

Diskreetti matematiikka  
Harjoitus 8, 26.-27.11.2009

1. Muodostettava kaikki kuvaukset  $X \rightarrow Y$ , kun  $X = \{1, 2\}$  ja  $Y = \{a, b, c\}$  (esimerkiksi luettelemalla vastaavien relaatioiden alkiot).
2. Olkoon  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ . Määritettävä (a)  $f([1, 3])$ , (b)  $f([-2, 5])$ , (c)  $f^{-1}(\{3\})$ , (d)  $f^{-1}([0, 3])$ , (e)  $f^{-1}([-3, -1])$ , (f)  $f^{-1}([-3, 3])$ , (g) kuvauksen  $f$  arvojoukko.
3. Todistettava lauseen 26 ominaisuus (1) eli todistettava, että jos  $f : X \rightarrow Y$  on kuvaus ja  $A_1, A_2 \subseteq X$ , niin  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ .
4. Todistettava lauseen 26 ominaisuus (5) eli todistettava, että jos  $f : X \rightarrow Y$  on kuvaus ja  $A \subseteq X$ , niin  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ .
5. Tarkastellaan kuvausta  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ , missä  $f(x) =$  suurin 5:llä jaollinen kokonaisluku, joka on  $\leq x$ . Muodostettava jotkin sellaiset joukot  $A, A_1, A_2, B \subseteq \mathbf{Z}$ , että
  - (a)  $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ ,
  - (b)  $f^{-1}(f(A)) \neq A$ ,
  - (c)  $f(f^{-1}(B)) \neq B$ .
6. Olkoot  $f_1$  ja  $f_2$  kuvauksia  $X \rightarrow Y$ . Osoitettava, että relaatiot  $f_1 \cup f_2$  ja  $f_1 \cap f_2$  eivät yleensä ole kuvauksia  $X \rightarrow Y$ . Voivatko nämä relaatiot itse asiassa olla koskaan kuvauksia?
7. Tarkastellaan kuvausta  $f : X \rightarrow Y$ , kun  $X = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $f(1) = f(2) = 1$  ja  $f(\{1, 2\}) = 2$ . Nyt kuvan määritelmän mukaan  $f(\{1, 2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{1\}$ , mutta toisaalta kuvauksen  $f$  lain mukaan  $f(\{1, 2\}) = 2$ , Missä vika?
8. Olkoot  $f : X \rightarrow U$  ja  $g : Y \rightarrow V$  kuvauksia. Todistettava, että tällöin myös  $h : X \times Y \rightarrow U \times V$ , missä  $h((x, y)) = (f(x), g(y))$ , on kuvaus.

*HUOM. Ryhmä to 14-16 kokoontuu jälleen tällä kertaa poikkeuksellisesti Päätalo ls D16.*

*HUOM. Toiseen välikokeeseen osallistumisen edellytyksenä on, että 40 % koealueeseen kuuluvista tehtävistä on tehty.*