Diskreetti matematiikka
Harjoitus 1, 1.-2.10.2009

1. Todistettava induktiolla, että $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ aina, kun $n \in \mathbf{Z}_+$.

2. Todistettava induktiolla: Jos $n \in \mathbf{Z}_+$ ja $n > 4$, niin $2^n > n^2$.

3. Todistettava induktiolla: Jos $n \in \mathbf{N}$, niin $n^3 + 2n$ on jaollinen luvulla 3.

4. Todistettava induktiolla: Jos $n \in \mathbf{N}$ on pariton, niin $n^2 - 1$ on jaollinen luvulla 8.

5. Todistettava induktiolla: Jos $n \in \mathbf{N}$, niin $n^3 - n$ on jaollinen luvulla 6.

6. Todistettava induktiolla, että jokainen kokonaisluku on muotoa $2p$ tai $2p+1$, missä p on kokonaisluku.

7. Todistettava induktiolla: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ aina, kun $n \in \mathbf{Z}_+$.

8. Seuraavassa ”todistetaan”, että
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$$
aina, kun $n \in \mathbf{Z}_+$. Arvolla $n = 1$ väitös on tosi, sillä
$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1}.$$
Tehdään induktio-oletus, että väitös on tosi arvolla $n = k$. Tällöin
$$\begin{aligned}\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$
Siis induktioväite on todistettu. (a) Miksi väitös on väärä? (b) Mikä virhe on todistuksessa? (c) Korjattava väitös ja todistettava se.

HUOM. Tällä kertaa tehtävistä tulee merkitä tehdyiksi vähintään neljä.