

Analyysi C

Harjoitukset 6, 3.12.2019

1. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3x + 3)^{2n+1}}{(\log n)^n}$$

keskipiste c ja kertoimet a_0, a_1, a_2, \dots

2. Olkoot R_1 ja R_2 (järjestyksessä) potenssisarjojen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k^2}$$

suppenemissäteet. Osoita, että jos $1 < R_1 < \infty$, niin $R_2 = 1$.

Vihje: Huomioi itseinen suppeneminen.

3. Olkoon $\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ irrationaaliluvun α desimaaliesitys. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

suppenemissäde.

4. Olkoon R potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

suppenemissäde. Osoita, että jos $R > 1$, niin joukko $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu. Päteekö tulos, jos $R = 1$?

5. Määritä potenssisarjojen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2} x^k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^k x^k$$

suppenemissäteet.

6. Anna esimerkki potenssisarjasta, jonka suppenemissäde on 8 ja joka suppenee suppenemisvälinsä molemmissa päätepisteissä, sekä esimerkki potenssisarjasta, jonka suppenemissäde on 8 ja joka hajaantuu suppenemisvälinsä molemmissa päätepisteissä.

7. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \log(3^n + 3^{3^n}) x^n$$

suppenemissäde.

8. Anna esimerkki sellaisesta funktiosta f , että

$$f(0) = 3 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(0) = n \quad \forall n \geq 1.$$

Määritä myös $f(1)$ ja $f(2)$.