = 3$. Entä onko funktiolla $f$ vasemman- tai oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä $x = 3$? Myönteisessä tapauksessa määritä raja-arvot.

6. Olkoon

$$f(x) = \frac{1 - |x| + |1 - x|}{\sqrt{|1 - x|}} \qquad (x \neq 1).$$

Määritä

$$\lim_{x \to 0} f(x) \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to 1} f(x)$$

tai osoita, että raja-arvoa ei ole olemassa.

7. Määritä

$$\lim_{x \to 1} \sin \tfrac{\pi \lceil x \rceil}{2} \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to 1} \lceil \sin \tfrac{\pi x}{2} \rceil$$

tai osoita, että raja-arvoa ei ole olemassa.

8. Tutki, missä pisteissä $a \in \mathbf{R}$ raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \big( \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \big)$$

on olemassa. Myönteisissä tapauksissa määritä raja-arvo.

9. Määritä

$$\lim_{x \to 0} \frac{\lceil x \rceil}{x} \cdot \frac{\lfloor x \rfloor}{x}.$$

10. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{x \to 0+} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}, \qquad \text{(b)} \lim_{x \to 1-} \frac{\sin \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

## 4.4 Monotoniset funktiot

1. Osoita täsmällisesti perustellen, että funktio

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

on aidosti kasvava välillä $]-\infty, 0]$ ja aidosti vähenevä välillä $[0, \infty[$.

2. Osoita täsmällisesti perustellen, että funktio

$$f(x) = \frac{5}{x+5} \qquad (x \neq -5)$$

on aidosti vähenevä, kun $x > -5$.

3. Tutki, onko yhdistetty funktio $g \circ f$ välillä $I$ aidosti kasvava, aidosti vähenevä vai ei välttämättä kumpaakaan, kun
   (a) $f$ on välillä $I$ aidosti kasvava ja $g$ on välillä $I$ aidosti vähenevä,
   (b) $f$ on välillä $I$ aidosti vähenevä ja $g$ on välillä $I$ aidosti kasvava,
   (c) $f$ ja $g$ ovat välillä $I$ molemmat aidosti väheneviä.

4. Olkoon $I$ jokin reaalilukuväli. Osoita, että jos funktio $f\colon I \to \mathbf{R}$ on aidosti monotoninen, niin $f$ on injektio. Onko mahdollista, että $f$ on injektio, vaikka $f$ ei ole aidosti monotoninen?

5. Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ sellainen aidosti kasvava funktio, että $f(a) = A$ ja $f(b) = B$. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että funktio $f\colon [a, b] \to [A, B]$ on bijektio.

6. Anna esimerkki bijektiosta $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, joka ei ole monotoninen millään reaalilukuvälillä $[a, b]$.

7. Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sellainen kasvava funktio, että $f(x) < f(y)$ aina, kun $x < y$ ja $x, y \in \mathbf{Q}$. Osoita, että $f$ on aidosti kasvava.

8. Olkoot $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sellaisia aidosti kasvavia funktioita, että

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}.$$

Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

9. Olkoon $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ sellainen aidosti kasvava funktio, että

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0.$$

Osoita, että $f(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}_+$.

10. Todista, että jos $f$ on välillä $]a, b[$ kasvava ja alhaalta rajoitettu funktio, niin raja-arvo $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ on äärellisenä olemassa.

## 4.5 Raja-arvokäsitteen laajentaminen

1. Tarkastellaan väitettä

$$\forall a > 1\colon \exists b > 0\colon \forall c > 0\colon \exists d > c\colon\ f(d) \notin \mathrm{U}_b(a),$$

missä $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Mitä funktion $f$ raja-arvosta tällöin väitetään? Kirjoita väite myös käyttäen tavanomaisia kirjainsymboleja $\varepsilon$, $\delta$, $M$ jne.

2. Osoita suoraan raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x-5} = 3, \quad \text{(c)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{3+\cos x}{x} = 0.$$

3. Osoita suoraan raja-arvon määritelmään nojautuen, että jos

$$f(x) > 0 \quad \forall x > 0 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = a > 0,$$

niin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\sqrt{f(x)}}{2f(x)} = \frac{1+\sqrt{a}}{2a}.$$

4. Osoita suoraan raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 3} \frac{x-5}{(x-3)^2} = -\infty.$$

5. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = A \quad (A \in \mathbf{R}),$$

niin

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = A.$$

6. Tarkastellaan väitettä

$$\forall a > 0 \colon \exists b > 0 \colon \forall c > 0 \colon \exists d \in \, ]a - c, a[ \, : f(d) \leq b,$$

missä $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Kertooko väite jotakin järkevää funktion $f$ raja-arvosta ja jos kertoo, niin mitä? Kirjoita väite myös käyttäen tavanomaisia kirjainsymboleja $\varepsilon, \delta, M$ jne.

7. Kirjoita täsmällinen määritelmä sille, että $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$, ja osoita tätä määritelmää käyttäen, että

$$\text{(a)} \lim_{x\to 4+} \frac{x}{x-4} = \infty, \quad \text{(b)} \lim_{x\to 3+} \frac{x-1}{x-3} = \infty, \quad \text{(c)} \lim_{x\to 2+} \frac{3}{x^2-4} = \infty.$$

8. Kirjoita täsmällinen määritelmä sille, että $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$, ja osoita tätä määritelmää käyttäen, että

$$\text{(a)} \lim_{x\to 5-} \frac{3}{5-x} = \infty, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 2-} \frac{x-3}{x-2} = \infty.$$

9. Kirjoita täsmällinen määritelmä sille, että $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$, ja osoita tätä määritelmää käyttäen, että

$$\text{(a)} \lim_{x\to 2+} \frac{3}{2-x} = -\infty, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to -1+} \frac{x}{x+1} = -\infty.$$

10. Osoita suoraan raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)} \lim_{x\to\infty} \bigl(x^2 - 10x - 3\bigr) = \infty, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{1-4x^3} = -\infty.$$

11. Osoita suoraan raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\text{(a)} \lim_{x\to -\infty} \frac{x^6-1}{x^4+2} = \infty, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1} = -\infty.$$

12. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad (b \in \mathbf{R}) \qquad \text{ja} \qquad \lim_{y\to b} g(y) = \infty,$$

niin

$$\lim_{x\to\infty} (g \circ f)(x) = \infty.$$

13. Määritä funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

raja-arvo pisteissä $x = 0$ ja $x = 1$ sekä kun $x \to \infty$.

14. Määritä vakio $a \in \mathbf{R}$ siten, että

$$\lim_{x\to\infty} \left(ax - \sqrt{x^2 + 1}\right) = 0,$$

ja todista tulos suoraan raja-arvon määritelmään nojautuen.

15. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x^2}, \quad \text{(b)} \lim_{x\to\infty} (x^2 + 2)\sin\frac{3}{x^2}, \quad \text{(c)} \lim_{x\to\infty} x \sin\left(\tan\frac{1}{x}\right).$$

16. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}), \qquad \text{(b)} \lim_{x\to\infty} \sqrt{5x} \cdot \sqrt{\tan(2/x)}.$$

17. Olkoon $f$ sellainen funktio, että

$$1 < f(x) - x < 3 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Määritä

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

18. Määritä

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lceil x \rceil}{x} \cdot \frac{\lfloor x \rfloor}{x}.$$

19. Määritä

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\left(1 + (-1)^{\lceil x \rceil} \sin\frac{1}{x^2}\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

tai osoita, että raja-arvoa ei ole olemassa.

20. Määritä

$$\lim_{x\to\infty} \cos\left(\left(1 + (-1)^{\lceil x \rceil} \cos\frac{1}{x^2}\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

tai osoita, että raja-arvoa ei ole olemassa.

# 5 Funktion jatkuvuus

## 5.1 Määritelmä ja perustuloksia

1. Tarkastellaan väitettä

$$\forall a > 0 \colon \exists\, b > 0 \colon \forall c > 0 \colon \exists\, d \in \mathrm{U}_c(a) \colon f(d) \notin \mathrm{U}_b(f(a)),$$

   missä $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Mitä funktion $f$ jatkuvuudesta tällöin väitetään? Kirjoita väite myös käyttäen tavanomaisia kirjainsymboleja $\varepsilon, \delta$ jne.

2. Olkoot $c > 0$ ja $d > 0$ vakioita, $a \in \mathbf{R}$ ja $f$ sellainen funktio, että jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a)| \;<\; c \cdot \varepsilon$$

   aina, kun $|x - a| < d \cdot \delta$. Osoita, että $f$ on jatkuva pisteessä $a$.

3. Olkoon $f$ sellainen funktio, että

$$|f(x) - f(y)| \;\le\; 15\,|x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

   Osoita, että $f$ on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

4. Olkoon $f$ sellainen funktio, että

$$f(x + y) \;=\; f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

   Osoita, että jos $f$ on jatkuva pisteessä $x = 0$, niin $f$ on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

5. Tutki funktion

   (a) $f(x) \;=\; x\lfloor x \rfloor,$ (b) $f(x) \;=\; x^2 + \lfloor x^2 \rfloor$

   jatkuvuutta pisteissä $x = 0$ ja $x = 1$.

6. Tutki funktion

$$f(x) \;=\; \lfloor x + 1 \rfloor - \lceil x - 1 \rceil$$

   jatkuvuutta pisteessä $x = 2$.

7. Tutki funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)\cos(x^{-2})}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

   jatkuvuutta pisteessä $x = 0$.

8. Määritä vakiot $a$ ja $b$ siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1+a|x|}}{x}, & \text{kun } x < 0, \\ b, & \text{kun } x = 0, \\ 1 - a\,|2-x|\,, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 0$.

9. Määritä vakio $b \in \mathbf{R}$ siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x-1 \rfloor, & \text{kun } x \leq \pi, \\ \dfrac{b\sin(x-\pi)}{\pi - x}, & \text{kun } x > \pi, \end{cases}$$

tulee jatkuvaksi pisteessä $x = \pi$.

10. Määritä vakiot $a$ ja $b$ siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\,|x|\cos x + b\,|x| + 2b\sin x}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 4, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 0$.

11. Olkoon $n \in \mathbf{Z}_+$ ja

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1}, & \text{kun } x \neq 1, \\ 3, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Millä indeksin $n$ arvoilla $f_n(x)$ on jatkuva pisteessä $x = 1$?

12. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ -x^2, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

on jatkuva pisteessä $x = 0$.

13. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

ei ole jatkuva, kun $x \neq 0$.

14. Anna esimerkki funktiosta $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, joka on epäjatkuva pisteissä $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ja jatkuva muualla. Tässä tehtävässä funktion jatkuvuutta tai epäjatkuvuutta ei tarvitse perustella täsmällisesti. Esimerkiksi funktion kuvaajaan tukeutuva perustelu on riittävä.

15. Anna esimerkki pisteessä $x = 0$ jatkuvasta funktiosta $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, joka on bijektio, mutta ei ole monotoninen millään välillä $]-a, a[$ $(a > 0)$. Tässä tehtävässä funktion jatkuvuutta tai epäjatkuvuutta ei tarvitse perustella täsmällisesti. Esimerkiksi funktion kuvaajaan tukeutuva perustelu on riittävä.

16. Olkoon $a$ jokin välin $]0,1[$ rationaaliluku ja $b$ jokin välin $]0,1[$ irrationaaliluku. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \\ \dfrac{1}{q}, & \text{kun } x \in \mathbf{Q} \text{ ja } x = \dfrac{p}{q} \ \ (p \neq 0, q > 0) \text{ on supistetussa muodossa,} \end{cases}$$

(a) ei ole jatkuva pisteessä $x = a$ , (b) on jatkuva pisteessä $x = b$.

17. Voidaanko funktio

$$f(x) = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} \qquad (x \neq 0)$$

määritellä pisteessä $x = 0$ siten, että funktiosta $f$ tulee pisteessä $x = 0$ jatkuva?

18. Tutki, onko funktiolla $f\colon \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$,

$$\text{(a)} \ \ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \qquad \text{(b)} \ \ f(x) = \sin \frac{1}{x - 1}$$

pisteessä $x = 1$ oleellinen vai epäoleellinen epäjatkuvuuskohta.

19. Tutki, onko funktiolla

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h}{x - h}$$

pisteessä $x = 0$ oleellinen vai epäoleellinen epäjatkuvuuskohta.

20. Funktio $f$ on jaksollinen, jaksona $\omega > 0$, jos

$$f(x + \omega) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Anna sekä esimerkki epäjatkuvasta jaksollisesta funktiosta, joka saadan jatkuvaksi korjaamalla funktion määrittelyä yksittäisissä pisteissä, että esimerkki epäjatkuvasta jaksollisesta funktiosta, jota ei saada jatkuvaksi korjaamalla funktion määrittelyä yksittäisissä pisteissä.

## 5.2 Jatkuvia funktioita koskevia tuloksia

1. Osoita, että jos funktiot $f$ ja $g$ ovat jatkuvia pisteessä $a$, myös funktio

$$\text{(a)} \ \ h(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \qquad \text{(b)} \ \ h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

on jatkuva pisteessä $a$.

Vihje: Esitä $h$ funktioiden $f$ ja $g$ avulla summaa, erotusta ja itseisarvoa käyttäen.

2. Määritä funktion

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}, \qquad \text{(b)}\ f(x) = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

epäjatkuvuuskohdat välillä $[-\pi, \pi]$.

3. Anna esimerkki (a) kahdesta pisteessä $x = 0$ epäjatkuvasta funktiosta, joiden tulofunktio on jatkuva pisteessä $x = 0$, (b) kahdesta funktiosta, jotka eivät ole jatkuvia missään joukon $\mathbf{R}$ pisteessä, mutta joiden tulofunktio on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

4. Tutki, missä pisteissä $x \in \mathbf{R}$ funktio

$$\text{(a)}\ f(x) = (x^2 + 1)\sin\frac{1}{x}, \qquad \text{(b)}\ f(x) = x\sin\frac{1}{x^2}$$

on epäjatkuva. Ovatko epäjatkuvuuskohdat oleellisia vai epäoleellisia?

5. Olkoon $f$ sellainen funktio, että $f$ on oikealta jatkuva pisteessä $a$ ja on olemassa sellainen $h > 0$, että $f(x) \leq f(a)$ kaikilla $x \in [a, a+h[$. Osoita täsmällisesti perustellen, että jos funktio $g$ on vasemmalta jatkuva pisteessä $f(a)$, niin funktio $g \circ f$ on oikealta jatkuva pisteessä $a$.

6. Perustele täsmällisesti monisteen esimerkkejä, lauseita ja huomautuksia käyttäen, miksi funktio

$$\text{(a)}\ f(x) = \sin\sqrt{x^2 + 1}, \qquad \text{(b)}\ f(x) = \sin\sqrt{|x|}$$

on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

7. Määritä funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin x + 1}}{x - 1}$$

epäjatkuvuuskohdat. Millä väleistä $[0, 1[$, $]0, 1[$, $]0, 1]$, $[1, \infty[$ ja $]1, \infty[$ funktio $f$ on jatkuva?

8. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jatkuvan ja epäjatkuvan funktion yhdistetty funktio on aina epäjatkuva.

9. Tutki, voiko kahden epäjatkuvan funktion yhdistetty funktio olla jatkuva.

10. Olkoot $f$ ja $g$ sellaisia funktioita, että $g$ on aidosti kasvava ja $g \circ f$ on jatkuva koko reaalilukujen joukossa. Osoita, että $f$ on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

11. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, niin

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

12. Olkoon $(x_n)$ lukujono ja $f$ jokin pisteessä $x = 3$ jatkuva funktio. Todista täsmällisesti perustellen, että jos
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 3,$$
niin joukko $\{f(x_n) \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ on rajoitettu.

13. Olkoon $f$ sellainen pisteessä $x = 0$ jatkuva funktio, että
$$|f(x)| \le \frac{1}{x^2} \qquad \forall x \ne 0.$$
Osoita, että $f$ on rajoitettu joukossa $\mathbf{R}$.

14. Olkoon $f$ sellainen pisteessä $x = 1$ jatkuva funktio, että $f(1) = 2$ ja $f(x) \ge |x-1|$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että funktio
$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$
on rajoitettu joukossa $\mathbf{R}$.

15. Olkoon $f\colon [0,\pi] \to \mathbf{R}$ sellainen funktio, että $f$ on oikealta jatkuva pisteessä $x = 0$ ja $|f(x)| > \sin x$ kaikilla $x \in [0,\pi]$. Osoita, että funktio
$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$
on rajoitettu välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.

16. Olkoon $f$ sellainen pisteessä $x = 3$ vasemmalta jatkuva funktio, että
$$f(x) \ge \frac{1}{x-3} \qquad \forall x \ne 3.$$
Osoita, että $f$ on alhaalta rajoitettu joukossa $]-\infty, 3]$.

17. Olkoon $f$ sellainen pisteen $a$ jossakin ympäristössä $\mathrm{U}_\delta(a)$ määritelty funktio, että $f$ on jatkuva pisteessä $a$. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että
    (a) jos $f(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathrm{U}'_\delta(a)$, niin $f(a) > 0$,
    (b) jos $f(x) \ge 0$ kaikilla $x \in \mathrm{U}'_\delta(a)$, niin $f(a) \ge 0$.

18. Olkoon $a \in \mathbf{R}$ ja $f$ sellainen funktio, että $f$ on jatkuva ja $f(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että funktio
$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$
on rajoitettu välillä $]a-\delta, a+\delta[$.

19. Todista, että jos funktio $f$ on vasemmalta jatkuva pisteessä $a$ ja $f(a) < 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) < 0 \qquad \forall x \in \,]a-\delta, a]\,.$$

20. Osoita, että jos funktio $f$ on oikealta jatkuva pisteessä $x = 2$ ja $f(2) = -5$, niin on olemassa sellainen $h > 0$, että

$$f(x) > -6 \qquad \forall x \in [2, 2+h]\,.$$

## 5.3 Suljetulla välillä jatkuvan funktion ominaisuuksia

1. Määritä luvut $a$ ja $b$ siten, että $b - a = \frac{1}{2}$ ja funktiolla

$$f(x) = x^3 - 2x - 2$$

on nollakohta välillä $]a, b[$.

2. Määritä luvut $a$ ja $b$ siten, että $b - a = \frac{1}{4}$ ja yhtälöllä

$$\frac{2x}{1+x^2} = |x-1|$$

on ainakin yksi ratkaisu välillä $]a, b[$.

3. Osoita, että funktiolla

(a) $f(x) = x^5 + 5x^2 - 1$, (b) $f(x) = 2x^5 + x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

on ainakin kolme nollakohtaa.

4. Olkoon $f$ sellainen välillä $[0, 2]$ jatkuva funktio, että

$$0 < f(x) < 2 \qquad \forall x \in [0, 2].$$

Osoita, että on olemassa sellainen $c \in \,]0, 2[$, että $f(c) = c$.

Vihje: Tarkastele sopivaa apufunktiota.

5. Oletetaan, että funktio $f$ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Osoita, että on olemassa sellainen $c \in \,]a, b[$, että $f(c) = c$.

Vihje: Tarkastele sopivaa apufunktiota.

6. Olkoot $f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ ja $g\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ sellaisia jatkuvia funktioita, että

$$f(0) < g(0) \qquad \text{ja} \qquad f(1) > g(1).$$

Osoita, että on olemassa sellainen $c \in \,]0, 1[$, että $f(c) = g(c)$.

Vihje: Tarkastele sopivaa apufunktiota.

7. Olkoon $\omega > 0$. Olkoon lisäksi $f$ sellainen jatkuva funktio, että

$$f(x + \omega) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Osoita, että $f$ on rajoitettu joukossa $\mathbf{R}$.

8. Olkoot $f$ ja $g$ koko reaalilukujoukossa jatkuvia funktiota. Osoita luennoilla ja kurssimonisteessa esitettyjä tuloksia hyödyntäen, että jos

$$0 \leq x_n \leq 5 \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

niin lukujonolla $((g \circ f)(x_n))$ on suppeneva osajono. Esitä selkeästi ja täsmällisesti, mitä tuloksia hyödynnät.

9. Olkoon $f$ sellainen välillä $]2, 8[$ jatkuva funktio, että

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 4 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to 8-} f(x) = -3.$$

Todista täsmällisesti perustellen, että $f$ on rajoitettu välillä $]2, 8[$.

10. Osoita, että funktio

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$$

on rajoitettu joukossa $\mathbf{R}$.

11. Olkoon $f$ sellainen kaikilla $x \in \mathbf{R}$ jatkuva funktio, että raja-arvot

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

ovat äärelliset. Osoita, että $f$ on rajoitettu joukossa $\mathbf{R}$.

12. Olkoon $f$ sellainen kaikilla $x \in \mathbf{R}$ jatkuva funktio, että

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2.$$

Osoita, että $f$ on rajoitettu välillä $[-3, \infty[$.

13. Osoita (vastaesimerkeillä), että kurssimonisteen lauseet 5.25 ja 5.26 eivät ole kääntäen voimassa.

14. Osoita, että funktiolla

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

on joukossa $\mathbf{R}$ suurin ja pienin arvo.

15. Olkoon $f$ sellainen välillä $[a, b]$ jatkuva funktio, että $f(a) = f(b)$. Osoita, että $f$ saa välillä $[a, b]$ kaikki suurimman ja pienimmän arvonsa väliset arvot vähintään kahdesti.

16. Olkoon $f$ välillä $[a, b[$ jatkuva funktio ja

$$g(x) = \max\{f(t) \mid a \leq t \leq x\}$$

kaikilla $x \in [a, b[$. Osoita, että funktio $g$ on jatkuva välillä $[a, b[$.

17. Olkoon $A = \{f(x) \,|\, x \in \mathbf{R}\}$, missä $f$ on sellainen kaikilla $x \in \mathbf{R}$ jatkuva funktio, että

$$f(0) = 5, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 3.$$

Osoita täsmällisesti perustellen, että on olemassa sellainen alkio $s \in A$, että $a \leq s$ kaikilla $a \in A$.

18. Olkoon $f$ sellainen välillä $[3, 7[$ jatkuva funktio, että $f(4) = 4$ ja

$$\lim_{x\to 7-} f(x) \;=\; 7.$$

Todista täsmällisesti perustellen, että on olemassa sellainen $c \in [3, 7[$, että

$$\inf\big\{f(x) \,\big|\, x \in [3, 7[\,\big\} \;=\; f(c).$$

19. Olkooon $f$ sellainen koko reaalilukujoukossa jatkuva ja rajoitettu funktio, että $f$ saa positiivisen arvon ainakin yhdessä pisteessä, ja $g$ sellainen koko reaalilukujoukossa jatkuva funktio, että

$$g(x) \;\geq\; |x| + 1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Todista täsmällisesti perustellen, että jos

$$A \;=\; \left\{\frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; x \in \mathbf{R}\right\},$$

niin on olemassa sellainen alkio $s \in A$, että $a \leq s$ kaikilla $a \in A$.

20. Olkoon $f$ välillä $I$ jatkuva funktio, ja olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ välin $I$ pisteitä. Osoita, että on olemassa sellainen $c \in I$, että

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

## 5.4 Käänteisfunktion jatkuvuudesta

1. Olkoon $f$ välillä $[a, b]$ jatkuva ja aidosti kasvava funktio ja $g$ välillä $[f(a), f(b)]$ jatkuva ja aidosti vähenevä funktio. Osoita, että funktiolla $g \circ f$ on käänteisfunktio välillä $[a, b]$. Mikä on käänteisfunktion on määrittelyväli?

2. Olkoon $f$ välillä $[a, b]$ jatkuva funktio. Osoita, että jos $f$ on bijektio, niin $f$ on aidosti monotoninen välillä $[a, b]$.

3. Anna esimerkki välillä $[0, 1]$ aidosti kasvavasta funktiosta $f$, jolla ei ole käänteisfunktiota $f^{-1}\colon [f(0), f(1)] \to [0, 1]$.

4. Olkoon $f\colon [a, b] \to [A, B]$ jokin välillä $[a, b]$ epäjatkuva funktio. (a) Onko mahdollista, että funktiolla $f$ on välillä $[A, B]$ määritelty käänteisfunktio? (b) Onko mahdollista, että funktion $f$ käänteisfunktio on jatkuva välillä $[A, B]$ (jos käänteisfunktio on olemassa)?

   Vihje: Voit olettaa tehtävän 2 tuloksen tunnetuksi.

5. Määritä käyttämättä laskinta tai taulukkokirjaa

   (a) $\arcsin x$, kun $x = \frac{1}{2}$ ja $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

   (b) $\tan(\arcsin x)$, kun $x = \frac{1}{4}$ ja $x = \frac{1}{2}$.

6. Määritä suorakulmaisen kolmion kateetit, kun hypotenuusa on 5 ja yksi kulma on (radiaaneina) (a) $\arcsin \frac{3}{5}$, (b) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$, (c) $\arccos \frac{3}{5}$.

7. Anna geometrinen perustelu (suorakulmaista kolmiota käyttäen) sille, että

$$\arcsin x + \arccos x = \tfrac{\pi}{2} \qquad \forall x \in \,]0, 1[\,.$$

8. Määritä (perustellen) $\inf A$ ja $\sup A$, kun

   (a) $A = \big\{ y \in \mathbf{R} \;\big|\; y = \arccos |x| + \arcsin \sqrt{1 - x^2},\;\; x \in [-1, 1] \big\}$,

   (b) $A = \big\{ y \in \mathbf{R} \;\big|\; y = \pi - \arccos |x|\,,\; x \in [-1, 1] \big\}$.

9. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \arccos x, & \text{kun } x \in [-1, 0]\,, \\ -\arcsin x, & \text{kun } x \in \,]0, 1]\,. \end{cases}$$

   Anna laajin sellainen väli $I \subseteq [-1, 1]$, että $\sup A = 0$, kun $A = \{ f(x) \,|\, x \in I \}$ (a) ilman täsmällistä perustelua (eli riittää määrittää kysytty väli), (b) täsmällisesti perustellen.

10. Tutki, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor \pi - x \rfloor, & \text{kun } x \le \pi, \\ \arccos \frac{x - \pi}{x}, & \text{kun } x > \pi, \end{cases}$$

   jatkuva pisteessä $x = \pi$.

11. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\Big( x \arccos \frac{1}{x} + \sin\big( x \arccos \frac{1}{x} \big) \Big).$$

12. Osoita täsmällisesti perustellen, että funktiolla

$$f(x) = 4x + 1 - \operatorname{arc\,sin} x$$

on määrittelyalueellaan ainakin yksi nollakohta.

13. Määritä käyttämättä laskinta tai taulukkokirjaa
    (a) $\operatorname{arc\,tan} x$, kun $x = \sqrt{3}$,
    (b) $\cos(\operatorname{arc\,tan} x)$ ja $\sin(\operatorname{arc\,cot} x)$, kun $x = 2\sqrt{2}$.

14. Määritä suorakulmaisen kolmion hypotenuusa ja toinen kateetti, kun toinen kateetti on 5 ja hypotenuusan ja tuntemattoman kateetin välinen kulma on (radiaaneina) (a) $\operatorname{arc\,tan} \frac{5}{12}$, (b) $\operatorname{arc\,tan} 5$, (c) $\operatorname{arc\,cot} 2$.

15. Kotangentin käänteisfunktio $\operatorname{arc\,cot}$ määritellään joskus arkustangentin avulla siten, että

$$\operatorname{arc\,cot} x = \begin{cases} \operatorname{arc\,tan} \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Miten tämä määrittely eroaa kurssimonisteen määrittelystä? Piirrä kurssimonisteessa määritellyn arkuskotangentin ja yllä määritellyn arkuskotangentin kuvaajat samaan koordinaatistoon.

16. Määritä (perustellen) $\inf A$ ja $\sup A$, kun

$$A = \big\{ y \in \mathbf{R} \bigm| y = \pi - |\operatorname{arc\,tan}(x-2)|\,,\ x \in \mathbf{R} \big\}\,.$$

17. Määritä vakiot $a$ ja $b$ siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} a + \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{x^2+1}, & \text{kun } x < 0, \\ \pi, & \text{kun } x = 0, \\ b \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{x}, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 0$.

18. Määritä vakio $b \in \mathbf{R}$ siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{1-x}, & \text{kun } x \neq 1, \\ b, & \text{kun } x = 1, \end{cases}$$

tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 1$, tai osoita, että $f$ on epäjatkuva pisteessä $x = 1$ kaikilla vakion $b$ arvoilla.

19. Osoita täsmällisesti perustellen, että funktiolla

$$f(x) = \arccos x + 2\arctan x - 2x^2$$

on ainakin kaksi nollakohtaa välillä $]-1, 1[$.

20. Osoita täsmällisesti perustellen, että funktiolla

$$f(x) = \arccos |x| + \arctan(x^2) - 1$$

on ainakin kaksi nollakohtaa välillä $]-1, 1[$.

## 5.5 Tasainen jatkuvuus

1. Voidaan helposti osoittaa, että funktio

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

on tasaisesti jatkuva välillä $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right]$. Määritä jokin sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 0{,}01$$

aina, kun $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right]$ ja $|x_1 - x_2| < \delta$.

2. Osoita suoraan tasaisen jatkuvuuden määritelmään nojautuen, että funktio

$$f(x) = x^2 + 5$$

on tasaisesti jatkuva välillä $[0, 3]$.

3. Olkoon $a > 0$. Osoita, että funktio

(a) $f(x) = 3x + 2$, (b) $f(x) = \sqrt{x}$

on tasaisesti jatkuva välillä $[a, \infty[$.

4. Osoita, että funktio

$$f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{2 + x^2}$$

on tasaisesti jatkuva välillä $]2, \infty[$.

5. Osoita, että funktio

$$f(x) = x^2$$

ei ole tasaisesti jatkuva välillä $[1, \infty[$.

6. Todista, että jos funktiot $f$ ja $g$ ovat tasaisesti jatkuvia välillä $I$, myös funktio $f + g$ on tasaisesti jatkuva välillä $I$.

7. Osoita (vastaesimerkillä), että vaikka funktiot $f$ ja $g$ ovat tasaisesti jatkuvia välillä $I$, niin funktio $fg$ ei välttämättä ole tasaisesti jatkuva välillä $I$.

8. Tutki, onko funktio
$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$
tasaisesti jatkuva välillä $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

9. Tutki, onko funktio
$$f(x) = \frac{(\pi - x)\sin 5x}{x \sin(\pi - x)}$$
tasaisesti jatkuva välillä $]0, \pi[$.

10. Anna esimerkki välillä $]5, 7[$ jatkuvasta funktiosta, joka ei ole tällä välillä tasaisesti jatkuva.

# 6 Eksponentti- ja logaritmifunktio

## 6.1 Eksponenttifunktio

1. Määritä

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{2e^x-3}{e^x+5},\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x-2e^{-x}}{x+3e^{-x}},\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to\infty}e^{-2x}\cos x.$$

2. Tutki, onko funktiolla

$$f(x)=\frac{1}{e^{\tan x}+1}\qquad (x\neq \tfrac{\pi}{2}+n\pi, n\in\mathbf{Z})$$

raja-arvo pisteessä $x=\frac{\pi}{2}$. Entä onko funktiolla $f$ vasemman- tai oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä $x=\frac{\pi}{2}$? Myönteisessä tapauksessa määritä raja-arvot.

3. Olkoon $f$ sellainen funktio, että

$$|f(x)-e^x|<1\qquad \forall x>0.$$

Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f(2x)}=0.$$

4. Osoita, että funktiolla

$$f(x)=e^x-x-3$$

on ainakin 2 nollakohtaa.

5. Määritä

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}\ \ (a\in\mathbf{R}),\quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\sqrt{2x^2}},\quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\tan x}.$$

Tehtävissä 6 – 10 tarkastellaan *hyperbolisia funktioita* $\sinh x$ (*hyperbolinen sini*), $\cosh x$ (*hyperbolinen kosini*) ja $\tanh x$ (*hyperbolinen tangentti*). Funktiot määritellään eksponenttifunktion avulla siten, että

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad \text{ja}\quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

kaikilla $x\in\mathbf{R}$. Hyperboliset funktiot muistuttavat monilta ominaisuuksiltaan trigonometrisia funktioita.

6. Osoita, että

$$\text{(a)}\ \cosh^2 x-\sinh^2 x=1,\qquad \text{(b)}\ \sinh(2x)=2\sinh x\cosh x$$

kaikilla $x\in\mathbf{R}$.

7. Osoita, että
$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$$
kaikilla $n \in \mathbf{Z}$ ja kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

8. Osoita hyberbolisten funktioiden eksponenttiesityksiä käyttäen, että
$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

9. Osoita, että
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{\sin x} = 1.$$

10. Tutki, onko funktiolla $\sinh x$ käänteisfunktiota, ja jos on, niin mikä on käänteisfunktion määrittelyalue.

## 6.2 Logaritmifunktio

1. Osoita, että funktiolla
$$f(x) = x^2 - \log x - 2$$
on määrittelyalueellaan ainakin 2 nollakohtaa.

2. Määritä
$$\lim_{x\to\infty} \big(\log(3x^2+4) - \log(x^2+2)\big).$$

3. Osoita, että
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$
Vihje: Tee sopiva sijoitus ja hyödynnä lausetta 6.14.

4. Määritä vakio $b > 0$ siten, että funktio
$$f(x) = \begin{cases} \log(2x) - \log(\sin x), & \text{kun } x > 0, \\ \log(be^{x-1}), & \text{kun } x \le 0, \end{cases}$$
tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 0$.

5. Osoita, että jos
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n$$
ja $x_i > 0$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$, niin
$$\prod_{i=1}^{n} x_i \le 1.$$
Vihje: Voit olettaa tunnetuksi, että $\log x \le x - 1$, kun $x > 0$.

Tehtävissä 6 – 10 esiintyvät hyperboliset funktiot $\sinh$, $\cosh$ ja $\tanh$ on määritelty eksponenttifunktiota käsittelevän luvun 6.1 harjoitustehtäväosuudessa. Tehtävissä 8 – 10 esiintyvät funktiot $\operatorname{ar}\sinh x$, $\operatorname{ar}\cosh x$ ja $\operatorname{ar}\tanh x$ ovat vastaavasti *areafunktioita* eli hyperbolisten funktioiden $\sinh x$, $\cosh x$ ja $\tanh x$ käänteisfunktioita.

6. Esitä funktiot $(x > 0)$
$$\sinh(\log x), \quad \cosh(\log x) \quad \text{ja} \quad \tanh(\log x)$$
rationaalifunktioina.

7. Esitä funktio
$$f(x) = \frac{\cosh(\log x) + \sinh(\log x)}{\cosh(\log x) - \sinh(\log x)} \qquad (x > 0)$$
$x$:n polynomina.

8. Olkoon
$$f(x) = \sinh x \qquad \text{ja} \qquad g(x) = \operatorname{ar}\sinh x = \log\big(x + \sqrt{x^2+1}\,\big).$$
Osoita, että $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

9. Olkoon
$$f(x) = \cosh x \qquad \text{ja} \qquad g(x) = \operatorname{ar}\cosh x = \log\big(x + \sqrt{x^2-1}\,\big) \quad (x \geq 1).$$
Osoita, että $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ kaikilla $x \in [1, \infty[$.

10. Olkoon
$$f(x) = \tanh x \qquad \text{ja} \qquad g(x) = \operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1).$$
Osoita, että $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ kaikilla $x \in \,]-1, 1[$.

## 6.3 Yleinen eksponentti-, logaritmi- ja potenssifunktio

1. Osoita, että funktiolla
$$f(x) \;=\; 2^x - x\log 2 - 2$$
on ainakin kaksi nollakohtaa.

2. Määritä vakio $b \in \mathbf{R}$ siten, että funktio
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & \text{kun } x \neq 0, \\ b, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$
tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 1$, tai osoita, että $f$ on epäjatkuva pisteessä $x = 1$ kaikilla vakion $b$ arvoilla.

3. Olkoon $a, b > 0$. Todista, että

$$(ab)^x = a^x b^x \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

4. Olkoon $a > 0$. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{x \to -\infty} \frac{a^x}{a^x + 1}, \qquad \text{(b)} \lim_{x \to \infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}, \qquad \text{(c)} \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

5. Osoita suoraan funktion oikeanpuoleisen raja-arvon määritelmään nojautuen, että

$$\lim_{x \to 2+} 3^x = 9.$$

6. Olkoon $a > 0$ ja $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$. Osoita, että

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

7. Olkoon $f$ sellainen pisteessä $x = 0$ jatkuva funktio, että $f(1) = 2$ ja

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Osoita, että $f(x) = 2^x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

8. Mitkä ovat laajimmat sellaiset joukot, että funktio

(a) $f(x) = \log|4 - x^2|$, (b) (b) $f(x) = \log_2 \log_3 \log_4 x$, (c) $f(x) = \log_x 5$

on määritelty?

9. Olkoon $a, b > 0$, $a, b \neq 1$. Osoita, että

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

10. Olkoon $a > 0, a \neq 1$. Osoita, että

$$\log_a(xy) \; = \; \log_a x + \log_a y \qquad \forall x, y > 0.$$

11. Olkoon $a > 1$. Osoita, että

$$\frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y) \; \leq \; \log_a \frac{x+y}{2} \qquad \forall x, y > 0.$$

12. Määritä

$$\lim_{x \to 0+} \big(\log_2(\cot x) + \log_2(\sin 8x)\big).$$

13. Määritä vakiot $a$ ja $b$ siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} a \arcsin(5^x), & \text{kun } x < 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \\ \log_b\left(\arctan \frac{3^x}{3^x - 1}\right), & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 0$.

14. Osoita, että funktiolla

$$f(x) = x^2 - 4\log_2(x+1) + 1 \qquad (x > -1)$$

on ainakin kaksi positiivista nollakohtaa.

15. Olkoon $a, x > 0$. Osoita, että

$$x^{\log a} = a^{\log x}.$$

16. Osoita, että

$$f(x) = x^{\frac{1}{\log x}} \qquad (x > 0)$$

on vakiofunktio.

17. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{x \to 0+} x^{\frac{\sin 2x}{x \log x}}, \qquad \text{(b)} \lim_{x \to 0} (x+1)^{\frac{\sin x}{2x \log(x+1)}}.$$

Tehtävissä 18 – 20 voit olettaa tunnetuksi luvun 6.2 tehtävän 3 tuloksen

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

18. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad \text{(b)} \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \ (a \in \mathbf{R}), \quad \text{(c)} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^{8x^2+3}.$$

19. Osoita, että jos $\lim_{x \to a} f(x) = 1$, niin

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{(f(x)-1)g(x)}.$$

20. Määritä vakiot $a$ ja $b$ siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a \sin(ex)}{x}, & \text{kun } x < 0, \\ e^2, & \text{kun } x = 0, \\ (1+x)^{\frac{b}{x}}, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 0$.