

Analyysi B

Harjoitukset 3, 26.–27.3.2019

1. Osoita, että

$$2 \arcsin \sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + \arcsin(2x - 1) \quad \forall x \in [0, 1].$$

2. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2012} - 3x^{704} + 2}{6x^{30} - 13x^{10} + 7}.$$

3. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}.$$

4. Funktiosta f tiedetään, että f on derivoituva ja f' on jatkuva pisteessä $x = 0$, $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 2$. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{x}}.$$

5. Tutki funktion derivaattaa tarkastelemalla, onko funktio

$$f(x) = (\log(1 + x))^x \quad (x > 0)$$

aidosti monotoninen, kun $x > 0$.

6. Olkoon $a > 0$ ja f sellainen derivoituva funktio, että $f'(x) \geq 1 + a$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että on olemassa sellainen $c \in \mathbf{R}$, että $f(x) > x$ aina, kun $x > c$.

Vihje: Tarkastele erotusta $f(x) - x$.

7. Määritä funktion

$$f(x) = \arcsin(x^2 - x)$$

paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu.

8. Määritä funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^{\log x}, & \text{kun } x > 0, \\ \arcsin x, & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$

paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu.