Diskreetti matematiikka
Toinen välikoe 14.12.2006
Vastauksia

1. Olkoot $X = \{a, b, c, d\}$ ja $Y = \{1, 2, 3\}$, sekä $R, S \subseteq X \times Y$ relaatiot
$$R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$$
$$S = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 2), (d, 1), (d, 3)\}.$$
Määritä relaatiot
a) $R \cap S$
b) $R^{-1}$
c) $S \circ R^{-1}$.

**Ratkaisu:**
a)
$$\begin{aligned} R \cap S :&= \{(x, y \in X \times Y : (x, y) \in R \text{ ja } (x, y) \in S\} \\ &= \{(a, 1), (a, 3), (b, 2)\} \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} R^{-1} :&= \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\} \\ &= \{(1, a), (3, a), (2, b), (1, c)\} \end{aligned}$$
c)
$$\begin{aligned} S \circ R^{-1} :&= \{(x, z) \in X \times X : xSy \text{ ja } yR^{-1}z \text{ jollakin } y \in Y\} \\ &= \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, b), (d, a), (d, c)\}. \end{aligned}$$

**Kommentteja** vastauksista:
Monet sekoittavat väitteet, joukot yms keskenään. Esimerkiksi tässä tehtävässä monet puhuivat "relaatiosta $xRy$", mikä on virhe, sillä $xRy$ ei ole relaatio, vaan väite, että $x$ on relaatiossa $R$ olion $y$ kanssa. Ilmaisu
$$yR^{-1}x = \{(y, x) : xRy\}$$
ei siis ole mielekäs, koska siinä on vasemmalla puolella väite, ja oikealla puolella joukko.

2. Olkoot $R, S \subseteq X \times X$ ekvivalenssirelaatioita. Osoita, että $R \cap S$ on ekvivalenssirelaatio.

**Ratkaisu:** *Refleksiivisyys:* Valitaan $x \in X$. Koska $R$ ja $S$ ovat ekvivalenssirelaatioita, ne ovat myös refleksiivisiä: $xRx$ ja $xSx$. Koska $(x, x) \in R$ ja $(x, x) \in S$, on myös $(x, x) \in R \cap S$, eli $x(R \cap S)x$. Siis $R \cap S$ on refleksiivinen.
*Symmetrisyys:* Jos $x, y \in X : x(R \cap S)y$, niin $(x, y) \in R$ ja $(x, y) \in S$. Koska $R$ ja $S$ ovat ekvivalenssirelaatioina symmetrisiä, on myös $(y, x) \in R$ ja $(y, x) \in S$. Siis $(y, x) \in R \cap S$, joten $R \cap S$ on symmetrinen.

*Transitiivisuus:* Jos $x, y, z \in X : x(R \cap S)y$ ja $y(R \cap S)z$, niin $(x, y) \in R$ ja $(y, z) \in R$, joten $R$:n transitiivisuuden nojalla $(x, z) \in R$. Samoin $(x, y) \in S$ ja $(y, z) \in S$, ja $S$:n transitiivisuuden nojalla $(x, z) \in S$. Koska $(x, z) \in R$ ja $(x, z) \in S$, on myös $(x, z) \in R \cap S$.
$\therefore x(R \cap S)y$ ja $y(R \cap S)z \Longrightarrow x(R \cap S)z$.
$\therefore R \cap S$ on transitiivinen.
Koska $R \cap S$ on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, se on ekvivalenssirelaatio.

**Kommentteja:** Jotkut sanoivat: "ekvivalenssirelaatio on symmetrinen, refleksiivinen ja transitiivinen", mikä on kyllä totta, mutta ei välttämättä oleellista todistettaessa oliota ekvivalenssirelaatioksi. Oleellista on, että relaatio on ekvivalenssirelaatio, *jos* se on refleksiivinen symmetrinen ja transitiivinen. Kyseessä ei siis ole ekvivalenssirelaation jotkin satunnaiset ominaisuudet, vaan sen *määrittelevät* ominaisuudet. Yhtä hyvin voisi esimerkiksi sanoa: "ekvivalenssirelaatio on refleksiivinen", mikä on aivan tosi väite, mutta siitä ei voi päätellä, että refleksiivisyyden tarkistamalla voi todistaa relaation ekvivalenssirelaatioksi.

Jotkut sekoittivat yhdistetyn relaation ja relaatioiden leikkauksen määritelmän keskenään.

3. Olkoot

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto \frac{1}{2^n} \\ \text{ja} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 - x^2 \end{aligned}$$

(tässä $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$).
a) Määritä joukot $f(\{0, 1, 2, 3\})$, $f^{-1}([\frac{1}{8}, 1])$, $g([0, 2])$ ja $g^{-1}([0, 2])$. (Ei tarvitse perustella).
b) Määritä yhdistetty funktio $g \circ f$. (Ei tarvitse perustella).
c) Onko käänteisfunktio $f^{-1}$ tai $g^{-1}$ olemassa? Jos on, mikä? Jos ei ole, miksi ei?

**Ratkaisu:**
a)

$$\begin{aligned} f(\{0, 1, 2, 3\}) &= \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}\} \\ f^{-1}([\tfrac{1}{8}, 1]) &= \{0, 1, 2, 3\} \\ g([0, 2]) &= [-3, 1] \\ g^{-1}([0, 2]) &= [-1, 1] \end{aligned}$$

b) $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto 1 - \frac{1}{2^{2n}}$
c) Koska kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on $f(n) = 2^{-n} \geqq 0$, ei ole olemassa lukua $n \in \mathbb{N}$ siten, että $f(n) = -1 \in \mathbb{R}$. Siis $f(\mathbb{N}) \neq \mathbb{R}$, joten $f$ ei ole surjektio, eikä näin ollen bijektiokaan. Koska $f$ ei ole bijektio, sillä ei ole käänteisfunktiota.
Koska $g(-1) = 0 = g(1)$, ei $g$ ole injektio, eikä siis bijektiokaan, eikä sillä näin ollen ole käänteisfunktiota.

**Kommentteja:** Ensimmäisessä kohdassa monet merkitsivät välin ympärille joukkoa ilmaisevat sulut: $g([0,2]) = \{[-3,1]\}$. Ne ovat ylimääräiset, ja tämä merkintä tarkoittaa jotain muuta kuin reaalilukuväliä.

Toinen yleinen virhe oli merkitä $f^{-1}([\frac{1}{8},1]) = [1,3]$, mikä on myös virheellistä, sillä väli tarkoittaa aina reaalilukuväliä, eikä välin luonnollisia lukuja.

Muutamat sekoittivat käänteisfunktion ja alkukuvan keskenään.

Toisessa kohdassa melkein kaikki jättivät kirjoittamatta näkyviin funktion lähtö- ja maalijoukon. Ne on aina hyvä merkitä näkyviin, vaikka olisivatkin itsestäänselviä. Jos ne jätetään ilmoittamatta, lukija joutuu päättelemään kontekstista, mitkä ne ovat. Yleinen tapa on merkitä reaalilukuja $x$:llä ja luonnollisia lukuja $n$:llä, joten vastauksesta $1-2^{2x}$ sakotettiin. Siinä ei ole mitään vikaa, jos haluaa merkitä muuttujaa luonnollisissa luvuissa $x$:llä, mutta silloin täytyy jostain muualta käydä ilmi, että $x$ on nimenomaan luonnollinen luku. Moni c-kohdan vastauksesta päätellen luulikin $f$:ää funktioksi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Viimeisessä kohdassa moni näytti otaksuvan, että funktiolla on käänteisfunktio, jos ja vain jos se on aidosti monotoninen. ”Jos”-osa on totta, mutta ”vain jos” -osa ei. Esimerkiksi funktiolla

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{kun } x > 0 \\ x & \text{kun } x \leqq 0 \end{cases}$$

on käänteisfunktio, vaikka se ei ole aidosti monotoninen. Oikea ehto käänteisfunktion olemassaololle on, että funktio on bijektio. Aidosti monotoniset funktiot ovat bijektioita, mutta on bijektioita (esim yllä mainittu), jotka eivät ole aidosti monotonisia.

Moni teki c-kohdan laskemalla funktioiden derivaatan. Derivaatta-lause on tarkoitettu helpottamaan joissakin tilanteissa bijektiivisyyden selvittämistä, mutta se ei missään nimessä ole standardi tapa siihen. Ensinäkin bijektiivisyyden selvittäminen on monesti helpompaa suoraan injektion ja surjektion määritelmällä (kuten tässä tapauksessa). Toisekseen derivaatta on korkeamman abstarktiotason käsite, joten sen käyttö osoittaa huonoa makua (eikä kyse ole pelkästä estetiikasta, vaan myös siitä, että yksinkertaisemmat perustelut ovat vakuuttavampia kuin monimutkaisemmat).[1] Kolmas, ja tehtävän pisteytyksen kannalta ratkaiseva syy on lauseen oletusten tarkistaminen: Lauseessa sanottiin, että jatkuva funktio $f : I \to \mathbb{R}$, missä $I \subseteq \mathbb{R}$ on väli, on bijektio, jos ja vain jos se on aidosti monotoninen. Lausetta ei voi siis soveltaa funktioon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, koska $\mathbb{N}$ ei ole väli, ja jos sitä soveltaa funktioon $g$, pitää mainita $g$:n jatkuvuus, että $\mathbb{R}$ on väli, ja että näillä ehdoilla aito monotonisuus on välttämätön ehto bijektiivisiyydelle. Helpommalla pääsee, kun sanoo, ettei $g$ ole injektio, koska $g(-1) = g(1)$.

On erittäin suositeltavaa konkreettisilla esimerkeillä osoittaa, että funktio ei ole injektio tai surjektio. Usein se ei vaadi suurta vaivaa (kuten tässä tapauksessa). Esimerkiksi tässä tehtävässä on hyvin helppoa kertoa pisteet, joissa $g$:llä on sama arvo, eikä kukaan laskutaitoinen voi olla eri mieltä (ainakaan

[1] Kuuluisana esimerkkinä Fermat'n suuri lause, joka on kyllä todistettu, mutta jonka todistaminen yksinkertaisin keinoin olisi erittäin toivottavaa

kovin kauaa). Monet selittelivät pitkään, että koska $g$ on alaspäin aukeava paraabeli, se saa samat arvonsa huippupisteensä kummallakin puolella jne. Se on aivan totta, mutta esimerkin antamainen on taloudellisempaa ja tehokkaampaa.

Jotkut ratkaisivat $n$:n yhtälöstä $x = 1 - 2^{-n}$. tällä tavalla voi kyllä selvittää $f$:n käänteisfunktion, jos se on olemassa, mutta sen olemassaolon selvittämiseen se ei paljoa auta.

Jotkut sekoittivat injektion ja funktion määritelmän keskenään.

4. Olkoot $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ funktioita siten, että $g \circ f : X \to Z$ on bijektio. Näytä, että $f$ on injektio ja $g$ surjektio. Osoita vastaesimerkillä, että kummankaan funktioista $f$ tai $g$ ei tarvitse olla bijektio.

**Ratkaisu:** Jos $f$ ei olisi injektio, olisi olemassa $x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2$ ja $f(x_1) = f(x_2)$. Tällöin olisi myös

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2),$$

joten $g \circ f$ ei olisi injektio.

$\therefore$ Jos $g \circ f$ on injektio, niin myös $f$ on injektio.

$\therefore$ Jos $g \circ f$ on bijektio, niin $f$ on injektio.

Jos puolestaan $g$ ei olisi surjektio, niin olisi $g(Y) \neq Z$, eli olisi olemassa $z \in Z$, siten, että millään $y \in Y$ ei ole $g(y) = z$. Koska $f(X) \subseteq Y$, tästä seuraa, ettei millään $x \in X$ voi olla $g(f(x)) = z$, joten $z \notin g(f(X)) = (g \circ f)(X)$.

$\therefore$ Jos $g \circ f$ on surjektio, myös $g$ on surjektio.

$\therefore$ Jos $g \circ f$ on bijektio, $g$ on surjektio.

*Vastaesimerkki:* Olkoot $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $Z = \{\text{Tupu}, \text{Hupu}, \text{Lupu}\}$,

$$f : X \to Y : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{kun } x = a \\ 2, & \text{kun } x = b \\ 3, & \text{kun } x = c \end{cases}$$

ja

$$g : Y \to Z : x \mapsto \begin{cases} \text{Tupu}, & \text{kun } x = 1 \\ \text{Hupu}, & \text{kun } x = 2 \\ \text{Lupu}, & \text{kun } x = 3 \text{ tai } x = 4. \end{cases}$$

Nyt $f$ ei ole surjektio, sillä $\nexists x \in X : f(x) = 4$, ja $g$ ei ole injektio, sillä $g(3) = g(4) =$Lupu. Siis kumpikaan funktioista ei ole myöskään bijektio. Kuitenkin $g \circ f$ on bijektio.

**Kommentteja:**

Tässä tehtävässä aidon monotonisuuden käyttö funktion injektiivisyyden todistamisessa on vielä suurempi virhe kuin edellisessä, sillä ei ole sanottu, että joukoissa $X, Y$ ja $Z$ ylipäänsä olisi järjestystä (jolloin funktioiden monotonisuuttakaan ei voi määritellä).

Funktion $f : X \to Y$ injektiivisyyden määrittelevä ehto on

$$x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Yhtäpitävä sen kanssa on ehto

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Monet sekoittivat nämä ehdot keskenään, esimerkiksi jotkut vaativat ehtoa

$$x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

tai

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Longrightarrow x_1 \neq x_2.$$

Nämä kaksi viimeksi mainittua obvat triviaalisiti tosia, ne pätevät kaikille funktioille, ei ainoastaan injektioille.

Moni näytti olevan perillä siitä, miksi väite on tosi, mutta ei osannut kirjoittaa kelvollista todistusta. Sen oppii yleensä harjoittelemalla.

Vastaesimerkiksi monet yrittivät keksiä ns. alkeisfunktiota $f$ ja $g$, eli funktioita jotka voi ilmoittaa yhdellä kaavalla ($f(x) = x^2$ ja $g(x) = \sqrt{x}$ esimerkiksi). Siinä ei ole mitään vikaa, mutta usein halu tällaisiin esimerkkeihin estää näkemästä poikkeustapuksia (epäjatkuvat funktiot yms). Vikaa sen sijaan oli siinä, ettei näitten funktiotten kohdalla ilmoitettu lähtö- ja maalijoukkoja, jotka ovat surjektio- ja injektiotarkastelujen kannalta oleellisin asia. Esimerkiksi $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto x^2$ *on* injektio. Tämä ei ole pelkkää pedanttia saivartelua: jos mietit jonkin aikaa, huomaat, että lähtö- ja maalijoukkojen valinta siten, että kyseessä todella on vastaesimerkki ei ole triviaalia näille "funktioille".

**Yleisesti:** Monella on vielä parantamisen varaa asioitten ilmaisussa, ei tosin yhtä paljoa kuin ensimmäisessä välikokeessa. Kannattaa mieluummin tajuta asiat kunnolla ja tietää mitä on tekemässä kuin yrittää kirjoittaa jotain todistuksen näköistä. Esimerkiksi relaation $R$ ja väitteen $xRy$ sekoittaminen keskenään saattaa johtua siitä, ettei todella ymmärretä eroa näitten kahden välillä.

Kummallisia yleisiä virheitä oli myös eksistenssikvanttoreitten ja kaksoispisteiden (määritelmän merkkinä) ripottelu joka paikkaan. Esimerkiksi relaatioiden symmeetrisyyden määritelmässä ei vaadita, että $\exists x \in X, y \in Y : xRy$. Tai 3-tehtävässä $g([0,2]) := [-3,1]$ on virheellinen väite, sillä $g([0,2]) := \{g(x) : 0 \leqq x \leqq 2\}$. Räikeämpiäkin tapauksia kaksoispisteen väärästä käytöstä näkyy. Jotkut haluavat väittää, että jokainen yhtäsuuruus on määritelmä.

Monella on kauhea hinku käyttää aina ekvivalensseja, vaikka implikaatiotkin riittäisivät. Joskus tämä johtaa vääriin väitteisiinkin.

Kokeisiin lukiessa (ja muutenkin matematiikkaa harrastettaessa) kannattaa mieluummin olla tietoinen perusmääritelmistä, siitä mitä käsiteltävät oliot ovat, kuin joistakin satunnaisista toimintaa helpottavista lauseista. Lauseista on usein apua, mutta ei niille, jotka eivät osaa käyttää niitä. Ennen kuin opettelet mitään funktioista tai relaatioista, pyri selvittämään mitä ne yleensäkin ovat. Lauseitten keksiminen jälkikäteenkin ei ole vaikeaa, mutta jos et osaa määritelmiä, sinua ei auta onnikaan.