

## Analyysi B

Harjoitukset 5, 9.–10.4.2019

1. Osoita Riemannin ehtoa käyttäen,<sup>1</sup> että funktio  $e^x$  on Riemann-integroituva välillä  $[0, b]$  ( $b > 0$ ) ja

$$\int_0^b e^x dx = e^b - 1.$$

Vihje: Ks. esimerkki 5.6.

2. Olkoon  $f(x) = 2x^2$ . Anna esimerkki sellaisista välillä  $[2, 6]$  määritellyistä porrask-funktioista  $g$  ja  $h$ , että  $g \leq f \leq h$  ja

$$\int_2^6 h - \int_2^6 g \leq 10^{-2}.$$

3. Tutki, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \lfloor \tan x \rfloor}, & \text{kun } x \in [0, \frac{\pi}{2}[ , \\ 0, & \text{kun } x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Riemann-integroituva välillä  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

4. Olkoon  $f$  sellainen välillä  $[a, b]$  rajoitettu funktio, että

$$\sup\{f(x) \mid x \in [c, d]\} - \inf\{f(x) \mid x \in [c, d]\} \leq d - c$$

aina, kun  $[c, d] \subseteq [a, b]$ . Todista, että  $f$  on Riemann-integroituva välillä  $[a, b]$ .

5. Osoita todeksi tai epätodeksi, että jos funktio  $f$  on jatkuva pisteessä  $x = 0$ , niin on olemassa sellainen  $a > 0$ , että  $f$  on Riemann-integroituva välillä  $[0, a]$ .

6. Onko mahdollista, että funktio  $|f|$  on Riemann-integroituva välillä  $[a, b]$ , vaikka  $f$  ei ole Riemann-integroituva välillä  $[a, b]$ ?

7. Osoita, että jos  $f$  ja  $g$  ovat välillä  $[a, b]$  Riemann-integroituvia funktioita, niin myös funktio  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  on Riemann-integroituva välillä  $[a, b]$ .

Vihje: Esitä funktio  $h$  käyttäen funktioita  $f$  ja  $g$  sekä itseisarvofunktiota.

8. Tiedetään, että

$$\int_0^1 f = 3, \quad \int_0^2 f = 1 \quad \text{ja} \quad \int_2^6 f = 5.$$

Määritä

$$(a) \int_0^6 f, \quad (b) \int_1^2 f, \quad (c) \int_1^6 f, \quad \text{ja} \quad (d) \int_2^0 f.$$

---

<sup>1</sup>Lausetta 5.7 voi käyttää.