

Analyysi B

Harjoitukset 4, 2.–3.4.2019

1. Arvioi ylä- ja alasummaa käyttämällä funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x > 0, \\ x^2 + 1, & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$

kuvaajan ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa välillä $[-2, 2]$, kun jako on tasavälinen ja osavälien lukumäärä $n = 4$.

2. Anna jokin välin $[-1, 2]$ jako, joka sisältää porrasfunktion

$$f(x) = \lfloor x^2 \rfloor - 1$$

porraspisteet välillä $[-1, 2]$, ja määritä funktion f porrasintegraali yli välin $[-1, 2]$.

3. Anna esimerkki sellaisesta välin $[-2, 4]$ porrasfunktioista f , että

$$\int_{-2}^0 f = 6, \quad \int_{-2}^1 f = \int_{-2}^2 f = 8 \quad \text{ja} \quad \int_{-2}^4 f = 0.$$

4. Olkoon $f(x) = |x + 1|$. Anna esimerkki sellaisista välin $[-3, 3]$ porrasfunktioista g ja h , että $g \leq f \leq h$ välillä $[-3, 3]$ ja

$$\int_{-3}^3 h - \int_{-3}^3 g = 10.$$

5. Anna esimerkki sellaisista funktioista f ja g , että

$$I_U(f + g, [2, 4]) < I_U(f, [2, 4]) + I_U(g, [2, 4]).$$

Tässä tehtävässä yläintegraalien arvoja ei tarvitse perustella täsmällisesti. Esimerkiksi funktioiden kuvaajiin tai monisteen esimerkkeihin tukeutuva perustelu on riittävä.

6. Olkoon f välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos g on sellainen välin $[a, b]$ porrasfunktio, että

$$\int_a^b g \leq I_L(f, [a, b]),$$

niin $g \leq f$ välillä $[a, b]$.

7. Olkoon $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A, \\ 0, & \text{kun } x \in [0, 1] \setminus A, \end{cases}$$

on Riemann-integroituva välillä $[0, 1]$.

8. Olkoon $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sellainen funktio, että $f(0) = 0$ ja f on jatkuva pisteessä $x = 0$ sekä Riemann-integroituva jokaisella osavälillä $[a, 3]$ ($0 < a < 3$). Todista, että f on Riemann-integroituva välillä $[0, 3]$.