

Analyysi C

Harjoitukset 3, 12.11.2019

1. Osoita osasummia tarkastelemalla, että sarja

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$$

suppenee, ja määritä sarjan summa.

2. Osoita, että jos $x_k \geq x_{k+1} \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$ ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, niin

$$\lim_{k \rightarrow \infty} kx_k = 0.$$

Vihje: Hyödynnä Cauchyn suppenemisehtoa (osasummien jonoon).

3. Tutki, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^2 - 1}{k^2 - 5}.$$

4. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$$

hajaantuu.

5. Tutki, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 + 2^k}{3^{k+2}}.$$

Myönteisessä tapauksessa määritä sarjan summa.

6. Osoita lausetta 3.12 käyttäen, että jos $x_k, y_k \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$ ja sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

suppenevat, myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

suppenee.

7. Osoita, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{4k^2 + 1} < \frac{\pi}{2}.$$

8. Tutki sekä käyttäen integraalitarkastinta että käyttäen majorantti- tai minoranttiperiaatetta, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k - 1}.$$