

Analyysi B

Harjoitukset 6, 16.–24.4.2019

1. Osoita, että

$$1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e.$$

2. Osoita, että

$$\int_1^{e+1} \left(\frac{x}{2e}\right)^x dx \geq \frac{1}{e}.$$

3. Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2 + x^2} dx = 0.$$

4. Olkoon f sellainen välillä $[0, 4]$ Riemann-integroituva funktio, että f on vasemmalta jatkuva pisteessä $x = 4$. Oletetaan lisäksi, että

$$\int_0^4 f(x)g(x) dx = 0$$

aina, kun g on sellainen välillä $[0, 4]$ Riemann-integroituva funktio, että $g(4) = 6$. Osoita, että $f(4) = 0$.

5. Määritä integraalilaskennan väliarvolausetta käyttäen

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{1}{t-a} \int_a^t \sin(t/x) dx \quad (a > 0).$$

6. Olkoon f sellainen välillä $[a, b]$ jatkuva funktio, että

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Osoita, että on olemassa sellainen piste $c \in]a, b[$, että $f(c) = 0$.

7. Määritä integraalilaskennan väliarvolausetta tai yleistettyä integraalilaskennan väliarvolausetta käyttäen

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \int_t^{3t} \frac{e^x}{x^2} dx.$$

8. Osoita yleistettyä integraalilaskennan väliarvolausetta käyttäen, että jos $a > 0$, niin

$$\frac{1}{1+a^6} \left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} \right) < \int_0^a \frac{1}{1+x^2} dx < a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$

Vihje: $1+x^6 = (1+x^2)(1-x^2+x^4)$. Voit olettaa tunnetuksi, että

$$\int_0^a (1-x^2+x^4) dx = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$