OLEELLISIMMAT ASIAT DISKREETIN MATEMATIIKAN TOISEEN VÄLIKOKEESEEN

1. Relaatiot

1.1. Perusmääritelmät. *Järjestetty pari* (x, y) on kahden alkion joukko, jossa järjestyksellä on väliä: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, jos $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$.

Joukkojen X ja Y *karteesinen tulo* on $X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Relaatio R joukosta X joukkoon Y on karteesisen tulon $X \times Y$ osajoukko.

Relaatiota $R \subseteq X \times Y$ voidaan ajatella ja käsitellä joukkona tai olioiden välisenä suhteena (ks. todistuksia ja tehtäviä).

Relaation $R \subseteq X \times Y$ *käänteisrelaatio* on $R^{-1} \subseteq Y \times X : yR^{-1}x \iff xRy$.

Relaatioiden $R \subseteq X \times Y$ ja $S \subseteq Y \times Z$ *yhdistetty relaatio* on $R \circ S \subseteq X \times Z$: $x(R \circ S)z \iff \exists y \in Y$ jolle xRy ja ySz.

1.2. Ekvivalenssirelaatio. Relaatio $R \subseteq X \times X$ on

a) *refleksiivinen,* jos xRx kaikilla $x \in X$
b) *symmetrinen,* jos $xRy \implies yRx$
c) *transitiivinen,* jos $xRy \wedge yRz \implies xRz$
d) *ekvivalenssirelaatio,* jos se on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

HT: mitkä ylläolevista määritelmistä voisivat olla järkeviä relaatioille $R \subseteq X \times Y$?

Ekvivalenssirelaatio ilmaisee relaatiossa olevien alkioiden samankaltaisuutta.

Jokaista ekvivalenssirelaatiota $R \subseteq X \times X$ vastaa joukon X ositus (ks kirjan luku 3.5), ja jokaista X:n ositusta vastaa ekvivalenssirelaatio.

Relaatio $R \subseteq X \times X$ on

e) *antisymmetrinen,* jos $xRy \wedge yRx \implies x = y$
f) *vertailullinen,* jos kaikilla $x, y \in X$ on xRy tai yRx
g) *järjestysrelaatio,* jos se on refleksiivinen, transitiivinen, antisymmetrinen ja vertailullinen.

Järjestysrelaatio ilmaisee alkioiden "suuruutta". Jos aiot opetella vain toisen, ekvivalenssi- tai järjestysrelaation, niin opettele mieluummin ekvivalenssi.

2. Funktiot

2.1. Perusmääritelmät. Relaatio $R \subseteq X \times Y$ on *funktio,* jos kaikilla $x \in X$ on tasan yksi $y \in Y$ siten, että xRy. Merkitään tällöin $R : X \to Y : y = R(x)$.

Ylläolevassa määritelmässä X on R:n *lähtö-* ja Y *maalijoukko.*

Jos $f : X \to Y$ on funktio ja $A \subseteq X$, niin A:n *kuvajoukko* on

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}.$$

Funktion $f : X \to Y$ *arvojoukko* on $f(X)$.

Jos $f : X \to Y$ on funktio ja $B \subseteq Y$, niin B:n alkukuva on

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Älä sekoita alkukuvaa käänteisfunktion kuvajoukkoon.

Kertauksen vuoksi: Älä sekoita alkukuvaa käänteisfunktion kuvajoukkoon. Funktiolla ei välttämättä ole käänteiskuvausta, mutta alkukuvat ovat aina olemassa.

2.2. **Injektio, surjektio ja bijektio.** Funktio $f : X \to Y$ on

1) *injektio,* jos $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
2) *surjektio,* jos $f(X) = Y$
3) *bijektio,* jos se on injektio ja surjektio.

Derivaatan positiivisuuden/negatiivisuuden tarkastelu ei ole yleispätevä metodi funktion injektiivisyyden osoittamiseksi, ja jos käytät sitä, sinun on oltava valmis kertomaan, miksi se toimii kyseisessä tapaukesssa. Kokeessa pelkästä derivaatan laskemisesta saa nolla pistettä. HT: Tee harjoitusten 8 tehtävät 5-7, mutta muuta funktioiden määrittelyjoukoiksi $\mathbb{Z}$.

Jos $f : X \to Y$ on bijektio, sillä on käänteiskuvaus $f^{-1} : Y \to X$, jolle $f^{-1}(y) = x$ silloin, kun $f(x) = y$.

Funktioiden $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ *yhdistetty kuvaus* on

$$g \circ f : X \to Z : x \mapsto g(f(x)).$$

Huomaa, että yhdistettyä funktiota merkitään toisin päin kuin yhdistettyä relaatiota.

2.3. **Mahtavuuksista.** Joukot A ja B ovat *yhtä mahtavat,* jos on olemassa bijektio $A \to B$.

Joukko B on *mahtavampi* kuin A, jos on olemassa injektio $A \to B$, mutta ei ole olemassa injektiota $B \to A$.

Kirjassa määritellään: *B:n mahtavuus on suurempi tai yhtä suuri kuin A:n mahtavuus,* jos A on yhtä mahtava kuin B:n jokin osajoukko.

Luentojen ja kirjan määritelmät poikkeavat toisistaan vain ulkoisesti:

I) Kirjan "mahtavuus on suurempi tai yhtä suuri kuin"$\Longleftrightarrow$ luentojen "yhtä mahtava" tai luentojen "mahtavampi".
II) Luentojen "mahtavampi"$\Longleftrightarrow$ kirjan "mahtavuus on suurempi tai yhtä suuri", mutta ei kirjan "yhtä mahtava"[1]

Joukko on *numeroituva,* jos se on äärellinen tai yhtä mahtava kuin $\mathbb{N}$, ja *ylinumeroituva,* jos se on mahtavampi kuin $\mathbb{N}$.

Numeroituvan joukon alkiot voidaan esittää (mahdollisesti päättymättömänä) luettelona (eli numeroida). Ylinumeroituvan joukon alkioita ei voida, jokaisesta luettelosta puuttuu alkioita.

Numeroituvia joukkoja ovat esimerkiksi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ja $\mathbb{Q}^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Ylinumeroituvia ovat esimerkiksi $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ja $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

[1] Tämä väite näyttää triviaalilta, mutta ei ole. Kirjassa ei ole määritelty käsitettä "mahtavampi", joten sen avulla ei voida määritellä käsitettä "mahtavampi tai yhtä mahtava". Kirjassa määritellään yhdellä kertaa koko käsite "mahtavampi tai yhtä mahtava", se siis *ei ole* kahden käsitteen disjunktio. Yleisemmin: älä anna määritelmissä käytettyjen sanojen harhauttaa uskomaan, että määritelty asia olisi se, miltä se kuulostaa.