

Diskreetti matematiikka
Harjoitus 3, 15.-16.10.2009

1. Esitettävä joukkomerkintänä
 - (a) niiden kokonaislukujen joukko, joiden ilmoittama vuosi on karkausvuosi,
 - (b) niiden luonnollisten kokonaislukujen joukko, jotka ovat luonnollisten lukujen neliöitä,
 - (c) niiden reaalityyppisten kokonaislukujen joukko, jotka eivät toteuta mitään kokonaiskertoimista toisen asteen yhtälöä.
2. Merkitään $A = \{\emptyset\}$, $B = \{\emptyset, A\}$ ja $C = \{A, B\}$. Mitkä seuraavista ovat tosia?
 - (i) $\emptyset \in A$,
 - (ii) $\emptyset \subseteq A$,
 - (iii) $A \in C$,
 - (iv) $A \subseteq C$,
 - (v) $\{A\} \in C$,
 - (vi) $\{A\} \subseteq C$,
 - (vii) $A \in B$,
 - (viii) $A \subseteq B$.
3. Muodostettavat potenssijoukot $\mathcal{P}(A)$ ja $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, kun $A = \{a, b\}$ on kaksialkioinen joukko. Miten monta alkioita on tällöin joukossa $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$?
4. Olkoon perusjoukko $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}$, $A = \{x \in X \mid x \text{ on pariton}\}$ ja $B = \{x \in X \mid x \text{ ei ole alkuluku}\}$. Muodostettavat joukot A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, \overline{A} ja \overline{B} (luettelemalla niiden alkiot). *Huom. Lukua $n \in \mathbf{Z}_+$ sanotaan alkuluvuksi, jos $n > 1$ ja sen ainoat positiiviset tekijät ovat 1 ja n .*
5. Todistettava osittelulaki $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ oikeaksi joko lauselogiikan avulla tai luonnollisella päättelyllä. Havainnollistettava lisäksi tätä lakia Venn-diagrammilla.
6. Todistettava loppuun kirjan lause 12 eli todistettava, että
 - (a) $A \cup B = B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$,
 - (b) $A \setminus B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.
7. De Morganin säännöt yleistettynä mielivaltaiselle indeksijoukolle I kuuluvat seuraavasti: $\overline{\bigcap_{k \in I} A_k} = \bigcup_{k \in I} \overline{A_k}$ ja $\overline{\bigcup_{k \in I} A_k} = \bigcap_{k \in I} \overline{A_k}$. Todistettava nämä säännöt.
8. Määritettävä joukon $\{a, b, c\}$ kaikki luokkajaot eli ositukset.

HUOM. Välikokeeseen osallistumisen edellytyksenä on, että 40 % koalueeseen kuuluvista tehtävistä on tehty. Jos siis tekee vähän tai jää pois jollakin harjoituskerralla, sen voi kompensoida tekemällä muilla kerroilla vastaavasti enemmän.