Analyysi B

Harjoitukset 1, 10.–11.3.2020

1. Olkoot $A \subseteq \mathbf{R}$ ja $B \subseteq \mathbf{R}$ epätyhjiä ja rajoitettuja joukkoja. Todista, että jos
$$\sup A \;=\; \inf B,$$
niin jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellaiset alkiot $a \in A$ ja $b \in B$, että
$$b - a \;<\; \varepsilon.$$
Onko myös käänteinen väite tosi?

2. Määritä vakiot a ja b siten, että funktio
$$f(x) = \begin{cases} a \arccos\left(1 - e^{-x}\right), & \text{kun } x < 0, \\ \pi, & \text{kun } x = 0, \\ e^{x+b} + \arctan\left(e^{\frac{1}{x}}\right), & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$
tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 0$.

3. Määritä derivaatan määritelmää käyttäen $f'(x)$, kun
$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (x > 0).$$

4. Määritä $f'(0)$, kun
$$f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{2^{3x^2} - 1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

5. Olkoon f sellainen pisteessä $x = 0$ derivoituva funktio, että
$$f'(0) = c \quad (c \in \mathbf{R}) \qquad \text{ja} \qquad f(x+y) \;=\; f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$
Oletetaan lisäksi, että f ei ole vakiofunktio. Osoita, että f on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja että
$$f'(x) \;=\; cf(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

6. Tutki, onko funktio
$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$
derivoituva pisteessä $x = 1$. Jos funktio ei ole derivoituva pisteessä $x = 1$, niin tutki oikean- ja vasemmanpuoleisen derivaatan olemassaoloa.

7. Osoita, että funktio
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kun } x > 0, \\ x^2 + x, & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$
on derivoituva mutta ei ole kahdesti derivoituva pisteessä $x = 0$.

8. Olkoon
$$f(x) = \tan\left(\frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}\right).$$
Ratkaise yhtälö $f'(x) = 0$.