Analyysi B

Derivaatta ja integraali

Harjoitustehtäviä

Kevät 2020

Sisältö

1 Esitietoja

1.1 Supremum ja infimum

1. Anna jokin sellainen välillä $[0,4]$ rajoitettu funktio f, että joukossa
$$A = \{f(x) \mid x \in [0,4]\}$$
ei ole suurinta eikä pienintä alkiota. Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa täsmällistä perustelua, että suurinta ja pienintä alkiota ei ole olemassa. Esimerkiksi funktion kuvaajaan tukeutuva perustelu on riittävä.

2. Anna sellainen välillä $]-2,2[$ jatkuva ja rajoitettu funktio f, että

   (a) $\sup A \neq \max A$ ja $\inf A \neq \min A$, (b) $\sup A \neq \max A$ ja $\inf A = \min A$,
   (c) $\sup A = \max A$ ja $\inf A \neq \min A$, (d) $\sup A = \max A$ ja $\inf A = \min A$,

   kun $A = \{f(x) \mid x \in]-2,2[\,\}$. Yllä $\inf A \neq \min A$ ja $\sup A \neq \max A$ tarkoittavat, että $\min A$ ja $\max A$ eivät ole olemassa. Tässä tehtävässä ei tarvitse antaa täsmällistä perustelua, että infimum ja supremum toteuttavat vaaditut ehdot. Esimerkiksi funktion kuvaajaan tukeutuva perustelu on riittävä.

3. Olkoon A rajoitettu ja epätyhjä joukko, $\lambda > 0$ ja $B = \{\lambda a \mid a \in A\}$. Osoita täsmällisesti perustellen, että
$$\text{(a) } \sup B = \lambda \cdot \sup A, \qquad \text{(b) } \inf B = \lambda \cdot \inf A.$$

4. Olkoon A rajoitettu ja epätyhjä joukko, $\lambda < 0$ ja $B = \{\lambda a \mid a \in A\}$. Osoita täsmällisesti perustellen, että
$$\text{(a) } \sup B = \lambda \cdot \inf A, \qquad \text{(b) } \inf B = \lambda \cdot \sup A.$$

5. Olkoot A ja B rajoitettuja ja epätyhjiä joukkoja ja $C = \{a + b \mid a \in A \text{ ja } b \in B\}$. Osoita täsmällisesti perustellen, että
$$\text{(a) } \sup C = \sup A + \sup B, \qquad \text{(b) } \inf C = \inf A + \inf B.$$

6. Osoita täsmällisesti perustellen, että jos $A \subseteq \mathbf{R}$ ja $B \subseteq \mathbf{R}$ ovat sellaisia epätyhjiä joukkoja, että $a \leq b$ kaikilla $a \in A$ ja kaikilla $b \in B$, niin
$$\sup A \leq \inf B.$$

7. Olkoot $A \subseteq \mathbf{R}$ ja $B \subseteq \mathbf{R}$ epätyhjiä ja rajoitettuja joukkoja. Todista, että jos
$$\sup A = \inf B,$$
niin jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellaiset alkiot $a \in A$ ja $b \in B$, että
$$b - a < \varepsilon.$$
Onko myös käänteinen väite tosi?

8. Olkoot $A \subseteq \mathbf{R}$ ja $B \subseteq \mathbf{R}$ sellaisia epätyhjiä ja rajoitettuja joukkoja, että $a \leq b$ kaikilla $a \in A$ ja kaikilla $b \in B$. Todista, että jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellaiset alkiot $a \in A$ ja $b \in B$, että

$$b - a \ < \ \varepsilon,$$

niin

$$\sup A \ = \ \inf B.$$

Tehtävissä 9 ja 10 oletetaan, että $n \in \mathbf{Z}_+$, $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ on sellainen funktio, että $f(0) = 0$ ja $f(1) = 1$, ja

$$A_k = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in \left[\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}\right] \right\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

9. Osoita, että jos f on välillä $[0,1]$ aidosti kasvava, niin

$$\sum_{k=1}^{n} \sup A_k - \sum_{k=1}^{n} \inf A_k \ = \ 1.$$

10. Osoita, että jos f on jatkuva välillä $[0,1]$, niin on olemassa sellainen $c \in [0,1]$, että

$$f(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup A_k.$$

1.2 Raja-arvo ja jatkuvuus

1. Määritä (perustellen) $\max A$, kun

$$A = \left\{ y \in \mathbf{R} \;\middle|\; y = \pi - \arctan|x+1|\,,\ x \in \mathbf{R} \right\}.$$

Osoita myös, että joukossa A ei ole pienintä alkiota.

2. Olkoon $a > 0$. Osoita, että funktiolla

$$f(x) \ = \ e^{2x-a} - \cos x$$

on ainakin yksi nollakohta välillä $]0, a[$.

3. Osoita, että funktio

$$f(x) \ = \ \frac{1}{e^x + |\tan x|}$$

saavuttaa välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ suurimman arvonsa.

4. Määritä vakiot a ja b siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} a \arccos\left(1 - e^{-x}\right), & \text{kun } x < 0, \\ \pi, & \text{kun } x = 0, \\ e^{x+b} + \arctan\left(e^{\frac{1}{x}}\right), & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 0$.

5. Määritä

$$\lim_{x \to 0+} \big(\log(\cot x) + \log(3 \sin x)\big).$$

6. Määritä jokin sellainen väli $[a, b]$, että funktiolla

$$f(x) \;=\; (2 + \cos x)^x - 2 \arctan x$$

on ainakin neljä nollakohtaa välillä $]a, b[$.

7. Ratkaise yhtälö

(a) $x^{3x} = (3x)^x$, (b) $x^{2x} = (x + 6)^x$, (c) $x^{\log x} = \sqrt{e}$.

8. Määritä

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0+} x^{\frac{1}{\log x}}$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0+} x^{\frac{x+2}{\log x}}$.

9. Määritä

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{e^{8x^2} - 1}}{\sqrt[3]{x^2}}$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^{3x} - 1}{x}$ $\quad (a \in \mathbf{R}_+)$.

10. Olkoon f sellainen välillä $]a, b[$ jatkuva funktio, että

$$\lim_{x \to a+} f(x) \;=\; \lim_{x \to b-} f(x) \;=\; 0.$$

Tutki, onko mahdollista, että (a) funktio f saavuttaa välillä $]a, b[$ sekä suurimman että pienimmän arvonsa, (b) funktio f saavuttaa välillä $]a, b[$ vain suurimman tai vain pienimmän arvonsa, (c) funktio f ei saavuta välillä $]a, b[$ suurinta eikä pienintä arvoaan.

2 Funktion derivaatta

2.1 Määritelmiä ja perusominaisuuksia

1. Määritä suoraan derivaatan määritelmää käyttäen $f'(0)$, kun

$$\text{(a)}\ f(x) = \sqrt{x+1}, \qquad \text{(b)}\ f(x) = (2+x)\sin(3x).$$

2. Olkoon $x > 0$. Määritä suoraan derivaatan määritelmää käyttäen $f'(x)$, kun

$$\text{(a)}\ f(x) = \sqrt{x}, \qquad \text{(b)}\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Tutki, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

derivoituva pisteessä $x = 0$. Myönteisessä tapauksessa määritä derivaatan arvo.

4. Tutki, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(2x) \sin \dfrac{1}{x^2}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

derivoituva pisteessä $x = 0$. Myönteisessä tapauksessa määritä derivaatan arvo.

5. Tutki, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

derivoituva pisteessä $x = 0$. Myönteisessä tapauksessa määritä derivaatan arvo.

6. Määritä $f'(0)$, kun

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x^2} - 1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

7. Määritä $f'(0)$, kun

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{3x^2} - 1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

8. Funktio f on jaksollinen, jaksona $\omega > 0$, jos

$$f(x+\omega) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Osoita, että derivoituvan jaksollisen funktion derivaatta on aina jaksollinen.

9. Olkoon f sellainen funktio, että $f'(0) = 3$. Määritä

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2) - f(-x^2)}{x^2}.$$

10. Oletetaan, että $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Osoita, että on olemassa sellainen $h > 0$, että

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < \frac{3}{2}$$

aina, kun $0 < |x| < h$.

11. Olkoon f sellainen pisteessä $x = 0$ derivoituva funktio, että

$$f'(0) = c \quad (c \in \mathbf{R}) \qquad \text{ja} \qquad f(x+y) \;=\; f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Oletetaan lisäksi, että f ei ole vakiofunktio. Osoita, että f on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja että

$$f'(x) \;=\; cf(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

12. Osoita toispuoleisia derivaattoja tutkimalla, että funktio

$$f(x) \;=\; \frac{|x-1|}{x^2 - 2x + 2}$$

ei ole derivoituva pisteessä $x = 1$.

13. Tutki, onko funktio

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

derivoituva pisteessä $x = 1$. Jos funktio ei ole derivoituva pisteessä $x = 1$, niin tutki oikean- ja vasemmanpuoleisen derivaatan olemassaoloa.

14. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{kun } x \le 1, \\ x^2 - 4x + 4, & \text{kun } x > 1, \end{cases}$$

on derivoituva pisteessä $x = 1$, ja määritä $f'(1)$.

15. Tutki, onko funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \log x, & \text{kun } x > 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

oikeanpuoleinen derivaatta olemassa pisteessä $x = 0$.

16. Määritä sellainen vakio $a \in \mathbf{R}$, että jos

$$f(x) \;=\; \begin{cases} ax + 2, & \text{kun } x \leq 1, \\ ax^2 - 3x + 2a, & \text{kun } x > 1, \end{cases}$$

niin raja-arvo $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$ on olemassa. Onko f tällöin derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$?

17. Olkoon f sellainen funktio, että

$$f(1) = 0 \qquad \text{ja} \qquad f'(x) > 1 \quad \forall x \geq 1.$$

Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että on olemassa sellainen $c > 1$, että

$$f(x) > x \qquad \forall x > c.$$

18. Olkoon

$$f(x) = xe^x.$$

Määritä lauseke derivaatalle $f^{(n)}(x)$. Todista saatu tulos induktiolla.

19. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kun } x > 0, \\ x^2 + x, & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$

on derivoituva mutta ei ole kahdesti derivoituva pisteessä $x = 0$.

20. Osoita, että funktio

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^3, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

on kahdesti mutta ei kolmesti derivoituva pisteessä $x = 0$.

2.2 Yhdistetyn funktion derivaatta

1. Miten yhdistetyn funktion derivointisäännön (= lause 2.5) todistusta voidaan yksinkertaistaa, jos esitettyjen oletusten lisäksi oletetaan, että funktio f on aidosti kasvava pisteen x jossakin ympäristössä?

2. Olkoon f sellainen derivoituva funktio, että $f(\pi) = \frac{\pi}{2}$ ja $f'(\pi) = 3$. Määritä funktion $\cos(2x + f(x))$ derivaatta pisteessä $x = \pi$.

3. Olkoon f kaikkialla derivoituva funktio ja $g(x) = f(f(f(f(x))))$. Oletetaan lisäksi, että on olemassa sellaiset pisteet $a \in \mathbf{R}$ ja $b \in \mathbf{R}$, että

$$f(a) = b \qquad \text{ja} \qquad f(b) = a.$$

Osoita, että $g'(a) = g'(b)$.

4. Tutki, onko $f'(0)$ positiivinen, kun

(a) $f(x) = \sin(\sin(\sin(x+1)))$, (b) $f(x) = \cos(x + \cos(x + \cos x))$.

5. Olkoon

$$f(x) = \tan\left(\frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}\right).$$

Ratkaise yhtälö $f'(x) = 0$.

6. Osoita, että funktiolle $f(x) = \tan(3x)$ pätee

$$f''(x) > 18 \cdot f(x) \qquad \forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{6}\right[.$$

7. *Hyperboliset funktiot* $\sinh x$ (*hyperbolinen sini*) ja $\cosh x$ (*hyperbolinen kosini*) sekä $\tanh x$ (*hyperbolinen tangentti*) määritellään eksponenttifunktion avulla siten, että

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{ja} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Hyperboliset funktiot muistuttavat monilta ominaisuuksiltaan trigonometrisia funktioita. Osoita, että

(a) $D(\sinh x) = \cosh x$, (b) $D(\cosh x) = \sinh x$

(c) $D(\tanh x) = 1 - \tanh^2 x$, (d) $D(\tanh x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

8. Anna esimerkki sellaisesta kaikilla $x \in \mathbf{R}$ derivoituvasta funktiosta f, että $f'(0) = 3$ ja $f'(x)$ ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

9. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on derivoituva ja $f'(x)$ on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita lisäksi, että funktio $f'(x)$ ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

10. Määritä $f'(1)$, kun

(a) $f(x) = 4^{2x}$, (b) $f(x) = 3^{4x^2 - 3x}$, (c) $f(x) = 2^{2^{2^x}}$.

2.3 Käänteisfunktion derivaatta

1. Määritä funktion

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \qquad (x > \tfrac{1}{2})$$

derivaatta sekä käyttämällä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä että käyttämällä käänteisfunktion derivoimissääntöä.

2. Määritä funktion

$$f(x) = x^7 + 2x + 1$$

käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ derivaatta pisteissä $x = 1$ ja $x = 4$. Voit olettaa tunnetuksi, että f on aidosti kasvava koko reaalilukujoukossa.

3. Määritä funktion

$$f(x) = x^5 + x^4 + 2x - 4$$

käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ derivaatta pisteissä $x = 0$ ja $x = 48$. Voit olettaa tunnetuksi, että f on aidosti kasvava koko reaalilukujoukossa.

4. Määritä $f'(0)$, kun

$$\text{(a)}\ f(x) = \arcsin\Big(\frac{3-\sin x}{5}\Big), \quad \text{(b)}\ f(x) = \arcsin\Big(\frac{\arctan(2x)}{1+x^2}\Big).$$

5. Olkoon $f\colon]0,\pi[\to \mathbf{R}$,

$$f(x) \;=\; (\sin x)^{\cos x}.$$

Määritä $f'(x)$ ja tutki, missä välin $]0,\pi[$ pisteissä $f'(x) = 0$.

6. Määritä $f'(\pi)$ ja $g'(0)$, kun

$$f(x) = \arctan(\sin x) \qquad \text{ja} \qquad g(x) = (x^2+2)^{f(x)}.$$

7. Määritä $f'(\frac{\pi}{2})$ ja $g'(0)$, kun

$$f(x) = \arctan(1 + \sin 4x) \qquad \text{ja} \qquad g(x) = (x^2+x+1)^{f(x)}.$$

8. Olkoon

$$g(x) = f(x)^{\cos x},$$

missä $f(x)$ on derivoituva ja positiivinen kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että $g'(0) = f'(0)$.

9. Määritä $f'(\pi)$, kun

$$\text{(a)}\ f(x) = (x^2+1)^{\cos 6x}, \qquad \text{(b)}\ f(x) = (e + \sin x)^{\sqrt{4-\sin x}}.$$

10. *Areasini*

$$\operatorname{ar\,sinh} x = \log\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$$

on luvun 2.2 tehtävässä 7 määritellyn hyperbolisen sinin käänteisfunktio. Osoita, että

$$D(\operatorname{ar\,sinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

2.4 Rollen lause ja väliarvolause

1. Olkoot $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sellaisia funktioita, että

$$f(0) = g(0) \qquad \text{ja} \qquad f'(0) > g'(0).$$

Osoita, että on olemassa $a > 0$ siten, että $f(x) \geq g(x)$ kaikilla $x \in [0, a]$.

2. Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sellainen välillä $[a, b]$ jatkuva ja välillä $]a, b[$ derivoituva funktio, että $f(a) = f(b) = 0$. Osoita, että on olemassa sellainen välin $]a, b[$ piste ξ, että

$$f'(\xi) = f(\xi).$$

Vihje: Sovella Rollen lausetta sopivaan apufunktioon.

3. Olkoon $k \in \mathbf{R}$. Osoita, että jos f on sellainen välillä $[a, b]$ derivoituva funktio, että

$$f'(a) < k < f'(b),$$

niin on olemassa sellainen välin $]a, b[$ piste c, että

$$f'(c) = k.$$

Vihje: Tarkastele funktiota $g(x) = f(x) - k(x - a)$.

4. Osoita, että funktiolla

$$f(x) \ = \ \arctan x - \arcsin\Big(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\Big)$$

on korkeintaan yksi positiivinen nollakohta.

5. Osoita, että funktiolla

$$f(x) \ = \ 1 + 2\sqrt{3}\arcsin\frac{x}{1 + x} - 4\arctan\sqrt{x}$$

on korkeintaan yksi nollakohta välillä $]0, 1[$.

6. Osoita, että funktiolla

(a) $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + x^2 - 9x - 7$, (b) $f(x) = \log(e^x + 1) - x^2$

on korkeintaan kaksi nollakohtaa.

7. Osoita, että funktiolla

$$f(x) = 2x^5 + 3x^3 - 9x + 1$$

on täsmälleen kaksi positiivista nollakohtaa.

8. Osoita, että funktiolla

$$f(x) = x^5 + 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$$

on täsmälleen kolme nollakohtaa.

9. Määritä täsmällisesti perustellen funktion

(a) $f(x) = e^x - x - 3$, (b) $f(x) = 2^x - x \log 2 - 2$

nollakohtien lukumäärä.

10. Todista Cauchyn väliarvokaavaa käyttäen, että

$$3^x > 2^{x+1} - 1 \qquad \forall x > 1.$$

Vihje: Vähennä epäyhtälön molemmilta puolilta sopiva vakio.

11. Olkoon f sellainen funktio, että $f(1) = 1$ ja

$$f'(x) \le 2 \qquad \forall x \in [1, 4].$$

Osoita, että $f(4) \le 7$.

12. Anna esimerkki sellaisesta funktiosta $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, että $f(0) = 0$, $f(4) = 5$ ja

$$f'(x) \le 1 \qquad \forall x \in [0, 4],$$

tai osoita, että tällaista funktiota ei voi olla olemassa.

13. Olkoon f sellainen kaikkialla jatkuva ja derivoituva funktio, että $f(0) = 5$ ja

$$f'(x) \le \arctan x + \log(x^2 + 1) \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Määritä täsmällisesti perustellen jokin sellainen luku $c \in \mathbf{R}$, että $f(2) \le c$.

14. Osoita väliarvolausetta käyttäen, että

$$\sin x < x,$$

kun $0 < x \le 1$.

15. Osoita, että

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|$$

kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$.

16. Osoita, että

$$|\arctan x - \arctan y| \le |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

17. Määritä väliarvolausetta käyttäen

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\,\right).$$

18. Oletetaan, että funktio f on derivoituva jossakin pisteen a puhkaistussa ympäristössä ja

$$\lim_{x\to a} f'(x) = A \qquad (A \in \mathbf{R}).$$

Todista, että jos f on jatkuva pisteessä a, niin f on derivoituva pisteessä a ja

$$f'(a) = A.$$

19. Olkoon f sellainen koko reaalilukujoukossa jatkuva funktio, että f on derivoituva kaikilla $x \neq 0$ ja

$$|f'(x)| \leq 3 \qquad \forall x \neq 0.$$

Osoita, että funktio $g(x) = f(x^2)$ on derivoituva pisteessä $x = 0$, ja määritä $g'(0)$.

20. Olkoon f koko reaalilukujen joukossa derivoituva funktio. Osoita suoraan raja-arvon määrittelyyn (ja väliarvolauseeseen) perustuen, että jos

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0,$$

niin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

2.5 Integraalilaskennan peruslause

1. Olkoon $A \in \mathbf{R}$. Osoita, että jos $f'(x) = A$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin on olemassa sellainen vakio $C \in \mathbf{R}$, että

$$f(x) = Ax + C \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Määritä yllä olevaa tulosta käyttäen sellainen funktio F, että $F(0) = 4$ ja $F'(x) = 5$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

2. Määritä $f(x)$, kun tiedetään, että $f(1) = f'(1) = 10$ ja

$$f''(x) \;=\; 6x + 4 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

3. Oletetaan, että funktioista $\sin x$ ja $\cos x$ tiedetään vain niiden derivointikaavat ja arvot pisteessä $x = 0$. Osoita näitä tietoja käyttäen, että

$$\sin^2 x + \cos^2 x \;=\; 1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

4. Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Osoita integraalilaskennan peruslausetta käyttäen, että

$$\log x^a \;=\; a \log x \qquad \forall x > 0.$$

5. Osoita, että

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

6. Osoita, että funktio

$$f(x) \;=\; \arcsin(2x^2 - 1) + 2 \arccos x$$

on vakio välillä $]0, 1[$, ja määritä tämä vakio.

7. Osoita, että funktio

$$f(x) \;=\; \arccos x + \arccos \sqrt{1 - x^2}$$

on vakio välillä $]0, 1[$, ja määritä tämä vakio. Onko f vakio myös välillä $]-1, 0[$?

8. Osoita, että

$$2 \arcsin \sqrt{x} \;=\; \frac{\pi}{2} + \arcsin(2x - 1) \qquad \forall x \in [0, 1].$$

9. Osoita, että funktio

$$f(x) \;=\; \arctan x + \arctan \frac{1 - x}{1 + x}$$

on vakio kaikilla $x > -1$, ja määritä tämä vakio.

10. Olkoon f sellainen funktio, että

$$f(0) = 1 \qquad \text{ja} \qquad f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Osoita, että $f(x) = e^x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Vihje: Sovella integraalilaskennan peruslausetta sopivaan apufunktioon.

3 Derivoituvan funktion ominaisuuksia

3.1 l'Hospitalin sääntö

1. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1} \frac{2x^5 - 4x^2 + 2}{x^7 - 12x + 11}, \quad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad \text{(c)} \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}.$$

2. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1} \frac{x^{2012} - 3x^{704} + 2}{6x^{30} - 13x^{10} + 7}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{3x^{2017} - 17x^3 + 14}{x^{487} + x^{113} - 2}.$$

3. Osoita, että

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

4. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x)}{x}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x) - 2\arcsin x}{x^3}.$$

5. Määritä sellainen vakio $a \in \mathbf{R}$, että

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{x + \sin ax}{x + \sin x} = 2, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{x^a - ax + a - 1}{(x-1)^2} = 6.$$

6. Määritä sellaiset vakiot $a \in \mathbf{R}$ ja $b \in \mathbf{R}$, että

$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b \Big) = 0.$$

7. Määritetään raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \cos x}$$

käyttämällä l'Hospitalin sääntöä. Siis

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Onko tulos oikein ja jos ei, niin missä on virhe ja mikä on oikea raja-arvo?

8. Määritä

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{\cot x}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0+} \frac{\log(1 - \cos x)}{\log(\sin x)}, \qquad \text{(c)} \lim_{x\to \infty} \frac{e^{x+1} + e^{-x}}{e^x + x}.$$

9. Osoita, että

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\sin ax)}{\log(\sin bx)} = 1 \qquad \forall a, b > 0.$$

10. Määritä

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\cos x-1}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}}{\log(x+1)}$$

tai osoita, että raja-arvoa ei ole (äärellisenä eikä äärettömänä) olemassa.

11. Määritä

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right), \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+7x^4+2}-x\right).$$

12. Määritä

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right), \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right).$$

13. Määritä

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1-}\log x\cdot\log(1-x), \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to\infty}x\sin(\pi-2\arctan x).$$

14. Määritä

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0+}(2x)^{\frac{3}{5+\log(7x)}}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0+}(\arctan x)^{e^x-1}, \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0+}x^{x^x-1}.$$

15. Osoita, että

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to\infty}(\log x)^{\frac{1}{x}} = 1, \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

16. Määritä

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0+}(\cot x)^{\frac{1}{\log(x+\sin x)}}.$$

17. Funktiosta f tiedetään, että $f(x)$ on derivoituva ja $f'(x)$ on jatkuva pisteessä $x=0$, $f(0)=0$ ja $f'(0)=2$. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{x}}.$$

18. Määritä

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 1}x^{\frac{x}{1-x}}.$$

19. Määritä

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\cot x}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}(x+\cos x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}.$$

20. Määritä sellainen vakio $a\in\mathbf{R}$, että

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 4.$$

3.2 Funktion monotonisuus

1. Osoita, että funktio
$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$$
on aidosti vähenevä välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. Osoita, että funktiolla
$$f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$$
on käänteisfunktio, joka on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Missä pisteissä käänteisfunktion derivaattaa ei voida määrittää?

3. Osoita, että
$$\arctan x \; > \; x - \frac{x^3}{3},$$
kun $x > 0$.

4. Olkoon $x > 0$. Määritä laajin väli, jolla funktio
$$f(x) = (3x)^{\log x}$$
on aidosti vähenevä.

5. Osoita, että funktio
$$f(x) = (x^x)^x$$
on aidosti kasvava, kun $x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

6. Tutki funktion derivaattaa tarkastelemalla, onko funktio
$$f(x) = (\log(1 + x))^x \qquad (x > 0)$$
aidosti monotoninen, kun $x > 0$.

7. Tutki funktion derivaattaa tarkastelemalla, onko funktio
$$f(x) = x^{\cos x} \qquad (x > 0)$$
aidosti kasvava tai aidosti vähenevä välillä $]0, 1[$.

8. Olkoon f sellainen funktio, että $f'(0) = 1$ ja $f'(x)$ on jatkuva pisteessä $x = 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $h > 0$, että f on aidosti kasvava välillä $[0, h]$.

9. Olkoon $a > 0$ ja f sellainen derivoituva funktio, että $f'(x) \geq 1 + a$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että on olemassa sellainen $c \in \mathbf{R}$, että $f(x) > x$ aina, kun $x > c$.

   Vihje: Tarkastele erotusta $f(x) - x$.

10. Olkoon f välillä $]-\infty, 0[$ derivoituva funktio. Osoita, että jos
$$0 \; \leq \; f'(x) \leq \; 1 \qquad \forall x < 0,$$
niin raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ on (äärellisenä) olemassa.

3.3 Funktion ääriarvot

1. Tutki, onko piste $x = 0$ funktion
$$f(x) = (1 - e^x)^7 (1 - x)^{13}$$
paikallinen ääriarvokohta.

2. Määritä funktion
$$f(x) = \log(x^2 + 4) + \operatorname{arc}\tan\frac{2}{x} \qquad (x \neq 0)$$
paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu välillä $]0, \infty[$.

3. Määritä funktion
$$f(x) = \operatorname{arc}\tan(x - x^2)$$
paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu.

4. Määritä funktion
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc}\cot x, & \text{kun } x < 0, \\ \operatorname{arc}\cos x, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1, \\ \log x, & \text{kun } x > 1, \end{cases}$$
paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu.

5. Määritä funktion
$$f(x) = \begin{cases} 2^{x^2 - x}, & \text{kun } x < 2, \\ \log_2(x + 2), & \text{kun } x \geq 2, \end{cases}$$
paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu.

6. Määritä funktion
$$f(x) = (\operatorname{arc}\tan x)^{\operatorname{arc}\tan x} \qquad (x > 0)$$
paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu.

7. Määritä funktion
$$f(x) = \begin{cases} x^{\log x}, & \text{kun } x > 0, \\ \operatorname{arc}\cot x, & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$
paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu.

8. Määritä funktion
$$f(x) = \begin{cases} 2^{-3x}, & \text{kun } x \leq 0, \\ (2x + 1)^{3x}, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$
paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu.

9. Määritä funktion

$$f(x) \;=\; \operatorname{arc}\tan(\cos x)$$

suurin ja pienin arvo välillä $[0, \pi]$.

10. Osoita, että

$$x \log x \;\geq\; x - 1 \qquad \forall x > 0.$$

4 Pinta-alat ja porrasfunktiot

4.1 Ala- ja yläsumma

1. Laske välin $[0,1]$ jakoja $P_1 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$ ja $P_2 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ vastaavat funktion
$$f(x) = x^2$$
ala- ja yläsummat.

2. Laske funktion $\sin x$ ala- ja yläsumma välillä $[0, 2\pi]$, kun jako on tasavälinen ja osavälien lukumäärä $n = 4$.

3. Arvioi ala- ja yläsummia käyttämällä funktion
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{kun } |x| < 1, \\ 4 - 2x, & \text{kun } |x| \geq 1, \end{cases}$$
kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa välillä $[-2, 2]$, kun (a) välin jakopisteet ovat $\{-2, -1, 1, 2\}$, (b) jako on tasavälinen ja osavälien lukumäärä $n = 4$.

4. Arvioi ala- ja yläsummia käyttämällä funktion
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x > 0, \\ x^2 + 1, & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$
kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa välillä $[-2, 2]$, kun (a) välin jakopisteet ovat $\{-2, -1, 1, 2\}$, (b) jako on tasavälinen ja osavälien lukumäärä $n = 4$.

5. Arvioi ala- ja yläsummia käyttämällä funktion
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa välillä $[1, 2]$, kun jako on tasavälinen ja osavälien lukumäärä $n = 4$.

6. Olkoon
$$f(x) = \frac{x+5}{5}.$$
Anna esimerkki sellaisesta välin $[0, 5]$ jaosta P, että $U_P(f) - L_P(f) < 1$.

7. Olkoon f välillä $[a, b]$ jatkuva funktio, P jokin välin $[a, b]$ jako ja $L_P(f)$ ja $U_P(f)$ funktion f jakoa P vastaavat ala- ja yläsumma. Osoita, että on olemassa sellaiset luvut $c_1, c_2 \in [a, b]$, että
$$L_P(f) = f(c_1)(b-a) \qquad \text{ja} \qquad U_P(f) = f(c_2)(b-a).$$
Vihje: Suljetulla välillä jatkuvan funktion ominaisuudet.

8. Laske funktion
$$f(x) = x + 2$$
jakoa $P = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, 2\}$ vastaava Riemannin summa $S_P(f, \xi)$, kun $\xi_1 = -1, \xi_2 = 0$ ja $\xi_3 = 1$.

9. Olkoon $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ välin $[0, 4]$ tasavälinen jako ja
$$f(x) = |x - 1| .$$
Määritä sellaiset jaon P osavälien pisteet, että funktion f jakoa P vastaava Riemannin summa $S_P(f, \xi)$ on (a) 4, (b) 5, (c) 6. Laske myös $L_P(f)$ ja $U_P(f)$.

10. Olkoon $P = \{0, 2, 3\}$ välin $[0, 3]$ jako. Anna esimerkki sellaisesta funktiosta f, että funktion f jakoa P vastaava Riemannin summa $S_P(f, \xi)$ ei ole $L_P(f)$ tai $U_P(f)$ millään pisteiden ξ valinnalla.

4.2 Porrasfunktio

1. Anna jokin välin $[0, 2]$ jako, joka sisältää porrasfunktion
$$f(x) = \lfloor x^2 - x \rfloor$$
porraspisteet välillä $[0, 2]$.

2. Osoita, että funktio
$$f(x) = \lceil 2x \rceil - 1$$
porrasfunktio välillä $[1, 3]$.

3. Tutki, mitkä funktioista
$$x \cdot \lceil x^2 \rceil, \quad x \cdot \lfloor x^2 \rfloor, \quad \lceil x \rceil - x, \quad \lceil x \rceil - |x| \quad \text{ja} \quad \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$$
ovat välin $[-1, 1]$ porrasfunktioita.

4. Olkoon $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$. Tutki, onko funktio
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in A, \\ 2, & \text{kun } x \notin A, \end{cases}$$
porrasfunktio (a) välillä $[0, 1]$, (b) välillä $[a, 1]$ $(0 < a < 1)$.

5. Tutki, onko funktio
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lceil \frac{1}{x} \rceil}, & \text{kun } x > 0, \\ 0, & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$
porrasfunktio (a) välillä $[0, 5]$, (b) välillä $[a, 5]$ $(0 < a < 5)$.

6. Anna esimerkki sellaisesta välin $[1,4]$ porrasfunktiosta f, että $f(x) \le 2x \le f(x)+1$ kaikilla $x \in [1,4]$.

7. Onko mahdollista, että $|f|$ on välin $[a,b]$ porrasfunktio, vaikka f ei ole välin $[a,b]$ porrasfunktio?

8. Olkoot f ja g välin $[a,b]$ porrasfunktioita. Osoita, että myös (a) $f+g$, (b) fg on välin $[a,b]$ porrasfunktio.

9. Olkoon $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jokin funktio ja f välin $[a,b]$ porrasfunktio. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että myös (a) $g \circ f$, (b) $f \circ g$ on välin $[a,b]$ porrasfunktio.

10. Olkoon f jokin ei-negatiivinen funktio ja g sellainen porrasfunktio, että $g \le f$ välillä $[a,b]$. Osoita, että on olemassa sellainen välin $[a,b]$ porrasfunktio h, että
$$0 \le h \le f \qquad \text{ja} \qquad g \le h \le f.$$

4.3 Porrasfunktion integraali

1. Anna jokin välin $[-1,2]$ jako, joka sisältää porrasfunktion
$$\text{(a)}\ \ f(x) = \lfloor x^2 \rfloor - 1, \qquad \text{(b)}\ \ f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \tfrac{1}{2} \rfloor$$
porraspisteet välillä $[-1,2]$, ja määritä funktion f porrasintegraali yli välin $[-1,2]$.

2. Anna jokin välin $[0,6]$ jako, joka sisältää porrasfunktion
$$f(x) = \lceil \sqrt{x} \rceil \cdot \lfloor 3 - \tfrac{x}{2} \rfloor$$
porraspisteet välillä $[0,6]$, ja määritä funktion f porrasintegraali yli välin $[0,6]$.

3. Olkoon $n \in \mathbf{Z}_+$. Osoita, että
$$\text{(a)}\ \int_0^n \lfloor x \rfloor \, dx = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \text{(b)}\ \int_0^n \lceil x \rceil \, dx = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Olkoon $n \in \mathbf{Z}_+$ ja g sellainen välin $[0,n]$ porrasfunktio, että $g(x) = (-1)^k \cdot k$ aina, kun $k \le x < k+1$ ($k \in \mathbf{N}$). Olkoon lisäksi
$$f(n) = \int_0^n g(x)\, dx.$$
(a) Määritä $f(3)$ ja $f(4)$. (b) Tutki, millä luvun n arvoilla $|f(n)| = 5$.

5. Anna esimerkki sellaisesta välin $[0,4]$ porrasfunktiosta f, että
$$\int_0^2 f = 4, \quad \int_0^3 f = 5 \quad \text{ja} \quad \int_0^4 f = 2.$$

6. Anna esimerkki sellaisesta välin $[-2,4]$ porrasfunktiosta f, että

$$\int_{-2}^{0} f = 6, \quad \int_{-2}^{1} f = \int_{-2}^{2} f = 8 \quad \text{ja} \quad \int_{-2}^{4} f = 0.$$

7. Olkoon $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Anna esimerkki sellaisesta välin $[0,3]$ porrasfunktiosta g, että $g \leq f$ välillä $[0,3]$ ja

$$\text{(a)} \quad \int_{0}^{3} g = 1, \qquad \text{(b)} \quad \int_{0}^{3} g = \frac{3}{2}.$$

8. Olkoon $f(x) = |x-3|$. Anna esimerkki sellaisesta välin $[1,7]$ porrasfunktiosta h, että $f \leq h$ välillä $[1,7]$ ja

$$\text{(a)} \quad \int_{1}^{7} h = 16, \qquad \text{(b)} \quad \int_{1}^{7} h = 13.$$

9. Olkoon $f(x) = |x+1|$. Anna esimerkki sellaisista välin $[-3,3]$ porrasfunktioista g ja h, että $g \leq f \leq h$ välillä $[-3,3]$ ja

$$\int_{-3}^{3} h - \int_{-3}^{3} g = 10.$$

10. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{kun } x < 0, \\ 4-x, & \text{kun } x \geq 0. \end{cases}$$

Anna esimerkki sellaisista välin $[-2,4]$ porrasfunktioista g ja h, että $g \leq f \leq h$ välillä $[-2,4]$ ja

$$\int_{-2}^{4} h - \int_{-2}^{4} g = 8.$$

11. Olkoon $f(x) = 5x + 1$. Anna esimerkki sellaisesta välin $[0,4]$ porrasfunktiosta g, että $g \leq f$ välillä $[0,4]$ ja

$$\text{(a)} \quad \int_{0}^{4} g > 34, \qquad \text{(b)} \quad \int_{0}^{4} g > 43.$$

12. Olkoon $f(x) = 2x + 3$. Anna esimerkki sellaisesta välin $[0,6]$ porrasfunktiosta h, että $h \geq f$ välillä $[0,6]$ ja

$$\text{(a)} \quad \int_{0}^{6} h < 60, \qquad \text{(b)} \quad \int_{0}^{6} h < 55.$$

13. Olkoot f ja g sellaisia välin $[a,b]$ porrasfunktioita, että $f \geq 0$ ja $g \leq M$ ($M \in \mathbf{R}$) välillä $[a,b]$. Osoita suoraan porrasfunktioiden arvoja tarkastelemalla, että

$$\int_{a}^{b} fg \leq M \int_{a}^{b} f.$$

14. Osoita, että jos g ja h ovat porrasfunktioita ja $g \leq h$ välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b g \leq \int_a^b h.$$

15. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos g ja h ovat välin $[a, b]$ porrasfunktioita ja

$$\int_a^b g \leq \int_a^b h,$$

niin $g \leq h$ välillä $[a, b]$.

16. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos f_1, f_2, g_1 ja g_2 ovat sellaisia välin $[a, b]$ porrasfunktioita, että $f_1 \leq g_1$ ja $f_2 \leq g_2$ välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b f_1 f_2 \leq \int_a^b g_1 g_2.$$

17. Anna esimerkki sellaisista välin $[2, 4]$ porrasfunktioista f ja g, että $f \leq 3$ välillä $[2, 4]$ ja

$$\int_2^4 fg > 3 \int_2^4 g.$$

18. Osoita, että jos f ja g ovat välin $[a, b]$ porrasfunktioita, niin

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

19. Olkoon f sellainen välin $[0, 8]$ porrasfunktio, että

$$\int_0^3 f = 9, \quad \int_0^4 f = 5 \quad \text{ja} \quad \int_4^8 f = 8.$$

Määritä

$$\text{(a)} \int_0^8 f, \quad \text{(b)} \int_3^4 f, \quad \text{ja} \quad \text{(c)} \int_3^8 f.$$

Anna myös esimerkki välin $[0, 8]$ porrasfunktiosta, joka toteuttaa yllä olevat ehdot.

20. Olkoot f_1 ja f_2 sellaisia välillä $[a, b]$ määriteltyjä funktioita, että $f_1(x) = f_2(x)$ välillä $[a, b]$ lukuun ottamatta yhtä pistettä pistettä $c \in]a, b[$. Olkoon lisäksi $\varepsilon > 0$. Osoita, että jos on olemassa sellaiset välin $[a, b]$ porrasfunktiot g ja h, että $g \leq f_1 \leq h$ välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon,$$

niin on olemassa myös sellaiset välin $[a, b]$ porrasfunktiot g' ja h', että $g' \leq f_2 \leq h'$ välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b h' - \int_a^b g' < \varepsilon.$$

5 Riemann-integraali

5.1 Ala- ja yläintegraali

Voit olettaa tunnetuksi luvun 1.1 harjoitustehtävissä todistetut supremumin ja infimumin ominaisuudet.

1. Olkoon f välillä $[a,b]$ rajoitettu funktio ja $\lambda \geq 0$. Osoita, että

   (a) $I_L(\lambda f, [a,b]) = \lambda \cdot I_L(f, [a,b])$, (b) $I_U(\lambda f, [a,b]) = \lambda \cdot I_U(f, [a,b])$.

2. Olkoon f välillä $[a,b]$ rajoitettu funktio ja $\lambda < 0$. Osoita, että

   (a) $I_L(\lambda f, [a,b]) = \lambda \cdot I_U(f, [a,b])$, (b) $I_U(\lambda f, [a,b]) = \lambda \cdot I_L(f, [a,b])$.

3. Olkoot f ja g välillä $[a,b]$ rajoitettuja funktioita. Osoita, että

   $$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad I_L(f+g,[a,b]) \;\geq\; I_L(f,[a,b]) \;+\; I_L(g,[a,b]), \\ &\text{(b)} \quad I_U(f+g,[a,b]) \;\leq\; I_U(f,[a,b]) \;+\; U_L(g,[a,b]). \end{aligned}$$

4. Olkoon f välillä $[a,b]$ rajoitettu funktio ja $c \in \,]a,b[$. Osoita, että

   $$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad I_L(f,[a,b]) \;=\; I_L(f,[a,c]) \;+\; I_L(f,[c,b]), \\ &\text{(b)} \quad I_U(f,[a,b]) \;=\; I_U(f,[a,c]) \;+\; I_U(f,[c,b]). \end{aligned}$$

5. Anna esimerkki sellaisesta funktiosta f, että

   $$I_L(f,[0,2]) = 1 \qquad \text{ja} \qquad I_U(f,[0,2]) = 3.$$

6. Määritä täsmällisesti perustellen $I_U(f,[4,6])$, kun

   $$f(x) = \begin{cases} (x^2+1)^{\sin x}, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

7. Anna esimerkki sellaisista funktioista f ja g, että

   $$I_L(f,[2,5]) + I_L(g,[2,5]) \;<\; I_L(f+g,[2,5]).$$

   Tässä tehtävässä alaintegraalien arvoja ei tarvitse perustella täsmällisesti. Esimerkiksi funktioiden kuvaajiin tai monisteen esimerkkeihin tukeutuva perustelu on riittävä.

   Vihje: Voit olettaa tehtävien 1 ja 2 tulokset tunnetuksi.

8. Anna esimerkki sellaisista funktioista f ja g, että

$$I_U(f+g,[2,4]) \;<\; I_U(f,[2,4]) + I_U(g,[2,4]).$$

Tässä tehtävässä yläintegraalien arvoja ei tarvitse perustella täsmällisesti. Esimerkiksi funktioiden kuvaajiin tai monisteen esimerkkeihin tukeutuva perustelu on riittävä.

Vihje: Voit olettaa tehtävien 1 ja 2 tulokset tunnetuksi.

9. Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Osoita, että $I_L(f,[0,3]) < I_U(f,[0,3])$.

Vihje: Voit olettaa tehtävän 4 tulokset tunnetuksi.

10. Olkoon f välillä $[a,b]$ rajoitettu funktio. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos g on sellainen välin $[a,b]$ porrasfunktio, että

$$\int_a^b g \;\le\; I_L(f,[a,b]),$$

niin $g \le f$ välillä $[a,b]$.

5.2 Riemann-integraali ja Riemann-integroituvuus

1. Osoita, että funktio
$$f(x) = \begin{cases} 5-x, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ x, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

ei ole Riemann-integroituva välillä $[0,2]$.

2. Olkoon $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus A, \end{cases}$$

on Riemann-integroituva välillä $[0,1]$.

3. Olkoon $A = \{\frac{3n-1}{n} \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A, \\ 5, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus A, \end{cases}$$

Riemann-integroituva välillä $[0,3]$.

4. Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sellainen funktio, että $f(0) = 0$ ja f on jatkuva pisteessä $x = 0$ sekä Riemann-integroituva jokaisella osavälillä $[a, 3]$ $(0 < a < 3)$. Todista, että f on Riemann-integroituva välillä $[0, 3]$.

5. Olkoon f sellainen funktio, että

$$\lim_{x \to 4-} f(x) \;=\; f(4) \;=\; 6$$

ja f on Riemann-integroituva jokaisella välillä $[2, a]$ $(2 < a < 4)$. Tutki täsmällisesti perustellen, onko f Riemann-integroituva välillä $[2, 4]$.

6. Osoita Riemannin ehtoa käyttäen,[1] että funktio e^x on Riemann-integroituva välillä $[0, b]$ $(b > 0)$ ja

$$\int_0^b e^x \, dx \;=\; e^b - 1.$$

Vihje: Ks. kurssimonisteen esimerkki 5.6.

7. Osoita Riemannin ehtoa käyttäen,[1] että funktio $f(x) = 1 - x$ on Riemann-integroituva välillä $[0, 2]$ ja

$$\int_0^2 f(x) \, dx \;=\; 0.$$

8. Osoita Riemannin ehtoa käyttäen, että funktio $\sin x$ on Riemann-integroituva välillä $[0, 1]$.

9. Olkoon $f(x) = 2x^2$. Anna esimerkki sellaisista välillä $[2, 6]$ määritellyistä porrasfunktioista g ja h, että $g \le f \le h$ ja

$$\int_2^6 h - \int_2^6 g \;\le\; 10^{-2}.$$

10. Olkoon $f(x) = x2^x$. Anna esimerkki sellaisista välillä $[0, 4]$ määritellyistä porrasfunktioista g ja h, että $g \le f \le h$ ja

$$\int_0^4 h - \int_0^4 g \;\le\; 1.$$

5.3 Integroituvia funktioita

1. Todista, että jos funktio f on vähenevä välillä $[a, b]$, niin f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.

[1] Lausetta 5.7 voi käyttää.

2. Tutki, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\lfloor \tan x \rfloor}, & \text{kun } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \\ 0, & \text{kun } x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Riemann-integroituva välillä $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Tutki, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lceil \frac{1}{1-x} \rceil}, & \text{kun } x \in [-2, 2]\,, x \neq 1, \\ 0, & \text{kun } x = 1, \end{cases}$$

Riemann-integroituva (a) välillä $[0, 1]$, (b) välillä $[-2, 2]$.

4. Tutki, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lceil (\sin x)^{\cos x} \rceil}, & \text{kun } x \in [1, \pi[, \\ 0, & \text{kun } x = \pi, \end{cases}$$

Riemann-integroituva välillä $[1, \pi]$.

5. Olkoon f sellainen välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio, että

$$\sup\{f(x) \,|\, x \in [c, d]\} - \inf\{f(x) \,|\, x \in [c, d]\} \ \leq\ d - c$$

aina, kun $[c, d] \subseteq [a, b]$. Todista, että f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.

6. Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ sellainen funktio, että f saavuttaa jokaisella välin $[a, b]$ suljetulla osavälillä suurimman ja pienimmän arvonsa ja että

$$|f(x) - f(y)| \ \leq\ 5\,|x - y|$$

aina, kun $x, y \in [a, b]$. Todista Riemannin ehtoa käyttäen, että f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.

7. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on Riemann-integroituva millä tahansa suljetulla välillä $[a, b]$.

8. Osoita todeksi tai epätodeksi, että jos funktio f on jatkuva pisteessä $x = 0$, niin on olemassa sellainen $a > 0$, että f on Riemann-integroituva välillä $[0, a]$.

9. Osoita täsmällisesti perustellen, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 3\sin\dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 3, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on Riemann-integroituva välillä $[0, \pi]$.

10. Tutki täsmällisesti perustellen, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos\frac{\pi}{\pi - x}, & \text{kun } x \neq \pi, \\ 0, & \text{kun } x = \pi, \end{cases}$$

Riemann-integroituva välillä $[0, 2\pi]$.

5.4 Perusominaisuuksia

1. Osoita, että jos f ja g ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$, niin myös $f + g$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \left(e^x + 4x + 3\right) dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^5 \frac{x^3 + 1}{x^2}\, dx.$$

3. Osoita, että jos f ja g ovat välillä $[a, b]$ Riemann-integroituvia funktioita, niin myös funktio (a) $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, (b) $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.

   Vihje: Esitä funktio h käyttäen funktioita f ja g sekä itseisarvofunktiota.

4. Onko mahdollista, että (a) funktio $|f|$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, vaikka f ei ole Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, (b) funktio fg on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, vaikka funktiot f ja g eivät ole Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$?

5. Olkoon $c < b < a$. Osoita, että

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

   Voit olettaa tunnetuksi, että f on Riemann-integroituva kaikilla tarkasteltavilla väleillä.

6. Tiedetään, että

$$\int_0^2 f = 5, \quad \int_0^4 f = 2 \quad \text{ja} \quad \int_2^5 f = 1.$$

Määritä

$$\text{(a)} \int_0^5 f, \qquad \text{(b)} \int_2^4 f, \qquad \text{(c)} \int_5^4 f.$$

7. Tiedetään, että

$$\int_0^1 f = 3, \quad \int_0^2 f = 1 \quad \text{ja} \quad \int_2^6 f = 5.$$

Määritä

$$\text{(a)} \int_0^6 f, \quad \text{(b)} \int_1^2 f, \quad \text{(c)} \int_1^6 f, \quad \text{ja} \quad \text{(d)} \int_2^0 f.$$

8. Olkoon $a, b > 0$. Osoita, että

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a.$$

9. Määritä

$$\text{(a)} \int_0^{\log 4} |e^x - 2| \, dx, \qquad \text{(b)} \int_{-2}^1 \max\{e^x, |x| + 1\} \, dx.$$

Vihje: Voit olettaa tehtävän 8 tuloksen tunnetuksi.

10. Perustele, miksi funktio $f(x) = x\lfloor x \rfloor$ on Riemann-integroituva välillä $[0, 3]$, ja määritä (perustellen)

$$\int_0^3 x\lfloor x \rfloor \, dx.$$

5.5 Integraalien arviointia

1. Osoita, että

$$1 \le \int_0^1 e^{x^2} \, dx \le e.$$

2. Osoita, että

$$\text{(a)} \int_0^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \le 6, \qquad \text{(b)} \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}} \, dx \le \sqrt{2}.$$

3. Osoita, että

$$\int_a^{a+1} \cos(ax + \arctan x) \, dx \le 1 \qquad \forall a \in \mathbf{R}.$$

4. Osoita, että

$$\text{(a)} \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx \le \frac{1}{2}, \qquad \text{(b)} \int_1^{e^2} \frac{\log x - 1}{e^x + 1} \, dx \le e - 1.$$

5. Osoita, että

$$\frac{2e}{e+1} \;\leq\; \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{\log{(x+1)}}{x}\,dx \;\leq\; e.$$

6. Osoita, että

$$\sqrt{2} \;\leq\; \int_{-1}^{1} (x^2+1)^{\frac{x}{2}}\,dx \;\leq\; 2\sqrt{2}.$$

7. Osoita, että

$$\text{(a)} \quad \int_{1}^{e+1} \left(\frac{x}{2e}\right)^{x} dx \;\geq\; \frac{1}{e}, \qquad \text{(b)} \quad \int_{0}^{b} \frac{e^x}{e^x - x}\,dx \;\leq\; \frac{eb}{e-1} \quad (b > 0).$$

8. Osoita, että

$$\text{(a)} \quad \int_{0}^{4} \arctan(x^3 - 3x + 3)\,dx \;\geq\; \pi, \qquad \text{(b)} \quad \int_{1}^{3} \frac{e^x}{x^2}\,dx \;\geq\; \frac{e^2}{2}.$$

9. Osoita, että

$$\text{(a)} \quad \int_{0}^{1} \arctan x\,dx \;\leq\; \frac{\pi}{4}, \qquad \text{(b)} \quad \int_{0}^{1} \arctan x\,dx \;\leq\; \frac{1}{2}.$$

10. Osoita, että

$$e - 1 \;\leq\; \int_{0}^{2} e^{x^2 - x}\,dx \;\leq\; e^2 - 1.$$

11. Osoita, että jos integrointivälillä $0 \leq f(x) \leq g(x)$, niin

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right| \;\leq\; \left|\int_{a}^{b} g(x)\,dx\right|$$

kaikilla $a, b \in \mathbf{R}$ (olivatpa luvut missä tahansa järjestyksessä). Osoita myös, että epäyhtälö ei välttämättä ole voimassa, jos luovutaan vaatimuksesta $f(x) \geq 0$.

12. Osoita, että

$$\text{(a)} \quad \lim_{t \to 0} \int_{t}^{2t} \sin\frac{1}{x}\,dx \;=\; 0, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2 + x^2}\,dx \;=\; 0.$$

13. Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \;=\; 0.$$

Vihje: $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ kaikilla $\varepsilon > 0$.

14. Olkoon f sellainen välillä $[2,4]$ jatkuva funktio, että

$$\int_2^4 f(x)g(x)\,dx \;=\; 0$$

kaikille välin $[2,4]$ porrasfunktioille g. Todista, että $f(x)=0$ kaikilla $x \in [2,4]$.

15. Olkoon f sellainen välillä $[0,4]$ Riemann-integroituva funktio, että f on vasemmalta jatkuva pisteessä $x=4$. Oletetaan lisäksi, että

$$\int_0^4 f(x)g(x)\,dx \;=\; 0$$

aina, kun g on sellainen välillä $[0,4]$ Riemann-integroituva funktio, että $g(4)=6$. Osoita, että $f(4)=0$.

16. Olkoon f sellainen välillä $[a,b]$ jatkuva ei-negatiivinen funktio, että

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Osoita täsmällisesti perustellen, että on olemassa sellainen välin $[a,b]$ porrasfunktio g, että $0 \le g \le f$ ja

$$0 \;<\; \int_a^b g(x)\,dx \;<\; \int_a^b f(x)\,dx.$$

17. Olkoon f sellainen välillä $[0,1]$ jatkuva funktio, että $f(0)=1$ ja $0 \le f(x) \le 1$ kaikilla $x \in \,]0,1]$ ja

$$\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; \int_0^1 (f(x))^2\,dx.$$

Mitä voit päätellä funktiosta f?

18. Olkoot f ja g sellaisia välillä $[a,b]$ jatkuvia funktioita, että

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

Osoita, että on olemassa sellainen $c \in [a,b]$, että $f(c)=g(c)$.

19. Osoita (vastaesimerkillä), että tehtävän 18 tulos ei välttämättä päde, jos edes toinen funktioista f ja g ei ole jatkuva välillä $[a,b]$.

20. Osoita, että

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2xe^x + 2x}\,dx \;\le\; \sqrt{e},$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx \;\le\; \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Vihje: Caychy-Schwarzin epäyhtälö.

5.6 Integraalilaskennan väliarvolause

1. Olkoon funktio f Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ sekä

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{ja} \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Osoita, että jos f ei ole vakiofunktio, niin on olemassa sellainen $\mu \in [m, M]$, että

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \mu(b-a).$$

2. Olkoon f välillä $[a, b]$ Riemann-integroituva funktio ja

$$\mu \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx.$$

Osoita, että

$$\int_a^b (f(x) - \mu)\, dx = 0.$$

3. Määritä integraalilaskennan väliarvolausetta käyttäen

$$\text{(a)}\ \lim_{a\to 0+} \frac{1}{a}\int_a^{3a} \frac{\sin 2x}{x}\, dx, \quad \text{(b)}\ \lim_{t\to a+} \frac{1}{t-a}\int_a^t \sin(t/x)\, dx \quad (a > 0).$$

4. Määritä integraalilaskennan väliarvolausetta käyttäen

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\int_0^x \frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{\cos t + 3}}\, dt, \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \sin(\arctan t)\, dt.$$

5. Olkoon

$$f(x) \;=\; \frac{n\cos x}{(1+nx)^2}.$$

Koska funktio f on jatkuva ja ei-negatiivinen välillä $[0, 1]$, niin integraalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $\xi \in\,]0, 1[$, että

$$0 \le \int_0^1 f(x)\, dx = \frac{n\cos\xi}{(1+n\xi)^2}(1-0) < \frac{n}{n^2\xi^2} = \frac{1}{n\xi^2} \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Siis suppiloperiaatteen nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n\cos x}{(1+nx)^2}\, dx \;=\; 0.$$

Kyseinen raja-arvo on kuitenkin 1, joten missä kohtaa päättelyssä on virhe ja mikä virhe on?

6. Osoita integraalilaskennan väliarvolausetta käyttäen, että

$$3 \;<\; \int_0^1 \sqrt{9+x^2}\,dx \;<\; \sqrt{10}.$$

7. Olkoon f sellainen välillä $[a,b]$ jatkuva funktio, että

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Osoita, että on olemassa sellainen piste $c \in\,]a,b[$, että $f(c) = 0$.

8. Määritä integraalilaskennan väliarvolausetta tai yleistettyä integraalilaskennan väliarvolausetta käyttäen

$$\text{(a)}\;\lim_{t\to 0+} t\int_t^{3t} \frac{e^x}{x^2}\,dx, \qquad \text{(b)}\;\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t^2}\int_0^t x\cos(e^x)\,dx.$$

9. Osoita yleistettyä integraalilaskennan väliarvolausetta käyttäen, että

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx \;>\; \frac{11}{24}.$$

Vihje: Voit olettaa tunnetuksi, että $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)\,dx \;=\; \frac{11}{24}$.

10. Osoita yleistettyä integraalilaskennan väliarvolausetta käyttäen, että jos $a > 0$, niin

$$\frac{1}{1+a^6}\Big(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}\Big) \;<\; \int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx \;<\; a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$

Vihje: $1 + x^6 \;=\; (1+x^2)(1-x^2+x^4)$. Voit olettaa tunnetuksi, että

$$\int_0^a (1-x^2+x^4)\,dx \;=\; a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$

5.7 Riemannin summa

1. Laske funktion

$$f(x) = x^2 + 1$$

jakoon $P = \{-1, 2, 4, 5\}$ liittyvä Riemannin summa $S_P(f,\xi)$, kun (a) $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 3$ ja $\xi_3 = 5$, (b) $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 2$ ja $\xi_3 = 4$.

2. Laske funktion

$$f(x) = x^2 - 2$$

jakoon $P = \{-2, -1, 1, 4\}$ liittyvä Riemannin summa $S_P(f,\xi)$, kun (a) $\xi_1 = -2$, $\xi_2 = 0$ ja $\xi_3 = 2$, (b) $\xi_1 = -\sqrt{2}$, $\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\xi_3 = \sqrt{2}$.

3. Olkoon
$$f(x) = |x-1| - 1$$
ja $S_P(f,\xi)$ jokin välin $[0,6]$ jakoa $P = \{0,1,3,6\}$ vastaava funktion f Riemannin summa. Onko mahdollista, että $S_P(f,\xi) = 0$?

4. Anna sellaiset välin $[-3,3]$ jaon $P = \{-3,1,3\}$ jakovälien pisteet ξ_1 ja ξ_2, että funktion
$$f(x) = |x+1|$$
pisteitä ξ_1 ja ξ_2 vastaava Riemannin summa $S_P(f,\xi) = 10$.

5. Olkoon f välillä $[a,b]$ jatkuva funktio, P jokin välin $[a,b]$ jako ja $S_P(f,\xi)$ funktion f jakoa P vastaava Riemannin summa. Osoita, että on olemassa sellainen $c \in [a,b]$, että
$$S_P(f,\xi) \;=\; f(c)(b-a).$$
Vihje: Suljetulla välillä jatkuvan funktion ominaisuudet.

6. Laske
$$\text{(a)} \quad \int_1^4 (5-2x)\,dx, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 2^x\,dx$$
Riemannin summan avulla.

7. Olkoon $f\colon\ [0,2] \to \mathbf{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$
ja $S_P(f,\xi)$ funktion f välin $[0,2]$ jakoon P liittyvä Riemannin summa. Osoita raja-arvon määritelmään perustuen, että raja-arvo
$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi)$$
ei ole olemassa.

8. Määritä
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}.$$
Vihje: Tarkastele esimerkiksi välin $[1,2]$ tasavälistä jakoa (ja sopivaa funktiota).

9. Olkoon f välillä $[a,b]$ rajoitettu funktio ja $S_P(f,\xi)$ funktion f välin $[a,b]$ jakoon P liittyvä Riemannin summa. Onko mahdollista, että
$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi) \;=\; \infty\,?$$

10. Olkoon $S_P(f, \xi)$ funktion f välin $[a, b]$ jakoon P liittyvä Riemannin summa[1] ja f sellainen funktio, että f ei ole ylhäältä rajoitettu välillä $[a, b]$. Osoita, että raja-arvo

$$\lim_{|P| \to 0} S_P(f, \xi)$$

ei ole olemassa.

[1]Riemannin summan määritelmä on tässä tehtävässä laajennettu koskemaan myös rajoittamattomia funktioita.

6 Integraali ja derivaatta

6.1 Integraali ylärajansa funktiona

1. Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [0,1], \\ 2, & \text{kun } x \in \,]1,3]. \end{cases}$$
Määritä
$$G(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in [0,3]\,,$$
kun (a) $c \in [0,1]$, (b) $c \in \,]1,3]$.

2. Osoita, että jos funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$ ja $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin funktio
$$G(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad (c \in [a,b])$$
on kasvava välillä $[a,b]$.

3. Olkoon f sellainen välillä $[0,1]$ Riemann-integroituva funktio, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita, että on olemassa sellainen luku $c \in \,]0,1[$, että
$$\int_0^c f(x)\,dx \;=\; \int_c^1 f(x)\,dx.$$
Vihje: Voit olettaa tehtävän 2 tuloksen tunnetuksi.

4. Derivoi funktiot
$$f(x) = \int_0^x 2\sin(t^2)\,dt, \quad g(x) = \int_0^x 2\sin(x^2)\,dt \quad \text{ja} \quad h(x) = \int_0^1 2\sin(x^2)\,dt.$$

5. Määritä $F'(x)$ ja $G''(x)$, kun
$$F(x) = \int_{3x}^{x^2} \sin(t^2)\,dt \qquad \text{ja} \qquad G(x) = \int_0^x xe^{-t^2}\,dt.$$

6. Olkoon funktio f jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja
$$F(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$
Osoita, että $F''(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

7. Olkoon funktio f jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että

$$\int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,du \right) dt \;=\; \int_0^x f(t)(x-t)\,dt$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

8. Osoita, että jos $x > 0$, niin

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t}\,dt \;=\; \frac{\pi}{2} \log x.$$

9. Osoita, että

$$\int_0^x \sin 2t\,dt \;=\; \sin^2 x \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

ja määritä tätä tulosta käyttäen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt \qquad \text{ja} \qquad \int_0^{\pi} \sin 2t\,dt.$$

Vihje: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

10. Määritä

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{x^2} \sin(\arctan t)\,dt,$ (b) $\displaystyle \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2)\,dt.$

11. Määritä

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_x^{2x} \frac{\arctan(t^2)}{t}\,dt,$ (b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \cot^2 x \int_{\sin 3x}^{5x} \frac{\sin(t^2)}{t}\,dt.$

12. Osoita, että

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{4x^2} \int_{\arcsin(3x)}^{\sin(5x)} \frac{t \arcsin(1-t)}{1-t}\,dt \;=\; \pi.$$

13. Määritä

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{x^2} \cos(\pi t^2)\,dt,$ (b) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \int_2^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^3+1}}\,dt$

sekä käyttäen integraalilaskennan väliarvolausetta että käyttäen l'Hospitalin sääntöä.

14. Osoita, että funktio

(a) $\displaystyle f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\log t}\,dt,$ (b) $\displaystyle f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} \frac{1}{\log t}\,dt$

on aidosti kasvava, kun $x > 2$.

15. Tutki, onko funktio

$$f(x) \;=\; \int_{2x}^{5x} \frac{\operatorname{arc\,cot} t}{t}\, dt$$

monotoninen välillä $]0, \infty[$.

16. Määritä funktion

$$\text{(a)}\;\; f(x) = \int_0^{3x^2} (t-1)e^{-t^2} dt, \qquad \text{(b)}\;\; f(x) = \int_0^{2x-x^2} \cos\Big(\frac{1}{1+t^2}\Big)\, dt$$

paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu.

17. Määritä funktion

$$f(x) \;=\; \int_2^x \frac{\log t - 1}{\log t}\, dt$$

paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu välillä $[2, \infty[$.

18. Tutki, missä pisteessä (tai pisteissä) funktio

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt \qquad (x > 0)$$

saavuttaa suurimman arvonsa välillä $]0, 2]$.

19. Olkoon $f(x,t)$ sellainen (muuttujan t suhteen) välillä $[a, b]$ Riemann-integroituva funktio, että sen derivaatta f'_x muuttujan x suhteen on jatkuva välillä I. Osoita, että

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x,t)\, dt \;=\; \int_a^b f'_x(x,t)\, dt$$

kaikilla $x \in I$.

Vihje: Differentiaalilaskennan väliarvolause.

20. Osoita tehtävän 19 tulosta käyttäen, että funktio

$$f(x) = \int_0^1 e^{xt^2 - xt}\, dt$$

on vähenevä koko reaalilukujoukossa.

6.2 Integraalifunktio

1. Määritä sellaiset vakiot a ja b, että funktio

$$F(x) \;=\; e^x(a \sin x + b \cos x)$$

on funktion $f(x) = e^x \sin x$ integraalifunktio.

2. Tutki, onko F jonkin funktion f integraalifunktio välillä $[-1, 1]$, kun

(a) $F(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kun } x \geq 0, \\ x^2, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$ (b) $F(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kun } x \geq 0, \\ x^2 + 1, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$

3. Anna esimerkki sellaisesta funktion

$$f(x) = e^{-x^2}$$

integraalifunktiosta F, että (a) $F(1) \geq 5$, (b) $F(5) = 3$.

4. Olkoon f välillä $[a, b]$ Riemann-integroituva funktio ja F sellainen välillä $[a, b]$ jatkuva ja välillä $]a, b[$ derivoituva funktio, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in]a, b[$. Osoita, että

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a).$$

Vihje: Differentiaalilaskennan väliarvolause ja Riemannin summan raja-arvo.

5. Anna esimerkki sellaisesta välillä $[0, 1]$ määritellystä funktiosta, että funktio ei ole Riemann-integroituva välillä $[0, 1]$, mutta funktiolla on integraalifunktio (a) välillä $]0, 1[$, (b) välillä $[0, 1]$.

Vihje: Riemann-integroituva funktio on rajoitettu.

6. Olkoon f välillä $[a, b]$ Riemann-integroituva funktio. Osoita, että jos funktiolla f on integraalifunktio välillä $[a, b]$, niin myös

$$G(x) = \int_c^x f(t)\, dt \qquad (c \in [a, b])$$

on funktion f on integraalifunktio välillä $[a, b]$. Voit olettaa tehtävän 4 tuloksen tunnetuksi.

7. Koska

$$\frac{d}{dx} \frac{\arctan(\sqrt{3} \tan x)}{\sqrt{3}} \;=\; \frac{1}{1 + 3\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

ja

$$1 + 2\sin^2 x \;=\; \cos^2 x + 3\sin^2 x \;=\; \cos^2 x\,(1 + 3\tan^2 x),$$

niin integraalilaskennan päälauseen nojalla

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x} \;=\; \int_0^\pi \frac{1}{1 + 3\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx \;=\; \Big/_{0}^{\pi} \frac{\arctan(\sqrt{3} \tan x)}{\sqrt{3}} \;=\; 0.$$

Miksi tulos ei voi olla oikea ja missä virhe tapahtui?

8. Olkoon f sellainen funktio, että $f(a) = 0$ ja f' on jatkuva välillä $[a, b]$. Osoita, että

$$(b-a) \int_a^b (f'(x))^2 \, dx \; \geq \; M^2,$$

missä $M = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$.

Vihje: Cauchy-Schwarzin epäyhtälö.

9. Olkoon f sellainen funktio, että

$$\int_0^{f(x)} t^2 \, dt \; = \; x \cos(\pi x)$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Määritä $f(\frac{1}{2})$ ja $f(4)$.

10. Osoita, että toinen raja-arvoista

$$\lim_{z \to 0+} \int_z^1 \frac{1}{x} \, dx \qquad \text{ja} \qquad \lim_{z \to 0+} \int_z^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$$

on äärellinen ja toinen ääretön.

7 Integrointimenetelmiä

Huom. Määräämätöntä integraalia koskevissa tehtävissä ei ole aina erikseen mainittu, milloin esimerkiksi integroitava funktio on määritelty. Tulokset ovat tietenkin voimassa vain sellaisilla väleillä, joilla integraalin olemassaoloehdot ovat voimassa.

7.1 Määräämätön integraali

Integrointivihje: Hyödynnä monisteen huomautuksen 7.1 integrointikaavoja ja yhdistetyn funktion derivointisääntöä.

1. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int \big(e^{2x} + x^5 + 3\sin 3x\big)\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{x^2+2}{2x}\,dx.$$

2. Määritä

$$\int \frac{e^x(x\log x + 1)}{x}\,dx.$$

   Vihje: Tulon derivointikaava.

3. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int \cos 5x\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int \sin^2 x\cos x\,dx, \qquad \text{(c)} \quad \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx.$$

4. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int 4^x\sqrt{4+4^x}\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int e^{x+1}\sqrt{2+e^x}\,dx.$$

5. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int \frac{8x^3}{5+x^4}\,dx, \quad \text{(b)} \quad \int \frac{e^x}{3e^x+2}\,dx, \quad \text{(c)} \quad \int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,dx.$$

6. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int xe^{3x^2}\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int x(1+x^2)^2 dx, \qquad \text{(c)} \quad \int \frac{1}{9x^2+1}dx.$$

7. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\log x}}\,dx.$$

8. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int_{-\log(2\pi)}^{-\log\pi} e^{-x}\sin(e^{-x})\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx.$$

9. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int_{-1}^{1} |e^{2x+1} - 1| \, dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\tan \frac{x}{2}| \, dx.$$

10. Arvioi summaa

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k}$$

sopivan integraalin avulla ja osoita, että

$$S_n > \log(\log(n+1)) \quad (n \geq 2).$$

7.2 Osittaisintegrointi

1. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int 3x \sin 6x \, dx, \qquad \text{(b)} \quad \int x e^{-x} \, dx, \qquad \text{(c)} \quad \int x^3 e^{x^2} dx.$$

2. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int_1^e \sqrt{x} \log x \, dx. \qquad \text{(b)} \quad \int_1^{e^2} \frac{\log x}{\sqrt{x}} \, dx, \qquad \text{(c)} \quad \int_1^e \frac{\log x}{x^2} \, dx.$$

3. Määritä

$$\int_0^{\pi} x \cos(nx) \, dx \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

4. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int e^{2x} \sqrt{e^x + 1} \, dx, \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} \, dx, \qquad \text{(c)} \quad \int \log^3 x \, dx.$$

5. Olkoon f välillä $[a, b]$ jatkuva funktio. Osoita, että

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(t) \, dt \right) dx \;=\; \int_a^b (x-a) f(x) \, dx.$$

6. Olkoot f ja f' derivoituvia ja f'' jatkuva välillä $[0, \pi]$. Laske $f(0)$, kun tiedetään, että $f(\pi) = 2$ ja

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \sin x \, dx \;=\; 5.$$

7. Olkoon g välillä $[a, b]$ jatkuva funktio ja f sellainen funktio, että f' on jatkuva ja $f'(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$. Osoita, että on olemassa sellainen $c \in \,]a, b[$, että

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \;=\; f(a)\int_a^c g(x)\,dx \;+\; f(b)\int_c^b g(x)\,dx.$$

Vihje: Sovella osittaisintegrointia (valitse sopiva funktio G, jolle $G'(x) = g(x)$) ja käytä sitten yleistettyä integraalilaskennan väliarvolausetta.

8. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n\cos x}{(1+nx)^2}\,dx = 1.$$

Vihje: Käytä ensin osittaisintegrointia ja hyödynnä sitten suppiloperiaatetta jäljelle jääneen integraalin raja-arvon määrittämisessä.

9. Määritä

(a) $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx,$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx.$

10. Johda palautuskaava integaalin

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \qquad (n \in \mathbf{Z}_+)$$

laskemiseksi.

7.3 Sijoitusmenetelmä eli muuttujanvaihto

1. Suorita integraalissa

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

muuttujanvaihto tekemällä sijoitus $x = \tan t$. Tässä tehtävässä ei tarvitse määrittää integraalin arvoa, riittää tehdä mainittu muuttujanvaihto.

2. Suorita integraalissa

$$\int_1^e \frac{1-\log^2 x}{x\left(1+\log^2 x\right)}\,dx$$

muuttujanvaihto tekemällä sijoitus $x = e^t$. Tässä tehtävässä ei tarvitse määrittää integraalin arvoa, riittää tehdä mainittu muuttujanvaihto.

3. Olkoon f välillä $[0, 1]$ jatkuva funktio. Osoita sopivaa sijoitusta käyttämällä, että

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

Vihje: $\sin(\pi - z) = \sin z$ kaikilla $z \in \mathbf{R}$.

4. Olkoon f välillä $[a,b]$ jatkuva funktio. Osoita sopivaa sijoitusta käyttämällä, että

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

5. Osoita sopivaa sijoitusta käyttämällä, että jos $x>0$, niin

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \;=\; \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

6. Osoita , että

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\cos x}\,dx \;=\; 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\cos x}\,dx.$$

Vihje: $\cos z = \cos(-z)$ kaikilla $z \in \mathbf{R}$.

7. Funktio f on jaksollinen, jaksona $\omega \neq 0$, jos $f(x+\omega) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että jos f on jaksollinen (jaksona $\omega \neq 0$) funktio, joka on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

(a) $\displaystyle\int_\omega^{a+\omega} f(x)\,dx \;=\; \int_0^a f(x)\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx \;=\; \int_0^\omega f(x)\,dx$

kaikilla $a \in \mathbf{R}$.

8. Tehdään integraaliin

$$\int_0^3 (x-2)^2\,dx$$

sijoitus $(x-2)^2 = t$ eli $x = 2+\sqrt{t}$. Tällöin $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$, $(0-2)^2 = 4$ ja $(3-2)^2 = 1$, joten

$$\int_0^3 (x-2)^2\,dx = \int_4^1 t\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = -\frac{1}{3}\int_1^4 \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{3}\Big/_1^4\, t^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(4^{\frac{3}{2}}-1) = -\frac{7}{3}.$$

Selvästikään tulos ei voi olla oikea (miksi?). Missä virhe tapahtui?

9. Määritä

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} 2x\cos(x^2)\,dx$$

sekä tekemällä sijoitus $x = \sqrt{t}$ (ja vaihtaen myös integraalin rajat) että määrittämällä ensin samalla sijoituksella määräämätön integraali ja käyttämällä sitten alkuperäisiä rajoja.

10. Määritä

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

tekemällä sijoitus $x = \log t$.

11. Määritä

$$\int \frac{1+\log x}{3+x\log x}\,dx$$

tekemällä sijoitus $t = 3 + x\log x$.

12. Määritä

$$\int \frac{\log x}{x(1+\log^2 x)}\,dx$$

käyttämällä (a) sijoitusta $t = \log x$, (b) sijoitusta $t = 1 + \log^2 x$.

13. Määritä

$$\int \frac{x^5}{(1+x^3)^2}\,dx$$

käyttämällä (a) sijoitusta $t = x^3 + 1$, (b) osittaisintegrointia.

14. Määritä

$$\int e^{3x+2}\,dx$$

sekä tekemällä sijoitus $t = 3x + 2$ että käyttämällä (ilman sijoitusta) suoraan yhdistetyn funktion derivoinsääntöä.

15. Määritä

$$\int \log(\sqrt{x}+1)\,dx$$

(a) tekemällä sijoitus $t = \sqrt{x} + 1$ ja käyttämällä sitten osittaisintegrointia, (b) tekemällä sijoitus $t = \sqrt{x}$ ja käyttämällä sitten osittaisintegrointia.

Vihje (b)-kohtaan: $D(t^2 - 1) = 2t$.

16. Määritä

$$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

sekä tekemällä sijoitus $t = \sqrt{x}$ että käyttämällä (ilman sijoitusta) suoraan yhdistetyn funktion derivoinsääntöä.

17. Määritä

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\,dx$$

sekä tekemällä sijoitus $t = x^2 + 2x + 6$ että käyttämällä (ilman sijoitusta) suoraan yhdistetyn funktion derivoinsääntöä.

18. Määritä

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x + \tan x}{(1+\tan x)^2}\, e^{\tan x}\,dx$$

tekemällä sijoitus $t = \tan x$ ja käyttämällä sitten osittaisintegrointia.

19. Tiedetään, että funktio f on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,dx = 6$. Määritä

$$\text{(a)} \int_0^3 f(3x)\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^3 x f(x^2)\,dx.$$

20. Määritä

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$$

tekemällä sijoitus $x = t^2$ ja käyttämällä sitten osittaisintegrointia.

7.4 Rationaalifunktiot

1. Määritä

$$\text{(a)} \int \frac{x+6}{x+2}\,dx, \quad \text{(b)} \int \frac{(x^3-2)(x+1)}{x^2}\,dx, \quad \text{(c)} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{x^2+2}\,dx.$$

2. Määritä

$$\text{(a)} \int \frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx, \qquad \text{(b)} \int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx,$$

$$\text{(c)} \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx, \qquad \text{(d)} \int \frac{1}{x^2-3x+4}\,dx.$$

3. Muodosta funktion $R(x)$ osamurtokehitelmä, kun

$$\text{(a)}\ R(x) = \frac{1}{x(x-1)^3}, \quad \text{(b)}\ R(x) = \frac{3}{x^3-1}, \quad \text{(c)}\ R(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)^4}.$$

4. Mikä ehto vakioiden $p, q, r \in \mathbf{R}$ on toteutettava, jos funktion $(x \neq 0, 1)$

$$\text{(a)}\ R(x) = \frac{px+q}{x^2(x-1)}, \qquad \text{(b)}\ R(x) = \frac{px^2+qx+r}{x^2(x-1)}$$

kaikki integraalifunktiot ovat rationaalifunktioita?

5. Onko mahdollista, että rationaalifunktion $(x \neq 0, 1)$

$$\text{(a)}\ R(x) = \frac{px+q}{x(x-1)}, \qquad \text{(b)}\ R(x) = \frac{px^2+q}{x^2(x-1)}$$

kaikki integraalifunktiot ovat rationaalifunktioita, jos $p \neq 0$?

6. Määritä

(a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x^2-3x-4}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x^2+4x+3}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}\,dx,$ (d) $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx.$

7. Määritä

(a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x^2}\,dx,$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx.$

8. Määritä

(a) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{4x^2-4x+3}\,dx.$

9. Määritä

(a) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2}\,dx.$

10. Määritä

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+2x+10)^2}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

käyttämällä integraalille

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

monisteessa johdettua palautuskaavaa.

7.5 Trigonometriset funktiot

1. Muunna integraali

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x\,(2+\cos x+2\sin x)}\,dx$$

rationaalifunktion integraaliksi tekemällä sopiva sijoitus. Saatu tulos on sievennettävä muotoon, josta voidaan aloittaa osamurtokehitelmän teko (itse osamurtokehitelmää ei tarvitse tehdä).

2. Muunna integraali

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$$

rationaalifunktion integraaliksi sekä tekemällä sijoitus $t = \tan\frac{x}{2}$ että tekemällä sijoitus $t = \tan x$. Tässä tehtävässä ei tarvitse määrittää integraalin arvoa, riittää tehdä mainittu muuttujanvaihto.

3. Määritä

$$\int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx.$$

4. Määritä

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$$

käyttämällä sijoitusta $t = \sin x$.

5. Olkoon f välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ jatkuva funktio. Osoita, että

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$$

Vihje: $\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos z$ kaikilla $z \in \mathbf{R}$.

6. Määritä

$$\int \cos^2 x\,dx$$

hyödyntämällä kaavaa $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

7. Määritä

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos^3 x)\,dx$$

muokkaamalla integroitavaa funktiota trigonometrian peruskaavojen avulla.

8. Määritä integraali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x + \cos x}\,dx$$

(a) käyttämällä sopivaa sijoitusta, (b) muokkaamalla integroitavaa funktiota trigonometrian peruskaavojen avulla.

9. Määritä

$$\int \sin^3 x\,dx$$

(a) muokkaamalla integroitavaa funktiota kaavan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ avulla, (b) tekemällä sijoitus $x = 2\arctan t$, (c) tekemällä sijoitus $t = \sin x$ ja käyttämällä sitten osittaisintegrointia sekä yhdistetyn funktion derivointisääntöä, (d) tekemällä sijoitus $t = \cos x$ ja hyödyntämällä kaavaa $\sin(\arccos t) = \sqrt{1 - t^2}$.

10. Johda palautuskaava integraaleille

$$\int \sin^n x\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int \cos^n x\,dx \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

7.6 Algebralliset funktiot

1. Muunna integraali

$$\text{(a)} \int_0^4 \sqrt{3x+4}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^4 x\sqrt{3x+4}\,dx$$

rationaalifunktion integraaliksi tekemällä sopiva sijoitus. Tässä tehtävässä ei tarvitse määrittää integraalin arvoa, riittää tehdä mainittu muuttujanvaihto.

2. Määritä

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx.$$

3. Määritä

$$\text{(a)} \int_5^{12} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_{-\frac{1}{3}}^2 \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx.$$

4. Muunna integraali

$$\int_{\frac{13}{14}}^{\frac{9}{7}} \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$$

rationaalifunktion integraaliksi tekemällä sopiva sijoitus. Saatu tulos on sievennettävä muotoon, josta voidaan aloittaa osamurtokehitelmän teko (itse osamurtokehitelmää ei tarvitse tehdä).

5. Määritä

$$\int \frac{1}{x^2+4x+3}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx.$$

6. Määritä

$$\text{(a)} \int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int \frac{1}{\sqrt{2-6x-9x^2}}\,dx$$

käyttämällä neliöintiä ja yhdistetyn funktion derivointikaavaa.

7. Määritä

$$\text{(a)} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx.$$

8. Osoita, että muotoa $R(x, \sqrt{x^2+1})$ olevan funktion, missä R on rationaalifunktio, integrointi voidaan aina palauttaa rationaalifunktion integroinniksi tekemällä sijoitus $t = x + \sqrt{x^2+1}$.

9. Määritä

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

käyttämällä tehtävän 8 sijoitusta $t = x + \sqrt{x^2+1}$.

10. Osoita, että jos $b^2 - 4ac > 0$, niin muotoa $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ olevan funktion, missä R on rationaalifunktio, integrointi voidaan aina palauttaa rationaalifunktion integroinniksi sopivalla sijoituksella.