

Diskreetti matematiikka
Harjoitus 9, 3.-4.12.2009

1. Tarkastellaan relaatiota $f = \{(1, b), (2, a), (2, c), (3, b), (4, c)\}$ joukosta $X = \{1, 2, 3, 4\}$ joukkoon $Y = \{a, b, c\}$. Muodostettava ko. relaatiosta (a) kuvaus, (b) injektio, (c) surjektio, (d) bijektio poistamalla (mikäli mahdollista) siitä mahdollisimman vähän alkioita. Voidaanko minimimäärän poisto tehdä useammalla eri tavalla? Löytyykö joihinkin kohtiin vastaus, jos ko. relaatioon saa tuoda lisää alkioita?
2. Tutkittava (funktion kuvaajan perusteella), onko $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ injektio, surjektio tai bijektio, kun (a) $f(x) = x^5$, (b) $f(x) = x^6$, (c) $f(x) = x^3 - x^2$, (d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
3. Määritettävä jotkin sellaiset mahdollisimman laajat joukot $X, Y \subseteq \mathbf{R}$, että funktio $f : X \rightarrow Y$ on bijektio, kun (a) $f(x) = \sin x$, (b) $f(x) = \tan x$.
4. Kuvausta $i : X \rightarrow Y$, $i(x) = x$, missä $X \subseteq Y$, sanotaan *luonnolliseksi injeksioksi* eli joukon X *upotuskuvaukseksi* joukkoon Y . Todistettava, että i on todellakin injektio.
5. Todistettava injektiivisyyden ja surjektiivisuuden määritelmien mukaan, että funktio $f : \mathbf{R}_{+0} \rightarrow \mathbf{R}_{+0}$, $f(x) = x^2$ on bijektio (tässä merkitään $\mathbf{R}_{+0} = \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$).
6. Tarkastellaan kuvausta $f : X \rightarrow Y$. Todistettava, että jos f on surjektio, niin jokaista $B \subseteq Y$ kohti on voimassa $f(f^{-1}(B)) = B$.
7. Tarkastellaan kuvausta $f : X \rightarrow Y$. Todistettava, että jos jokaista $B \subseteq Y$ kohti on voimassa $f(f^{-1}(B)) = B$, niin f on surjektio.
8. Olkoon joukossa X määritelty luokkajako $\{A_k\}_{k \in I} = Y$. Kun $x \in X$, tarkoitetaan A_{k_x} sitä joukkoperheen Y joukkoa, joka sisältää alkion x . Tällöin kuvausta $\pi : X \rightarrow Y$, $\pi(x) = A_{k_x}$, sanotaan *luonnolliseksi surjektioksi*. Todistettava, että π on todellakin (a) kuvaus, (b) surjektio.

HUOM. Harkat nro 10 tullaan pitämään viikon 50 alkupäivinä - ajoista ja paikoista tiedotetaan kurssin sähköpostilistalla.

HUOM. Toiseen välikokeeseen osallistumisen edellytyksenä on, että 40 % koalueeseen kuuluvista (eli harjoitusten 6-10) tehtävistä on tehty.