

Diskreetti matematiikka
Harjoitus 6, 12.-13.11.2009

1. Onko nyt elävien ihmisten joukossa määritelty relaatio (a) ”vähintään yhtä vanha kuin”, (b) ”sukulainen”, (c) ”samaa sukupuolta”, (d) ”saman maan kansalainen”, (e) ”työtoveri”, (f) ”ystävä” aina ekvivalenssirelaatio?
2. Esitettävä (luettelemalla alkioit) joukon $X = \{1, 2, 3, 4\}$ se ekvivalenssirelaatio R , jolle $X/R = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.
3. Onko joukossa \mathbf{R} määritelty relaatio
(a) $x \sim y \Leftrightarrow x + y \in \mathbf{Z}$,
(b) $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$
ekvivalenssirelaatio? Myönteisessä tapauksessa määritettävä ekvivalenssiluokat.
4. Olkoon $n \in \mathbf{Z}_+$. Määritellään joukossa \mathbf{Z} relaatio \sim kaavalla
$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ on jaollinen luvulla } n.$$
Todistettava, että \sim on ekvivalenssirelaatio, ja määritettävä ekvivalenssiluokat (kyseistä relaatiota \sim kutsutaan *kongruenssiksi modulo* n).
5. Seuraavassa ”todistetaan”, että ekvivalenssirelaation ominaisuudet eivät ole riippumattomia, vaan symmetrisyydestä ja transitiivisuudesta seuraa refleksiivisyys. Olkoon $x \in X$ mielivaltainen ja $y \in X$ sellainen, että $x \sim y$. Nyt symmetrisyyden perusteella $y \sim x$, joten edelleen transitiivisuuden perusteella $x \sim x$. Missä vika?
6. Olkoon R relaatio joukossa X . Todistettava, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.
(a) R on ekvivalenssirelaatio,
(b) $R^n \subseteq R$ aina, kun $n \in \mathbf{Z}$,
(c) R on refleksiivinen ja *euklidinen* eli $xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz$.
7. Muodostettava joukon \mathbf{Z}_6 yhteen- ja kertolaskutaulu. Mikä ero on yhtälön $a \cdot x = b$ ratkeavuudella joukossa \mathbf{Z}_5 ja joukossa \mathbf{Z}_6 ?
8. Todistettava, että joukon \mathbf{Z}_n alkioiden yhteen- ja kertolasku ovat hyvin määriteltyjä.

HUOM. Ensimmäiseen välikokeeseen osallistumisen edellytyksenä on, että 40 % (eli 16 tehtävää) koalueeseen kuuluvista tehtävistä on tehty. Koe on siis tiistaina 10.11. klo 14.00-16.00 Päätalo ls A1. Nämä tehtävät kuuluvat siis jo toiseen välikoalueeseen.