Analyysi C

Epäoleellinen integraali ja sarjat

Harjoitustehtäviä

Syksy 2019

Sisältö

2 Epäoleellinen integraali **3**
2.1 Integraalin suppeneminen 3
2.2 Ei-negatiivisen funktion integraalin suppeneminen 4
2.3 Itseinen suppeneminen 7
2.4 Integrointi yli äärettömän välin 9

3 Sarjateorian alkeita **15**
3.1 Määritelmiä 15
3.2 Perustuloksia 16
3.3 Positiiviterminen sarja 18
3.4 Vuorotteleva sarja 22
3.5 Itseinen suppeneminen 24

4 Funktiosarjoista **26**
4.1 Funktiosarjan suppeneminen 26
4.2 Sarjan tasainen suppeneminen 27
4.3 Tasaisen suppenemisen seurauksia 30

5 Potenssisarjoista **34**
5.1 Määritelmä 34
5.2 Potenssisarjan suppenemissäde ja -väli 35
5.3 Potenssisarjan määrittelemä funktio 38
5.4 Taylorin sarja 39

2 Epäoleellinen integraali

Integrointivihje: Hyödynnä yhdistetyn funktion integrointisääntöä.

2.1 Integraalin suppeneminen

1. Määritä

$$\text{(a)} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-3x}}\,dx, \qquad \text{(c)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}\,dx$$

   tai osoita, että epäoleellinen integraali hajaantuu.

2. Määritä

$$\text{(a)} \int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_1^2 \frac{1}{x\log x}\,dx, \qquad \text{(c)} \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\,dx$$

   tai osoita, että epäoleellinen integraali hajaantuu.

3. Tutki, millä vakion $p \in \mathbf{R}$ arvoilla epäoleellinen integraali

$$\int_1^2 \frac{1}{x(\log x)^p}\,dx$$

   suppenee. Myönteisessä tapauksessa määritä integraalin arvo.

4. Osoita, että integraalin

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

   epäoleellisuus on näennäistä siinä mielessä, että integroitava funktio voidaan muuntaa Riemann-integroituvaksi määrittelemällä sille nollassa jokin arvo.

5. Määritä

$$\text{(a)} \int_{-5}^5 \frac{4}{x+4}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

   tai osoita, että epäoleellinen integraali hajaantuu.

6. Määritä

$$\text{(a)} \int_0^5 \frac{1}{x-3}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_\pi^{2\pi} \tan x\,dx$$

   tai osoita, että epäoleellinen integraali hajaantuu.

7. Määritä

$$\text{(a)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx.$$

   Vihje: $-x^2+4x-3 = (x-1)(3-x) = 1-(x-2)^2$.

8. Esitä epäoleellinen integraali

$$\int_0^6 \frac{1}{x^3 - 6x^2 + 8x}\, dx$$

Riemann-integraalien raja-arvojen summana.

9. Olkoon f sellainen jokaisella välin $[a, b[$ suljetulla osavälillä Riemann-integroituva funktio, että epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

suppenee. Osoita, että jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen piste $c \in \,]a, b[$, että

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

aina, kun $c \leq z_1, z_2 < b$.

10. Olkoon f jokaisella välin $[a, b[$ suljetulla osavälillä Riemann-integroituva funktio. Oletetaan lisäksi, että jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen piste $c \in \,]a, b[$, että

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

aina, kun $c \leq z_1, z_2 < b$. Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

suppenee.

Vihje: Cauchyn suppenemisehto (lukujonoille).

2.2 Ei-negatiivisen funktion integraalin suppeneminen

1. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\log x}\, dx\,.$$

2. Tutki majorantti- ja minoranttiperiaatteita käyttäen, suppeneeko epäoleellinen integraali

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}\, dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{x^2}\, dx,$ (c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3x + \sin x}{x^2}\, dx.$

3. Osoita majorantti- ja minoranttiperiaatteita käyttäen, että toinen epäoleellisista integraaleista
$$\int_0^3 \frac{1}{x^2+x}\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_0^3 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$$
suppenee ja toinen hajaantuu.

4. Osoita, että toinen epäoleellisista integraaleista
$$\int_0^3 \frac{e^{-x}}{x^2}\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_0^3 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$
suppenee ja toinen hajaantuu.

5. Tutki majorantti- ja minoranttiperiaatteita käyttäen, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+x}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{1}{x^2-x^4\sin^2 x}\,dx.$$

6. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\text{(a)} \int_0^\pi \frac{x+1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x\sin\frac{1}{x}}{x+\sin x}\,dx.$$

7. Osoita, että
$$\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$$
hajaantuu, kun $s \le 0$.

8. Tutki majorantti- ja minoranttiperiaatteita käyttäen, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}-x}\,dx, \quad \text{(b)} \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{2-x}}\,dx, \quad \text{(c)} \int_0^3 \frac{\sin x}{3x-x^2}\,dx.$$

9. Tutki, millä vakion $s \in \mathbf{R}$ arvoilla epäoleellinen integraali
$$\int_0^1 \frac{1}{x^s\log(x+1)}\,dx$$
suppenee.

10. Tutki majorantti- ja minoranttiperiaatteita käyttäen, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x\sqrt{x}}\,dx.$$
Vihje: Raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

11. Tutki majorantti- ja minoranttiperiaatteita käyttäen, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1}\, dx, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{1}{e^x - \cos x}\, dx, \qquad \text{(c)} \int_0^e \frac{e^x - 1}{x^2}\, dx.$$

12. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\text{(a)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(3x)}{x^2}\, dx, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\, dx.$$

13. Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x)^p}\, dx \qquad (p \in \mathbf{R})$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $p < 1$.

14. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{1}{\log(x^2+1)}\, dx, \qquad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\left(1+\sqrt{x}\right)}{e^{\sin x} - 1}\, dx.$$

15. Oletetaan, että funktiot f ja g ovat jatkuvia ja f on ei-negatiivinen välillä $[2, 5[$. Osoita, että jos

$$\lim_{x \to 5-} g(x) \;=\; 3,$$

niin epäoleelliset integraalit

$$\int_2^5 f(x)\, dx \qquad \text{ja} \qquad \int_2^5 f(x) g(x)\, dx$$

suppenevat (tai hajaantuvat) samanaikaisesti.

16. Oletetaan, että funktio f on jatkuva ja ei-negatiivinen välillä $[0, 1[$. Osoita, että epäoleelliset integraalit

$$\int_0^1 f(x)\, dx \qquad \text{ja} \qquad \int_0^1 \frac{x}{x+1} f(x)\, dx$$

suppenevat samanaikaisesti.

17. Oletetaan, että funktio f on jatkuva ja ei-negatiivinen välillä $]-1, 1[$. Osoita, että epäoleelliset integraalit

$$\int_{-1}^1 f(x)\, dx \qquad \text{ja} \qquad \int_{-1}^1 (1-x^2)^{1-x^2} f(x)\, dx$$

suppenevat (tai hajaantuvat) samanaikaisesti.

18. Olkoon f sellainen välillä $[0,4]$ jatkuva funktio, että $f(0) = 2$. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\int_0^4 x^{-f(x)}\,dx.$$

19. Olkoot $f\colon [a,b[\to \mathbf{R}$ ja $g\colon [a,b[\to \mathbf{R}$ sellaisia ei-negatiivisia funktioita, että f ja g ovat Riemann-integroituvia välillä $[a,c]$ kaikilla $c \in [a,b[$ ja
$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$
missä $A \in \mathbf{R}$ ja $A > 0$. Osoita, että epäoleelliset integraalit
$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b g(x)\,dx$$
suppenevat (tai hajaantuvat) samanaikaisesti.

20. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$
Vihje: Kun $s > 0$, niin $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\log z}{z^s} = 0$.

2.3 Itseinen suppeneminen

1. Osoita, että toinen epäoleellisista integraaleista
$$\int_0^1 \frac{\cos(\log x)}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_0^1 \frac{\cos(\log x)}{x}\,dx$$
suppenee ja toinen hajaantuu.

2. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\text{(a)} \int_0^{\pi} \frac{1 + 2\sin\frac{\pi}{x}}{\sqrt{x} + x}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{e^{\sin(\cot x)} - 2}{x^3 + 3\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

3. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\text{(a)} \int_0^2 \frac{\sin(\log(2-x))}{2 - x + \sqrt{2-x}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x + 5\sin(\tan x)}{\sqrt{\pi - 2x}}\,dx.$$

4. Osoita, että epäoleellinen integraali
$$\int_0^1 \frac{\left(\left\lceil \frac{2}{x} \right\rceil - 2\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil + \frac{1}{2}\right) e^{x+1} + 1}{e^x + \sqrt{x} - 1}\,dx$$
suppenee.

5. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\log(\sqrt{2}+\cos(1+\log x))}{\sqrt{x}-x}\,dx.$$

6. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\text{(a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}\,\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}\,\cos\frac{1}{x}}{\tan x}\,dx.$$

7. Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}\sin(\cot x)}{\tan(\sin x)}\,dx$$

suppenee.

8. Oletetaan, että funktiot f ja g ovat Riemann-integroituvia jokaisella välin $[a,b[$ suljetulla osavälillä. Osoita, että jos epäoleelliset integraalit

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b g(x)\,dx$$

suppenevat itseisesti, myös funktion $f+g$ epäoleellinen integraali välillä $[a,b]$ suppenee itseisesti.

9. Olkoot f ja g sellaisia funktioita, että f ja g ovat Riemann-integroituvia välillä $[a,c]$ kaikilla $c \in]a,b[$ ja epäoleelliset integraalit

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b g^2(x)\,dx$$

suppenevat. Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

suppenee. Vihje: $(f \pm g)^2 \geq 0$.

10. Oletetaan, että funktiot f ja g ovat Riemann-integroituvia jokaisella välin $[a,b[$ suljetulla osavälillä. Osoita, että jos epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee itseisesti ja g on rajoitettu välillä $[a,b[$, niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

suppenee.

2.4 Integrointi yli äärettömän välin

2.4.1 Integraalin suppeneminen

1. Määritä

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,dx, \quad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad \text{(c)} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$$

tai osoita, että epäoleellinen integraali hajaantuu.

2. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx, \quad \text{(b)} \int_{e^2}^\infty \frac{1}{x\log^3 x}\,dx, \quad \text{(c)} \int_2^\infty \frac{1}{x^2+x-2}\,dx.$$

Myönteisessä tapauksessa määritä epäoleellisen integraalin arvo.
Vihje: (a): $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$, (c): Kun $x \geq 2$, niin $\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$.

3. Millä vakion $k \in \mathbf{R}$ arvoilla epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,dx$$

suppenee? Mikä on tällöin epäoleellisen integraalin arvo?

4. Osoita, että

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \;=\; \frac{\pi^2}{8}.$$

5. Olkoon $f(x)$ sellainen funktio, että $f'(x)$ on jatkuva kaikilla $x \geq a$ ja

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; f(a).$$

Osoita, että

$$\int_a^\infty f'(x)\,dx \;=\; 0.$$

6. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{kun } x \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Z}_+, \\ (-1)^k \cdot k, & \text{kun } x \in \mathbf{Z}_+. \end{cases}$$

Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

suppenee, ja määritä epäoleellisen integraalin arvo.

2.4.2 Ei-negatiivisen funktion integraalin suppeneminen

7. Tutki majorantti- ja minoranttiperiaatteita käyttäen, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{3x - \sin x - 2}{x^3}\, dx, \qquad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{4x - 3}{x^3 + \sin x + 1}\, dx.$$

8. Tutki majorantti- ja minoranttiperiaatteita käyttäen, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\log(x^2+1)}{x}\, dx, \quad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{x+4}{5x^2-1}\, dx, \quad \text{(c)} \int_1^\infty \frac{2+\cos x}{x+\sin^2 x}\, dx.$$

9. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\tan \frac{1}{x}}{1 + x\sqrt{x}}\, dx, \qquad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x}\cos x + 1}{x^2 + \sqrt{x} + 3}\, dx.$$

10. Tutki majorantti- ja minoranttiperiaatteita käyttäen, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\text{(a)} \int_2^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + \sqrt[3]{x+1}}\, dx, \quad \text{(b)} \int_2^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 4}\, dx, \quad \text{(c)} \int_a^\infty \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}\, dx \ \ (a > 1).$$

11. Osoita majorantti- ja minoranttiperiaatteita käyttäen, että toinen epäoleellisista integraaleista
$$\int_1^\infty \frac{1}{x + \log x}\, dx \qquad \text{ja} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2 - \log x}\, dx$$
suppenee ja toinen hajaantuu.

12. Tutki, suppenevatko epäoleelliset integraalit
$$\int_1^\infty \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\, dx \qquad \text{ja} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{\lceil x \rceil}\, dx.$$

13. Osoita, että
$$\int_0^\infty \frac{2e^{-x}\cos^2 x}{x^2+1}\, dx \ \le \frac{3\pi}{4}.$$

14. Olkoon funktio $f(x)$ jatkuva kaikilla $x \ge 1$ ja
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\log x} = -2.$$
Osoita, että epäoleellinen integraali
$$\int_1^\infty e^{f(x)}\, dx$$
suppenee.

15. Tutki, millä vakion $a \in \mathbf{R}$ arvoilla epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty e^{-x^a}\,dx$$

suppenee.

16. Olkoot f ja g sellaisia funktioita, että $f(x) \geq 0$ ja $g(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq a$ ja f sekä g ovat Riemann-integroituvia jokaisella välin $[a, \infty[$ suljetulla osavälillä. Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \text{ja} \qquad \int_a^\infty g(x)\,dx \ \text{ suppenee.}$$

Todista, että myös

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee.

17. Olkoot f ja g sellaisia funktioita, että $f(x) \geq 0$ ja $g(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq a$ ja f sekä g ovat Riemann-integroituvia jokaisella välin $[a, \infty[$ suljetulla osavälillä. Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \qquad \text{ja} \qquad \int_a^\infty g(x)\,dx \ \text{ hajaantuu.}$$

Todista, että myös

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

hajaantuu.

18. Tutki epäoleellisen integraalin

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{3x}{x^3+1}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}\,dx, \qquad \text{(c)} \int_1^\infty \frac{2x+\sin x}{x^2\sqrt{x}+2}\,dx$$

suppenemista sekä käyttäen majorantti- ja minoranttiperiaatteita että käyttäen osamäärätestiä (lause 2.35).

19. Määritä kaikki vakion $s \in \mathbf{R}$ arvot, joilla epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty \frac{x^s+3x+2}{2x^5+4x^3+1}\,dx$$

suppenee

20. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}\,dx.$$

21. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\text{(a)} \int_1^\infty \sin\frac{1}{x}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{1}{x^2(\log(x+4)-\log x)}.$$

22. Osoita, että toinen epäoleellisista integraaleista

$$\int_1^\infty \big(\log(x+1)-\log x\big)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_1^\infty \big(\log(x^2+1)-\log(x^2)\big)\,dx$$

suppenee ja toinen hajaantuu.

2.4.3 Itseinen suppeneminen

23. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2+\sin^2 x}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{4\cos x-3}{x^2}\,dx.$$

24. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\sin x}{x+x\sqrt{x}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{\cos(e^x)}{x^2-2x+2}\,dx.$$

25. Osoita, että

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx$$

suppenee.

26. Olkoon $f(x)$ sellainen kaikilla $x \geq 0$ jatkuva funktio, että

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}\,dx$$

suppenee itseisesti. Osoita, että

$$\int_0^\infty f(x)e^{-ax}\,dx$$

suppenee kaikilla $a > 1$.

27. Osoita, että

$$\lim_{t\to\infty}\int_\pi^\infty \frac{e^{-tx}\sin x}{x}\,dx \;=\; 0.$$

28. Osoita, että jos epäoleellinen integraali

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee itseisesti, niin

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \;\leq\; \int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

2.4.4 Muut rajoittamattomat välit

29. Määritä

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{(x-5)^3}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{6-x}}\,dx, \qquad \text{(c)} \int_{-\infty}^{0} 2e^{2x}\,dx$$

tai osoita, että epäoleellinen integraali hajaantuu.

30. Määritä

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \qquad \text{(c)} \int_{-\infty}^{\infty} x^5\,dx$$

tai osoita, että epäoleellinen integraali hajaantuu.

31. Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Osoita, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2ax+a^2+1}\,dx \;=\; \pi.$$

Vihje: $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$.

32. Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

suppenee.

Vihje: Käytä funktiota $e^{-|x|}$ majoranttina.

2.4.5 Rajoittamaton funktio ja ääretön väli

33. Määritä

$$\text{(a)} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx, \qquad \text{(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^5}\,dx$$

tai osoita, että epäoleellinen integraali hajaantuu.

34. Esitä epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x}\,dx$$

Riemann-integraalien raja-arvojen summana. Osoita myös, että epäoleellinen integraali hajaantuu.

35. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}\,dx.$$

36. Osoita minoranttiperiaatetta käyttäen, että epäoleelliset integraalit

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x+x^2}\,dx$$

hajaantuvat.

37. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{1}{x^2-x}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\,dx, \qquad \text{(c)} \int_1^\infty \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}\,dx.$$

38. Tutki, millä vakion $p \in \mathbf{R}$ arvoilla epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p(1+x)^p}\,dx$$

suppenee.

39. Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty \frac{(x-\sin x)^q}{x^p}\,dx \qquad (p, q \in \mathbf{R})$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $q+1 < p < 3q+1$.

40. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{1-2\cos(\log x)}{x^2+x+\sqrt{x}}\,dx.$$

3 Sarjateorian alkeita

3.1 Määritelmiä

1. Olkoon

$$\sum_{k=p}^{\infty} x_k \;=\; \frac{6}{3\cdot 4} + \frac{8}{4\cdot 5} + \frac{10}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{2n+4}{(n+2)(n+3)} + \cdots,$$

missä

$$\frac{2n+4}{(n+2)(n+3)}$$

on sarjan n:s termi. Määritä termi x_k, kun (a) $p = 0$, (b) $p = 1$, (c) $p = 3$, (d) $p = 5$.

2. Tutkittavasta sarjasta tiedetään, että jokaista lukua $c > 0$ kohti on olemassa sellainen vakio $N \in \mathbf{Z}_+$, että sarjan osasummat S_n ja S_m toteuttavat ehdon

$$|S_n - S_m| \;<\; c$$

aina, kun $n > N$ ja $m > N$. Voidaanko tämän perusteella osoittaa, että tutkittava sarja suppenee tai hajaantuu?

3. Osoita osasummia tarkastelemalla, että sarja

$$\text{(a)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}, \qquad \text{(b)}\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}, \qquad \text{(c)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$

suppenee, ja määritä sarjan summa.

4. Osoita, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} \;=\; 1.$$

5. Osoita osasummia tarkastelemalla, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\Big(1+\frac{1}{k}\Big)$$

hajaantuu.

6. Olkoon S_n harmonisen sarjan n:s osasumma ja

$$x_n \;=\; S_n - \log n \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Osoita, että lukujono (x_n) suppenee.[1]

[1] Lukujonon raja-arvoa kutsutaan Eulerin tai Eulerin-Mascheronin vakioksi ($= 0,5772\ldots$) ja merkitään usein symbolilla γ.

7. Anna esimerkki geometrisesta sarjasta, jonka summa on (a) 5, (b) 10.

8. Määritä sellainen vakio $r \in \mathbf{R}$, että

$$1 + e^r + e^{2r} + e^{3r} + \cdots \;=\; 9.$$

9. Määritä pienin sellainen luku $n \in \mathbf{N}$, että

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \;-\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \;<\; 0{,}01.$$

10. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

suppenee ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \;=\; \arctan 1 \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

3.2 Perustuloksia

1. Osoita, että jos $x_k \geq x_{k+1} \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$ ja sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, niin

$$\lim_{k\to\infty} k x_k = 0.$$

Vihje: Hyödynnä Cauchyn suppenemisehtoa (osasummien jonoon).

2. Osoita, että jos $x_k > 0$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$ ja sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

suppenee, niin joukossa $\{x_k \mid k \in \mathbf{Z}_+\}$ on suurin luku.

3. Tutki, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \;\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k-1}, \qquad \text{(b)} \;\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^2-1}{k^2-5}, \qquad \text{(b)} \;\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^2+k} - k\right).$$

4. Osoita, että sarja

$$\text{(a)} \;\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1), \qquad \text{(b)} \;\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\frac{1}{n}}}, \qquad \text{(c)} \;\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

hajaantuu.

5. Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{a-k\pi}$$

suppenee, ja määritä sellainen vakion a arvo, että sarjan summa on 1.

6. Tutki, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}+3^{k+2}}{4^k}, \qquad \text{(b)} \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+2^k}{3^{k+2}}, \qquad \text{(c)} \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+2}+4\cdot(-1)^k}{3^{k+1}}.$$

Myönteisessä tapauksessa määritä sarjan summa.

7. Osoita, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{n(n+1)2^{n+1}} = 1.$$

8. Oletetaan (kurssilta Analyysi A) tunnetuksi, että

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Määritä tämän tuloksen avulla sarjan

$$\text{(a)} \ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k!}, \qquad \text{(b)} \ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k!}, \qquad \text{(c)} \ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(k+1)}{k!}$$

summa.

9. Tutki, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \pi^{\frac{k}{2}} \cos(k\pi), \qquad \text{(b)} \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}+3^{k-1}}{e^{k-3}}, \qquad \text{(c)} \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}+k}{k\,3^k}.$$

Myönteisessä tapauksessa määritä sarjan summa.

10. Osoita, että jos sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+\sin k}{2^{k+1}}$$

suppenee, niin sarjan summa on korkeintaan 2.

3.3 Positiiviterminen sarja

1. Osoita lausetta 3.12 käyttäen, että jos $x_k, y_k \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$ ja sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

suppenevat, myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

suppenee.

3.3.1 Integraalitarkastin

2. Tutki integraalitarkastinta käyttäen, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2+1)^2}, \qquad \text{(b)} \ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2-1}, \qquad \text{(c)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^{k^3}}.$$

3. Tutki, millä vakion $p > 0$ arvoilla sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

suppenee.

4. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=27}^{\infty} \frac{1}{n \log n \, (\log \log n)^p}$$

suppenee, kun $p > 1$.

5. Tutki, suppeneeko sarja

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log \log n) \cdots (\underbrace{\log \cdots \log}_{k \text{ kpl}} n)} \qquad (k \in \mathbf{Z}_+).$$

Yllä oletetaan, että N on niin suuri, että $\log \cdots \log n$ on määritelty.

6. Tutki, millä vakion $a > 0$ arvoilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\log n}$$

suppenee.

Vihje: Muunna sarjan termi n:n potenssiksi.

7. Osoita, että

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{4k^2+1} < \frac{\pi}{2}, \qquad \text{(b)} \quad \frac{\pi}{4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \leq \frac{\pi}{2}.$$

3.3.2 Majorantti- ja minoranttiperiaate

8. Tutki sekä käyttäen integraalitarkastinta että käyttäen majorantti- tai minoranttiperiaatetta, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k-1}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^2+1}.$$

9. Osoita, että toinen sarjoista

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+\cos(k\pi+k^2)+1}{2k^3} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-\cos(k^2\pi+k)-1}{k^3}$$

suppenee ja toinen hajaantuu.

10. Osoita, että toinen sarjoista

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-5}{n+\sqrt{n}+1} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+5}{n^2-\sqrt{n}-1}$$

suppenee ja toinen hajaantuu.

11. Tutki, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3+1}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+2)}, \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-6}{\sqrt[4]{16n^9+3n^7+2}}.$$

12. Osoita, että toinen sarjoista

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$$

suppenee ja toinen hajaantuu.

13. Tutki, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n^2}} \sin(x^2)\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx.$$

14. Osoita, että sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

hajaantuu.

15. Osoita, että jos $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$, niin sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$$

suppenevat (tai hajaantuvat) samanaikaisesti.

16. Tutki, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx.$$

Vihje: Raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$.

17. Tutki, millä vakion $p \in \mathbf{R}$ arvoilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(1 + \frac{1}{n^p}\Big)$$

suppenee.

18. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{x_k}\Big)^k \qquad (x_k > 0)$$

suppenee, jos $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 2$.

19. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{x_k}\Big)^{\log k} \qquad (x_k > 0)$$

hajaantuu, jos $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 2$.

20. Olkoot (a_n), (b_n) ja (c_n) sellaisia lukujonoja, että

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 2, \quad \lim_{n \to \infty} n b_n = 2 \quad \text{ja} \quad \lim_{n \to \infty} (n + a_n) c_n = 3.$$

Tutki, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

21. Osoita, että jos $\lim_{k\to\infty} kx_k = A > 0$, niin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

hajaantuu.

22. Osoita, että jos on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $x_k > 0$ ja $y_k > 0$ kaikilla $k \geq k_0$, ja sellainen $A \in \mathbf{R}_+$, että

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = A,$$

niin sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

suppenevat (tai hajaantuvat) samanaikaisesti.

3.3.3 Osamäärätarkastin

23. Tutki sekä käyttäen majorantti- tai minoranttiperiaatetta että käyttäen osamäärätarkastinta, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k + k}, \qquad \text{(b)} \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k + 1}, \qquad \text{(c)} \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^k + k}.$$

24. Osoita, että jos on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $x_k > 0$ ja

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \geq 1 - \frac{1}{k}$$

kaikilla $k \geq k_0$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hajaantuu.

25. Tutki osamäärätarkastinta käyttäen, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{\lceil k/2 \rceil}}{4^k} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{3^2}{4^4} + \frac{3^3}{4^5} + \frac{3^3}{4^6} + \cdots$$

26. Tutki, voidaanko sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{\lfloor k/2 \rfloor}}{3^k}$$

suppeneminen osoittaa osamäärätarkastinta käyttäen. Osoita myös, että sarja suppenee.

27. Tutki, voidaanko sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k+a^2}-\sqrt{k}) \qquad (a \neq 0)$$

suppeneminen tai hajaantuminen selvittää osamäärätarkastimen avulla.

28. Tutki, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{3^k}, \qquad \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2}, \qquad \text{(d)} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^{\sqrt{k}}}{2^k}.$$

29. Tutki, millä vakion $p > 0$ arvoilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^p p^{-n}$$

suppenee.

30. Tutki, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(2n)!}{(3n)!}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!}{n^n}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n\log n}}{n!}.$$

Vihje: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

3.4 Vuorotteleva sarja

1. Tutki, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\log k}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot k}{4k-1}, \qquad \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2k+3}{k^2}.$$

2. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

suppenee.

3. Tutki, suppeneeko sarja

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2\sqrt{k}}{k+1000}, \quad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi-2\arctan k)}{(-1)^{k-1}\cdot k}, \quad \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[k]{k}}.$$

4. Osoita, että sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
suppenee.

   Vihje: Voit olettaa tunnetuksi luvun 3.1 tehtävän 6 raja-arvotuloksen.

5. Olkoon f sellainen välillä $[0, 1]$ jatkuva funktio, että $f(0) = 2$. Osoita, että sarja
$$\sum_{n=2}^{\infty} \cos(n\pi) \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\, dx$$
suppenee.

6. Osoita, että
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

7. Määritä sellainen luku $n \in \mathbf{Z}_+$, että sarjan
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s}$$
jäännöstermi R_n on varmasti pienempi kuin $0{,}01$, kun (a) $s = 1$, (b) $s = 2$, (c) $s = 3$.

8. Osoita, että sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$
suppenee, ja määritä jokin sellainen vakio $n \in \mathbf{Z}_+$, että jos sarjan osasummassa on vähintään n termiä, niin osasumman arvo eroaa sarjan summasta vähemmän kuin $0{,}01$.

9. Osoita, että
$$\frac{389}{720} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \leq \frac{390}{720}.$$

10. Tutki, suppeneeko sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k + (-1)^k k} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5} - \frac{1}{18} + \cdots$$

3.5 Itseinen suppeneminen

1. Tutki sarjan

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k+2}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k^2-1)\cos(k\pi)}{3k^2+5k+1}$$

suppenemista ja itseistä suppenemista.

2. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)\cos k + \sin(k^3+1)}{k^3+3}$$

suppenee.

3. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$$

suppenee ehdollisesti.

4. Tutki sarjan

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{2n+3}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\log(e^n + e^{-n})}$$

suppenemista ja itseistä suppenemista.

5. Tutki sarjan

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{\pi}{k}$$

suppenemista ja itseistä suppenemista.

6. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+e^x}\, dx$$

suppenee ehdollisesti.

7. Osoita, että sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(-2)^n (n!)^2}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2^n \log(n^n)}$$

hajaantuu.

8. Osoita, että jos sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

suppenevat ja ainakin toinen niistä suppenee itseisesti, myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

suppenee.

9. Osoita majoranttiperiaatetta käyttäen, että jos sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$$

suppenevat, niin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

suppenee (itseisesti).

Vihje: Tarkastele sarjaa, jonka termi on $c_k = \max\{x_k^2, y_k^2\}$ $(k \in \mathbf{Z}_+)$.

10. Todista, että jos sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$$

suppenevat ja $p \geq 2$, myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^p$$

suppenee.

Vihje: Voit olettaa tehtävän 9 tuloksen tunnetuksi.

4 Funktiosarjoista

4.1 Funktiosarjan suppeneminen

1. Tutki luvun 4.1 esimerkkejä hyödyntäen, suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} + (-3)^{n+3}}{n\,3^n}.$$

2. Tutki luvun 4.1 esimerkkisarjojen suppenemistuloksia hyödyntäen, millä muuttujan x arvoilla sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^k}{k} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-3x)^k}{2k}$$

suppenevat.

3. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2\,2^{2n}}$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $x \in [-2, 6]$.

4. Tutki, millä muuttujan x arvoilla sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}$$

suppenee.

5. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k+x^2} - \sqrt{k}\,\right)$$

suppenee vain pisteessä $x = 0$.

6. Määritä sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\sin x)^{2k}$$

summafunktio välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

7. Tutki, millä muuttujan x arvoilla sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n2^n}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^x e^{-n}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^x}{(3n)!}$$

suppenee.

8. Tutki, millä muuttujan x arvoilla sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} \left(\frac{2x-1}{x+3} \right)^n, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$$

suppenee.

9. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k - a^k} \qquad (0 < a < x)$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $x > 1$.

10. Osoita, että jos $u_k(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $k \in \mathbf{N}$, niin sarjat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \log(1 + u_k(x)) \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

suppenevat (tai hajaantuvat) samanaikaisesti (kaikilla $x \in \mathbf{R}$).

4.2 Sarjan tasainen suppeneminen

1. Todista, että jos sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

suppenee tasaisesti väleillä $[a, b]$ ja $[b, c]$, niin sarja suppenee tasaisesti myös välillä $[a, c]$.

2. Todista, että jos sarjat

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$$

suppenevat tasaisesti välillä I, myös sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k(x) + w_k(x))$$

suppenee tasaisesti välillä I.

3. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$$

suppenee tasaisesti välillä $[a, \infty[$ $(a > 0)$.

4. Osoita, että sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nx+1}$$
suppenee tasaisesti välillä $[1, 2]$.

5. Olkoon $b > 0$. Osoita, että sarja
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{k^3+x}$$
suppenee tasaisesti välillä $]0, b]$.

6. Osoita, että sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n (1-x)$$
suppenee tasaisesti välillä $[0, 1]$.

7. Osoita, että sarja
$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
ei suppene tasaisesti välillä $]0, \infty[$.

8. Olkoon I jokin reaalilukuväli. Osoita, että jos $u_k(x) \geq u_{k+1}(x)$ kaikilla $x \in I$ ja kaikilla $k \in \mathbf{N}$ ja jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $k_0 \in \mathbf{N}$, että $|u_k(x)| < \varepsilon$ kaikilla $x \in I$ ja kaikilla $k \geq k_0$, niin sarja
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k(x)$$
suppenee tasaisesti välillä I.

9. Osoita, että jos funktio g on rajoitettu ja sarja $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$, myös sarja
$$\sum_{k=0}^{\infty} g(x) u_k(x)$$
suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$.

10. Osoita, että jos $w_k(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$ ja kaikilla $k \in \mathbf{N}$ ja sarja $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$ suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$, myös sarja
$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{x-kx^2} w_k(x)$$
suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$.

11. Perustele, miksi Weierstrassin M-testin avulla ei voida osoittaa, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{k^2 + k^3 - k^3 \sin x}$$

suppenee tasaisesti välillä $[0, \pi]$.

12. Osoita, että sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\arctan(kx)}{2^k}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k + 2\sin x}{k^4 + \sin x}$$

suppenee tasaisesti joukossa $\mathbf{R}$.

13. Osoita, että sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3 + x}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x+k)}{k^2 + kx}, \quad \text{(c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cos x + k \sin x}{e^{-kx} + k^4 \sin x + 2k^4}$$

suppenee tasaisesti välillä $[0, \infty[$.

14. Osoita, että sarjat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

suppenevat tasaisesti jokaisella äärellisellä välillä $[a, b]$.

15. Olkoon $b > 1$. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k^4 x)}{k^3}$$

suppenee tasaisesti välillä $[1, b]$.

16. Osoita, että sarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k + kx + 1}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k + \arctan(k+x)}{k^3 - k + x}$$

suppenee tasaisesti välillä $[1, \infty[$.

17. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x)x^k}{k}$$

suppenee tasaisesti välillä $[0, 1]$.

18. Tutki, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(1+kx^2)}$$

tasaisesti välillä $[0, 2]$.

19. Tutki, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^2 e^{-kx}$$

tasaisesti välillä $[0, \infty[$.

20. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(1+kx^2)}{k^2}$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja että suppeneminen on tasaista välillä $[-b, b]$ $(b > 0)$.

4.3 Tasaisen suppenemisen seurauksia

4.3.1 Summafunktion jatkuvuus

1. Osoita, että funktio

$$\text{(a)}\ \ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2x^2}}{k^2}, \quad \text{(b)}\ \ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2\sin(kx + \arctan x)}{3^k}$$

on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

2. Osoita sarjan summafunktiota tarkastelemalla, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^k (1-2x)$$

ei suppene tasaisesti välillä $[0, \frac{1}{2}]$.

3. Osoita sarjan summafunktiota tarkastelemalla, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2k+1}} - x^{\frac{1}{2k-1}}\right)$$

ei suppene tasaisesti välillä $[0, 1]$.

4. Määritä

$$\lim_{x \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+x)}.$$

5. Osoita, että funktiolla

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-kx}{k^3+x^2}$$

on ainakin yksi nollakohta.

Vihje: Bolzanon lause.

4.3.2 Sarjan integrointi

6. Todista, että jos funktiot $u_k(x)$ ovat jatkuvia välillä $[0,1]$ ja sarja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ suppenee tasaisesti välillä $[0,1]$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k(x) \right) dx \;=\; \int_0^1 f(x)\, dx.$$

7. Määritä

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \right) dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kx} \right) dx.$$

8. Osoita, että

$$\int_2^3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \right) dx \;=\; \frac{1}{3}\,.$$

9. Osoita, että

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\sin(x+2nx)}{2n^3} \right) dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

10. Osoita, että jos

$$u_k(x) \;=\; x^{k-1}(1-x)\big(k^2x-(k-1)^2\big) \qquad (k \in \mathbf{Z}_+),$$

niin

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx \;\neq\; \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 u_k(x)\, dx.$$

Mitä voit päätellä integroitavan sarjan tasaisesta suppenemisesta välillä $[0,1]$?

11. Osoita, että

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-x^2)x^k \right) dx \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (1-x^2)x^k\, dx,$$

vaikka integroitava sarja ei suppene tasaisesti välillä $[0,1]$ (ks. monisteen esimerkki 4.13).

12. Määritä funktion $\log(1+x)$ sarjaesitystä hyödyntäen sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k - x^{k+1}}{k}$$

summafunktio välillä $[-1, 1[$.

13. Määritä sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\,2^k}$$

summa.

4.3.3 Sarjan derivointi

14. Osoita, että funktio

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\Big(\frac{x}{n^2}\Big)$$

on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

15. Osoita, että funktio

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\,(n^2 + x^2)}{n^2}$$

on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$, ja määritä $f'(0)$.

16. Määritä sarjan termeittäin derivointia hyödyntäen funktion

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kx}}{k}$$

derivaatta pisteessä $x = 1$. Osoita myös, että termeittäin derivointi on sallittu.

17. Osoita, että funktio

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3}$$

on derivoituva ja sillä on ainakin kaksi derivaatan nollakohtaa välillä $]0, 2\pi[$.
Vihje: Rollen lause.

18. Osoita eksponenttifunktion sarjaesitystä hyödyntäen, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 x^k}{k!} \;=\; (x^2 + x)e^x$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

19. Määritä sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!}$$

summa.

20. Osoita eksponenttifunktion sarjaesitystä ja majoranttiperiaatetta hyödyntäen, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$$

suppenee, kun $a > 1$.

5 Potenssisarjoista

5.1 Määritelmä

1. Määritä potenssisarjan
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} x^{2n}$$
kertoimet $a_0, a_1, a_2, \ldots$, ja tutki, missä pisteissä potenssisarja suppenee.

2. Määritä potenssisarjan
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \;=\; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3x+3)^{2n+1}}{(\log n)^n}$$
keskipiste c ja kertoimet $a_0, a_1, a_2, \ldots$

3. Osoita, että tehtävän 2 potenssisarja suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

4. Osoita, että potenssisarja
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$
suppenee täsmälleen silloin, kun $x \in [-1, 1]$.

5. Tutki, millä luvuilla $a > 0$ pätee, että potenssisarja
$$\text{(a)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} x^k$$
suppenee välillä $]-a, a[$.

6. Osoita, että jos potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee pisteessä $r > 0$, niin potenssisarja
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$$
suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

7. Olkoon $a_k \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Osoita, että jos potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee, kun $|x| < 1$, ja hajaantuu pisteessä $x = 1$, niin
$$\lim_{x \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \;=\; \infty.$$

8. Olkoon
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$
potenssisarja, joka suppenee pisteessä $x = 2$ ja hajaantuu pisteessä $x = 6$. Voidaanko yllä olevan tiedon perusteella osoittaa, että tarkasteltava potenssisarja suppenee tai hajaantuu, kun (a) $x = 1$, (b) $x = -7$, (c) $x = 4$?

9. Tutki, missä pisteissä potenssisarja
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-2)^k$$
suppenee, kun $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ on ehdollisesti suppeneva vuorotteleva sarja.

10. Olkoon $p(y) = ay^2 + by + c$ jokin toisen asteen polynomi ($a, b, c \neq 0$). Osoita, että potenssisarja
$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) x^k$$
suppenee täsmälleen silloin, kun $|x| < 1$.

5.2 Potenssisarjan suppenemissäde ja -väli

1. Potenssisarjasta
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$
tiedetään, että sen suppenemissäde on 3. Voidaanko yllä olevan tiedon perusteella osoittaa, että tarkasteltava potenssisarja suppenee tai hajaantuu, kun (a) $x = 2$, (b) $x = -3$, (c) $x = -4$?

2. Anna esimerkki potenssisarjasta, joka suppenee ehdollisesti suppenemisvälinsä molemmissa päätepisteissä.

3. Anna esimerkki potenssisarjasta, joka suppenee ehdollisesti suppenemisvälinsä toisessa päätepisteessä ja itseisesti suppenemisvälinsä toisessa päätepisteessä, tai osoita, että tällaista potenssisarjaa ei ole olemassa.

4. Olkoon potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäde 2. Määritä potenssisarjan
$$\text{(a)} \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k x^k, \qquad \text{(b)} \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{nk}, \qquad \text{(c)} \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+n}$$
suppenemissäde ($c \in \mathbf{R}_+, n \in \mathbf{Z}_+$).

5. Olkoot R_1 ja R_2 (järjestyksessä) potenssisarjojen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k^2}$$

suppenemissäteet. Osoita, että jos $1 < R_1 < \infty$, niin $R_2 = 1$.

Vihje: Huomioi itseinen suppeneminen.

6. Olkoon R potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

suppenemissäde. Osoita, että jos $b > R$, niin joukko $\{a_k b^k \mid k \in \mathbf{N}\}$ ei ole rajoitettu.

7. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

suppenemissäde, kun tiedetään, että $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ ja sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hajaantuu.

8. Olkoon $98 \leq A \leq 99$. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

suppenemissäde, kun $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = A$.

9. Olkoon $\alpha = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ irrationaaliluvun α desimaaliesitys. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

suppenemissäde.

10. Olkoon R potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

suppenemissäde. Osoita, että jos $R > 1$, niin joukko $\{a_k \mid k \in \mathbf{N}\}$ on rajoitettu. Päteekö tulos, jos $R = 1$?

11. Olkoon R potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

suppenemissäde. Osoita todeksi tai (vastaesimerkillä) epätodeksi, että jos (a) $R = 1$, (b) $R < 1$, niin on olemassa sellainen $m > 0$ ja sellainen $k_0 \in \mathbf{N}$, että $|a_k| \geq m$ kaikilla $k > k_0$.

12. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

suppenemissäde sekä tutkimalla sarjan suppenemista pisteissä $x = 1$ ja $x = -1$ että käyttämällä monisteen lausetta 5.10.

13. Määritä potenssisarjan

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, x^k, \quad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2}\, x^k, \quad \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^k x^k, \quad \text{(d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{\sqrt[4]{k+1}}\, x^k$$

suppenemissäde.

14. Määritä potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$$

suppenemissäde ja tutki sarjan suppenemista suppenemisvälin päätepisteissä vakion $p \in \mathbf{R}$ eri arvoilla.

15. Anna esimerkki potenssisarjasta, jonka suppenemissäde on 5. Onko mahdollista, että sarja suppenee suppenemisvälinsä molemmisssa päätepisteissä.

16. Anna esimerkki potenssisarjasta, jonka suppenemissäde on 8 ja joka suppenee suppenemisvälinsä molemmisssa päätepisteissä, sekä esimerkki potenssisarjasta, jonka suppenemissäde on 8 ja joka hajaantuu suppenemisvälinsä molemmisssa päätepisteissä.

17. Määritä potenssisarjan

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}\, x^n, \quad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n \log n}\, x^n, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n n \sin\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\, x^n$$

suppenemissäde.

18. Määritä potenssisarjan

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) x^n, \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \log\big(3^n + 3^{3^n}\big) x^n$$

suppenemissäde.

19. Määritä potenssisarjan

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{(n^n)^2}\, x^n, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n!(e^{\frac{1}{n}}-1)^n x^n$$

suppenemissäde.

Vihje: Voit olettaa tunnetuksi raja-arvotuloksen $\lim\limits_{n\to\infty} n^n(e^{\frac{1}{n}}-1)^n = \sqrt{e}$.

20. Määritä potenssisarjan

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\, x^n, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n^p}\, x^{2n} \quad (p \in \mathbf{R})$$

suppenemissäde.

5.3 Potenssisarjan määrittelemä funktio

1. Tutki, millä luvuilla $a > 0$ pätee, että potenssisarja

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} x^k$$

suppenee tasaisesti välillä $[-a, a]$.

2. Anna esimerkki potenssisarjasta, jonka suppenemissäde on 1 ja joka suppenee tasaisesti välillä $[-1, 1]$.

3. Anna esimerkki potenssisarjasta

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

jonka suppenemissäde on 2 ja joka ei suppene tasaisesti välillä $]-2, 2[$.

4. Osoita, että arkustangentin sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

suppenee tasaisesti välillä $[\frac{1}{2}, 1]$.

5. Osoita, että

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,.$$

6. Määritä funktion

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k4^k} x^k.$$

derivaatta pisteessä $x = 1$.

7. Osoita, että

$$\text{(a)} \;\; \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{(b)} \;\; \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)x^k = \frac{2}{(1-x)^3}$$

kaikilla $x \in \,]-1, 1[$.

8. Määritä funktion

$$\text{(a)} \;\; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{(n+1)!} x^n, \qquad \text{(b)} \;\; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n)!} x^{2n}$$

derivaatat $f^{(2019)}(0)$ ja $f^{(2020)}(0)$.

9. Anna esimerkki sellaisesta funktiosta f, että

$$f(0) = 3 \qquad \text{ja} \qquad f^{(n)}(0) \;=\; n \qquad \forall n \geq 1.$$

Määritä myös $f(1)$ ja $f(2)$.

10. Määritä sellainen rationaalifunktio f, että

$$f^{(n)}(0) \;=\; 2^n n! \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

5.4 Taylorin sarja

1. Olkoon f sellainen funktio, että

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \;\leq\; 2^n$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$. Osoita, että funktion f Maclaurinin sarja esittää funktiota f kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

2. Olkoon f sellainen funktio, että

$$|f^{(n)}(x)| \;\leq\; \frac{n!}{3^n}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$. Osoita, että funktion f Maclaurinin sarja esittää funktiota f kaikilla $x \in \,]-3, 3[$.

3. Määritä funktion
$$f(x) \;=\; \frac{1}{(x+1)^2}$$
Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

4. Määritä funktion
$$\text{(a)}\;\; f(x) = e^{-2x}, \qquad \text{(b)}\;\; f(x) = e^{5x+3}, \qquad \text{(c)}\;\; f(x) = 2xe^{x^2+1}$$
Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

5. On melko helppo osoittaa, että
$$\sin^2 x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k+1}}{(2k+2)!} x^{2k+2} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$
Osoita yllä olevaa tulosta ja funktion $\sin x$ Maclaurinin sarjaa käyttäen, että
$$2\sin x \cos x \;=\; \sin 2x \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

6. Määritä funktion
$$\text{(a)}\;\; f(x) = \frac{x}{1-x^4}, \qquad \text{(b)}\;\; f(x) = x^2 \sin\Big(\frac{x}{3}\Big), \qquad \text{(c)}\;\; f(x) = \log(1-2x)$$
Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

7. Määritä funktio, jonka Maclaurinin sarja välillä $[-1, 1]$ on
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, x^{2k+1}.$$

8. Määritä funktion
$$\text{(a)}\;\; f(x) = \cos(2x^3), \qquad \text{(b)}\;\; f(x) = \arctan(3x)$$
Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

9. Määritä hyperbolisen sinin eli funktion
$$\sinh x \;=\; \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

10. Määritä hyperbolisen kosinin eli funktion
$$\cosh x \;=\; \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

11. Määritä derivaatat $f^{(2019)}(0)$ ja $f^{(2020)}(0)$, kun $f(x) = \arctan x$.

12. Määritä derivaatta $f^{(98)}(0)$, kun

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}, & \text{kun } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

13. Määritä derivaatat $f^{(2019)}(0)$ ja $f^{(2020)}(0)$, kun

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

14. Määritä potenssisarjaesitystä käyttäen raja-arvo

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{2x}}{3x}, \qquad \text{(c)} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1}{4x^3}.$$

15. Määritä potenssisarjaesityksiä käyttäen raja-arvo

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^2 \log(1+x)}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x} - 1)\log(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2}.$$

16. Määritä potenssisarjaesityksiä käyttäen raja-arvo

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3 \cos x}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right), \qquad \text{(c)} \lim_{x\to 1} \frac{\log x^2}{x-1}.$$

17. Määritä potenssisarjaesitystä käyttäen raja-arvo

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(1 - e^{-t^2}\right) dt, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(2t^2)\, dt.$$

18. Oletetaan, että Maclaurinin sarja

$$f(x) \;=\; f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

esittää funktiota f pisteen $x = 0$ jossakin ympäristössä ja $k_0 > 0$ on pienin indeksin k arvo, jolle $a_k \neq 0$. Osoita, että jos k_0 on pariton, niin piste $x = 0$ ei ole funktion f paikallinen ääriarvokohta.

19. Määritä integraalin

$$\int_0^1 \sin(x^2)\, dx$$

likiarvo siten, että virhe on itseisarvoltaan pienempi kuin 10^{-4}.

20. Määritä funktion $\cos x$ likiarvo pisteessä $x = \frac{1}{2}$ siten, että virhe on itseisarvoltaan pienempi kuin 10^{-4}.