

Analyysi C

Harjoitukset 7, 5.12.2019

1. Olkoon f sellainen funktio, että

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{3^n}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$. Osoita, että funktion f Maclaurinin sarja esittää funktiota f kaikilla $x \in]-3, 3[$.

2. Määritä funktion

$$f(x) = \cos(2x^3)$$

Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

3. Määritä hyperbolisen sinin eli funktion

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

4. On melko helppo osoittaa, että

$$\sin^2 x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+2)!} x^{2k+2} \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Osoita yllä olevaa tulosta ja funktion $\sin x$ Maclaurinin sarjaa käyttäen, että

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

5. Määritä funktio, jonka Maclaurinin sarja välillä $[-1, 1]$ on

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^{2k+1}.$$

6. Määritä derivaatat $f^{(2019)}(0)$ ja $f^{(2020)}(0)$, kun $f(x) = \arctan x$.

7. Määritä potenssisarjaesityksiä käyttäen raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{3x} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3 \cos x}.$$

8. Määritä potenssisarjaesitystä käyttäen raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x (1 - e^{-t^2}) dt.$$