Diskreetti matematiikka
Harjoitus 2, 8.-9.10.2009

1. Kirjoitettava ja todistettava ensimmäinen de Morganin sääntö $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ mielivaltaiselle (äärelliselle) määrälle lauseita. *Vinkki: Äärellisille summille käytetään merkintää* $\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. *Vastaavasti tässä voi käyttää merkintöjä* $\bigwedge_{i=0}^{n} p_i = p_0 \wedge p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ *ja* $\bigvee_{i=0}^{n} p_i = p_0 \vee p_1 \vee \cdots \vee p_n$.

2. Tarkastellaan rekursioyhtälöä $f_{n+1} = af_n + b$, missä f_0 on annettu alkuarvo. Osoitettava, että
$$f_n = \begin{cases} a^n f_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b, & \text{kun } a \neq 1, \\ f_0 + nb, & \text{kun } a = 1. \end{cases}$$
on tämän rekursioyhtälön ratkaisu.

3. Ratkaistava rekursioyhtälö $f_{n+1} = -5f_n + 2$ alkuehdolla $f_0 = -1$ (a) peräkkäisillä sijoituksilla, (b) edellisen tehtävän kaavalla.

4. Kuten tehtävä 3, mutta tarkastellaan rekursioyhtälöä $f_{n+1} = f_n - 2$ alkuehdolla $f_0 = 3$.

5. Potenssin tavanomainen määritelmä on $a^n = aa \cdots a$ (n kertaa). Vastaavasti potenssin rekursiivinen määritelmä on $a^1 = a$, $a^n = aa^{n-1}$. Todistettava, että nämä määritelmät ovat yhtäpitävät.

6. (a) Määriteltävä rekursiivisesti propositiolauseessa A esiintyvien konnektiivien lukumäärä $k(A)$. (b) Todistettava, että $\operatorname{hg} A \leq k(A)$. (c) Annettava esimerkki tapauksesta, jossa yhtäsuuruus ei ole voimassa.

7. Todistettava, että lauseessa, jossa ei esiinny negaatiota, on yhtä monta sulkuparia kuin konnektiivia.

8. Muodostettava (a) propositiolauseen $\neg\big((p \Rightarrow q) \vee \neg r\big)$ rakennepuu, (b) propositiolauseen $(A \wedge A)$ rakennepuu, missä $A = (p \wedge B)$ ja $B = (q \wedge r)$.

HUOM. Välikokeeseen osallistumisen edellytyksenä on, että 40 % koealueeseen kuuluvista tehtävistä on tehty. Jos siis tekee vähän tai jää pois jollakin harjoituskerralla, sen voi kompensoida tekemällä muilla kerroilla vastaavasti enemmän.