

Diskreetti matematiikka  
Harjoitus 10, 7.-8.12.2009

1. Olkoon  $X = [-2, \infty[$  ja  $Y = [1, \infty[$ . Oletetaan tunnetuksi, että funktio  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = x^2 + 4x + 5$ , on bijektio. Määritettävä käänteisfunktio  $f^{-1}$ .
2. Määritellään  $p\mathbf{N} = \{pn \mid n \in \mathbf{N}\}$ . Oletetaan tunnetuksi, että kuvaus  $f : 3\mathbf{N} \setminus \{0, 3\} \rightarrow 5\mathbf{N}$ ,  $f(n) = 5(n-6)/3$ , on bijektio (vrt. kirjan tehtävä 264b). Määritettävä käänteiskuvaus  $f^{-1}$ .
3. Tunnetusti identtinen funktio  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x$ , on oma käänteisfunktionsa eli on voimassa  $f = f^{-1}$ . Mainittava ainakin kaksi muuta funktiota  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , joilla on myös tämä sama ominaisuus. Mikä ominaisuus tällaisten funktioiden kuvaajilla näyttäisi yleisesti olevan?
4. Olkoon  $f(x) = 1/(1+x)$  ja  $g(x) = 1/(1-x)$ . Muodostettava funktion  $h = f \circ g - g \circ f$  sääntö (siis mitä on  $h(x) = (f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)$ ?). Mitkä ovat funktion  $h$  määrittely- ja arvojoukko?
5. Olkoon  $X$  epätyhjä joukko. Olkoon  $\mathcal{F}$  kaikkien kuvausten  $X \rightarrow X$  joukko,  $\mathcal{B}$  kaikkien bijektioiden  $X \rightarrow X$  joukko ja  $i$  identtinen kuvaus  $X \rightarrow X$ . Todistettava, että  $\forall f \in \mathcal{F} : f \circ i = i \circ f = f$ .
6. Jatkoa edelliseen tehtävään. Todistettava, että  $\forall f \in \mathcal{B} : f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i$ .
7. Jatkoa edelliseen tehtävään. Todistettava, että  $\forall f, g \in \mathcal{B} : (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .
8. Todistettava, että 5:llä jaollisten ja 7:llä jaollisten positiivisten kokonaislukujen joukot ovat keskenään yhtä mahtavia.
9. Todistettava, että tason kaikkien ympyröiden joukko ja ylöspäin aukeavien paraabelien joukko ovat keskenään yhtä mahtavia.

*HUOM. Tällä kertaa kokoontuu vain kolme ryhmää, joista ensimmäinen ma 7.12. klo 12-14 ja toinen 14-16. Kolmas ryhmä kokoontuu ti 8.12. klo 10-12. Saliin selvittyä asiasta tiedotetaan kurssin sähköpostilistalla. Tällä kertaa kirjallisesti palautetut tulee jättää kansliaan viimeistään ma klo 12.*

*HUOM. Toiseen välikokeeseen osallistumisen edellytyksenä on, että 40 % (eli 16 tehtävää) harjoitusten 6-10 tehtävistä on tehty. Välikoe on to 10.12. klo 12.00-14.00 Päätalo ls D10b.*