

Diskreetti matematiikka
Harjoitus 5, 5.-6.11.2009

1. Tietyissä ihmisjoukossa määritellään relaatio $xIy \Leftrightarrow x$ on y :n isä. Vastaavasti määritellään relaatiot \dot{A} = ”äiti” ja V = ”vaimo”. Mikä on relaation (a) $I^{-1} \cup \dot{A}^{-1}$, (b) $P = V^{-1} \cup V$, (c) $V \circ (I \cup \dot{A})$, (d) $P \circ V$ laki?
2. Jatkoa edelliseen. Määritellään myös relaatiot B = ”veli” ja S = ”sisar”. Muodostettava relaatio (a) ”serkku”, (b) ”eno”, (c) ”lanko”.
3. Olkoot R_1 ja R_2 relaatioita joukosta X joukkoon Y ja olkoon R_3 relaatio joukosta Y joukkoon Z . Todistettava että $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$.
4. Jatkoa edelliseen. Todistettava, että $(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq (R_1 \circ R_3) \cap (R_2 \circ R_3)$. Annettava esimerkki tilanteesta, jossa osajoukkous on aito.
5. Onko joukossa \mathbf{Z} määritelty relaatio R refleksiivinen, irrefleksiivinen, symmetrinen, antisymmetrinen, transitiiivinen tai vertailullinen, kun (a) $xRy \Leftrightarrow x = y$, (b) $xRy \Leftrightarrow x \neq y$, (c) $xRy \Leftrightarrow x < y$, (d) $xRy \Leftrightarrow x \leq y$?
6. Joukossa X määritellyn relaation R sanotaan olevan *asymmetrinen*, jos $xRy \Rightarrow y \not R x$. Tutkittava, mitkä edellisen tehtävien relaatioista ovat asymmetrisiä.
7. Olkoon R joukossa X määritelty relaatio. Todistettava, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.
 - (a) R on transitiiivinen,
 - (b) $R \circ R \subseteq R$,
 - (c) $R^n \subseteq R$ aina, kun $n \in \mathbf{Z}_+$.
8. Olkoon R joukossa X määritelty relaatio. Todistettava, että jos R on refleksiivinen ja transitiiivinen, niin $R^2 = R$. Pitääkö käänteinen väite paikkansa?
9. Olkoon R joukossa X määritelty relaatio. Voidaan osoittaa, että tällöin $rs(R) = sr(R)$, $rt(R) = tr(R)$ ja $st(R) \subseteq ts(R)$ (tässä siis $rs(R) = r(s(R))$ jne.). Todettava näiden ominaisuuksien paikkansapitävyys tapauksessa, jossa $X = \{a, b, c, d\}$ ja $R = \{(a, a), (b, c), (c, d)\}$.

HUOM. Harjoitusryhmä to 14-16 kokoontuu tällä kertaa poikkeuksellisesti Päätalo ls D16.

HUOM. Nämä tehtävät kuuluvat vielä ensimmäiseen välikoealueeseen. Välikokeeseen osallistumisen edellytyksenä on, että 40 % koealueeseen kuuluvista tehtävistä on tehty. Koe on siis tiistaina 10.11. klo 14.00-16.00 Päätalo ls A1.