

Analyysi C

Harjoitukset 5, 26.11.2019

1. Tutki, millä muuttujan x arvoilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}$$

suppenee.

2. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nx+1}$$

suppenee tasaisesti välillä $[1, 2]$.

3. Osoita, että jos funktio g on rajoitettu ja sarja $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$, myös sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(x)u_k(x)$$

suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$.

4. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+2\sin x}{k^4+\sin x}$$

suppenee tasaisesti joukossa \mathbf{R} .

5. Tutki, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^2 e^{-kx}$$

tasaisesti välillä $[0, \infty[$.

6. Osoita, että funktiolla

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-kx}{k^3+x^2}$$

on ainakin yksi nollakohta.

Vihje: Bolzanon lause.

7. Määritä

$$\int_1^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kx} \right) dx.$$

8. Osoita eksponenttifunktion sarjaesitystä hyödyntäen, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 x^k}{k!} = (x^2 + x)e^x$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.