

Analyysi B

Harjoitukset 2, 17.–18.3.2020

1. Määritä funktion

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \quad (x > \frac{1}{2})$$

derivaatta sekä käyttämällä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä että käyttämällä käänteisfunktion derivoimissääntöä.

2. Määritä $f'(\pi)$ ja $g'(0)$, kun

$$f(x) = \arctan(\sin x) \quad \text{ja} \quad g(x) = (x^2 + 2)^{f(x)}.$$

3. Olkoot f ja g sellaisia funktioita, että

$$f(0) = g(0) \quad \text{ja} \quad f'(0) > g'(0).$$

Osoita, että on olemassa $a > 0$ siten, että $f(x) \geq g(x)$ kaikilla $x \in [0, a]$.

4. Osoita, että funktiolla

$$f(x) = 1 + 2\sqrt{3} \arcsin \frac{x}{1+x} - 4 \arctan \sqrt{x}$$

on korkeintaan yksi nollakohta välillä $]0, 1[$.

5. Osoita, että funktiolla

$$f(x) = 2x^5 + 3x^3 - 9x + 1$$

on täsmälleen kaksi positiivista nollakohtaa.

6. Olkoon f sellainen funktio, että $f(1) = 1$ ja

$$f'(x) \leq 2 \quad \forall x \in [1, 4].$$

Osoita, että $f(4) \leq 7$.

7. Osoita, että

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$.

8. Olkoon f koko reaalilukujen joukossa derivoituva funktio. Osoita suoraan raja-arvon määrittelyyn (ja väliarvolauseeseen) perustuen, että jos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0,$$

niin

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$