Kirjan

Johdatus diskreettiin matematiikkaan

harjoitustehtävien ratkaisuja

Jukka Ilmonen
Jukka.Ilmonen@uta.fi

Jarmo Niemelä
jarmo.niemela@kolumbus.fi

27. elokuuta 2004

---

4. **a)**

p	q	r	$p \vee q$	$\Rightarrow r$
0	0	0	0	**1**
0	0	1	0	**1**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	1	**1**
1	0	0	1	**0**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	1	**0**
1	1	1	1	**1**

b)

p	q	r	$p \vee$	$(q \Rightarrow r)$
0	0	0	**1**	1
0	0	1	**1**	1
0	1	0	**0**	0
0	1	1	**1**	1
1	0	0	**1**	1
1	0	1	**1**	1
1	1	0	**1**	0
1	1	1	**1**	1

6. Peruskonnektiiveina ovat $\neg$ ja $\Rightarrow$.

$$\begin{aligned} p \wedge q &\overset{\text{def}}{=} \neg(p \Rightarrow \neg q), \\ p \vee q &\overset{\text{def}}{=} \neg p \Rightarrow q, \\ p \Leftrightarrow q &\overset{\text{def}}{=} \neg\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)\big) \\ &\quad \big[\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big]. \end{aligned}$$

Myös

$$p \Leftrightarrow q \overset{\text{def}}{=} (\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q).$$

8.

$$\begin{aligned} \neg p &\overset{\text{def}}{=} p \mid p, \\ p \wedge q &\overset{\text{def}}{=} (p \mid q) \mid (p \mid q), \\ p \vee q &\overset{\text{def}}{=} (p \mid p) \mid (q \mid q). \end{aligned}$$

10.

$$
\begin{aligned}
\neg p &\overset{\text{def}}{=} p \downarrow p, \\
p \wedge q &\overset{\text{def}}{=} (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q), \\
p \vee q &\overset{\text{def}}{=} (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q).
\end{aligned}
$$

13. Kahdelle lauseelle määritellyn loogisen konnektiivin totuustaulussa on neljä riviä, sillä lauseet voivat saada toisistaan riippumatta kaksi eri totuusarvoa ($2 \cdot 2 = 4$). Kullakin rivillä konnektiivin totuustaulussa on kaksi mahdollista arvoa (0 tai 1) ja kunkin rivin arvo voidaan valita toisista riveistä riippumatta. Erilaisia kahdelle lauseelle määriteltyjä loogisia konnektiiveja on siis $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

21. **a)**

p	$\wedge$	p	$\Leftrightarrow$	p	$\vee$	p
0	0	0	**1**	0	0	0
1	1	1	**1**	1	1	1
1	2	1	**3**	1	2	1

Jos p on tosi, niin myös lauseet $p \wedge p$ ja $p \vee p$ ovat tosia. Jos taas p on epätosi, niin lauseet $p \wedge p$ ja $p \vee p$ ovat nekin epätosia. Täten ekvivalenssin määritelmän mukaan lause $p \wedge p \Leftrightarrow p \vee p$ on tosi p:n totuusarvosta riippumatta. Näin ollen lause $p \wedge p \Leftrightarrow p \vee p$ on tautologia.

b)

p	$\Rightarrow$	$(\neg$	p	$\Rightarrow$	$p)$
0	**1**	1	0	0	0
1	**1**	0	1	1	1
1	**4**	2	1	3	1

Jos p on epätosi, niin implikaation määritelmän mukaan lause $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow p)$ on tosi. Jos p on tosi, niin $\neg p$ on epätosi. Implikaation määritelmän mukaan tällöin $\neg p \Rightarrow p$ on tosi, jolloin myös lause $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow p)$ on tosi. Täten lause $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow p)$ on tautologia, sillä se on tosi lausemuuttujan p totuusarvosta riippumatta.

23.

p	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r)$	$\Leftrightarrow$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$r)$
0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	**1**	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	**1**	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	**1**	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	**1**	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	**1**	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	**1**	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1
1	3	1	2	1	**4**	1	2	1	3	1	2	1

Jos p on tosi ja ainakin toinen lauseista q ja r on tosi, niin tällöin joko p ja q ovat tosia tai p ja r ovat tosia. Toisaalta, jos joko p ja q tai p ja r ovat tosia, niin tällöin p on tosi ja ainakin toinen lauseista q ja r on tosi. (Ekvivalenssin ja implikaation yhteys.)

24. **a)**

$$\begin{array}{c}
\neg\big(\neg(p \Rightarrow \neg q) \lor \neg(q \Rightarrow \neg p)\big) \\
\hline
\mathbf{0}\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 01\ \ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 01 \\
\hline
\mathbf{6}\ \ 4\ \ 1\ \ 3\ \ 21\ \ \ 5\ \ 4\ \ 1\ \ 3\ \ 21
\end{array}$$

Siis lause on epätosi.

b)

$$\begin{aligned}
&\neg\big(\neg(p \Rightarrow \neg q) \lor \neg(q \Rightarrow \neg p)\big) \\
&\quad \equiv \neg\neg(p \Rightarrow \neg q) \land \neg\neg(q \Rightarrow \neg p) && \text{(de Morganin sääntö)} \\
&\quad \equiv (p \Rightarrow \neg q) \land (q \Rightarrow \neg p) && \text{(kaksoisnegaation laki)} \\
&\quad \equiv \neg(p \land \neg\neg q) \land \neg(q \land \neg\neg p) && \text{(implikaation määritelmä)} \\
&\quad \equiv \neg(p \land q) \land \neg(q \land p) && \text{(kaksoisnegaation laki)} \\
&\quad \equiv \neg(p \land q) \land \neg(p \land q) && \text{(vaihdantalaki)} \\
&\quad \equiv \neg(p \land q) && \text{(idempotenssilaki).}
\end{aligned}$$

Oletuksen mukaan p ja q ovat tosia, jolloin lause $\neg(p \land q)$ on epätosi ja siis myös alkuperäinen lause on epätosi.

27.

$$\begin{aligned}
p \Rightarrow (q \land p) &\equiv \neg p \lor (q \land p) && \text{(implikaation määritelmä)} \\
&\equiv (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor p) && \text{(osittelulaki)} \\
&\equiv (\neg p \lor q) \land \top && \text{(teht. 26a)} \\
&\equiv \neg p \lor q && \text{(teht. 25c)} \\
&\equiv \neg p \lor \neg\neg q && \text{(kaksoisnegaation laki)} \\
&\equiv \neg(p \land \neg q) && \text{(de Morganin sääntö).}
\end{aligned}$$

Tarkistus totuustaulukolla:

$$\begin{array}{c}
\big(p \Rightarrow (q \land p)\big) \Leftrightarrow \neg(p \land \neg q) \\
\hline
0\ \ 1\ \ \ 0\ 0\ 0\ \ \ \mathbf{1}\ \ 1\ 0\ 0\ 10 \\
0\ \ 1\ \ \ 1\ 0\ 0\ \ \ \mathbf{1}\ \ 1\ 0\ 0\ 01 \\
1\ \ 0\ \ \ 0\ 0\ 1\ \ \ \mathbf{1}\ \ 0\ 1\ 1\ 10 \\
1\ \ 1\ \ \ 1\ 1\ 1\ \ \ \mathbf{1}\ \ 1\ 1\ 0\ 01 \\
\hline
1\ \ 3\ \ \ 1\ 2\ 1\ \ \ \mathbf{5}\ \ 4\ 1\ 3\ 21
\end{array}$$

32. **a)**

p	$\wedge$	$(\neg q$	$\Rightarrow$	$\neg p)$	$\Rightarrow$	q
0	0	10	1	10	**1**	0
0	0	01	1	10	**1**	1
1	0	10	0	01	**1**	0
1	1	01	1	01	**1**	1
1	4	21	3	21	**5**	1

Esimerkki. Oletetaan, että a^2 on irrationaaliluku (oletus p). Osoitetaan, että tällöin myös a on irrationaaliluku (väitös q). Tehdään vastaoletus, että a on rationaaliluku (vastaoletus $\neg q$). Tällöin $a = m/n$, missä m ja n ($\neq 0$) ovat kokonaislukuja. Täten myös m^2 ja n^2 ovat kokonaislukuja, jolloin $a^2 = m^2/n^2$ onkin rationaaliluku vastoin oletusta (ristiriita: p ja $\neg p$). Koska vastaoletus johti ristiriitaan, niin a on irrationaaliluku.

b) Tehdään vastaoletus, että lause $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$ on epätosi. Tällöin implikaation määritelmän perusteella lauseiden $p \Rightarrow q$ ja $p \Rightarrow \neg q$ on oltava tosia ja lauseen $\neg p$ on oltava epätosi. Siis p on tosi. Koska $p \Rightarrow q$ on tosi, niin myös q:n on oltava tosi. Toisaalta, koska $p \Rightarrow \neg q$ on tosi, niin myös $\neg q$:n on oltava tosi. Vastaoletus johtaa näin ristiriitaan, joten tehtävän lause onkin aina tosi eli tautologia.

34. **a)** On osoitettava, että implikaatio $p \Rightarrow p \vee q$ on tautologia. Soveltamalla implikaation määritelmää, vaihdantalakia sekä tehtävien 26a ja 25a tuloksia saadaan

$$p \Rightarrow p \vee q \equiv \neg p \vee p \vee q \equiv \top \vee q \equiv \top.$$

Lause $p \Rightarrow p \vee q$ on siis aina tosi eli tautologia, joten vastaava päättely on pätevä.

b) Tehdään vastaoletus, että implikaatio $p \wedge q \Rightarrow p$ on epätosi. Tällöin lauseiden p ja q on oltava tosia ja lauseen p epätosi. Koska tähän sisältyy ristiriita, niin vastaoletus on väärä. Implikaatio $p \wedge q \Rightarrow p$ on siis aina tosi eli se on tautologia.

c)

$\neg\neg p$	$\Rightarrow$	p
010	**1**	0
101	**1**	1
321	**4**	1

d)

$(p$	$\Leftrightarrow$	$q)$	$\Rightarrow$	$(\neg p$	$\Leftrightarrow$	$\neg q)$
0	1	0	**1**	10	1	10
0	0	1	**1**	10	0	01
1	0	0	**1**	01	0	10
1	1	1	**1**	01	1	01
1	3	1	**4**	21	3	21

37. Olkoon $p =$ 'menet naimisiin' ja $q =$ 'kadut'. Tällöin päättely on muotoa

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{\neg p \Rightarrow q} \\ (p \vee \neg p) \Rightarrow q \end{array}$$

Tämä päättely on pätevä, jos ja vain jos implikaatio

$$(*) \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow \big((p \vee \neg p) \Rightarrow q\big)$$

on tautologia. Tehdään vastaoletus, että implikaatio $(*)$ on epätosi. Muodostetaan totuustaulu käänteisessä järjestyksessä:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(p & \Rightarrow & q) & \wedge & (\neg & p & \Rightarrow & q) & \Rightarrow & \big((p & \vee \neg p) & \Rightarrow & q\big) \\
\hline
\mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\mathbf{5} & 3 & 4 & 2 & 5 & \mathbf{6} & 3 & 4 & 1 & & 3 & 2 & 3
\end{array}$$

Päädytään ristiriitaan: p on epätosi ja p on tosi. Vastaoletus on siis väärä, joten implikaatio $(*)$ on tautologia ja sitä vastaava päättely on pätevä.

42. **a)** Tosi, sillä $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, $\forall x \in \mathbb{Z}_+$.

b) Epätosi, sillä $0 \in \mathbb{R}$ ja $(1+0)^2 = 1 = 1 + 2 \cdot 0$.

44. **a)** Tosi, sillä jos x on kokonaisluku, niin myös $x+2$ on kokonaisluku.

b) Epätosi, sillä esimerkiksi $1 \in \mathbb{R}$ ja $1 \in \mathbb{Z}$, mutta $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

48. **a)** Lause $\forall x \in \mathbb{Z}\colon \exists y \in \mathbb{Z}\colon x + y = 2x - y$ on epätosi. Nimittäin $x + y = 2x - y \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$, ja jos $x = 1 \in \mathbb{Z}$, niin $y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

b) Lause $\exists y \in \mathbb{Z}\colon \forall x \in \mathbb{Z}\colon x + y = 2x - y$ on epätosi. Tehdään vastaoletus, että se onkin tosi. Tällöin, kun $x = y$, niin $y + y = 2y - y \Leftrightarrow y = 0$. Siis täytyisi olla $\forall x \in \mathbb{Z}\colon x + 0 = 2x - 0$, mikä on selvästi epätosi. Vastaoletus on siis väärä ja tehtävän lause täten epätosi.

c) Lause $\forall y \in \mathbb{Z}\colon \exists x \in \mathbb{Z}\colon x + y = 2x - y$ on tosi. Valitaan mielivaltainen $y \in \mathbb{Z}$. Tällöin $x = 2y$ $(\in \mathbb{Z})$ toteuttaa yhtälön $x + y = 2x - y$.

d) Lause $\exists x \in \mathbb{Z}\colon \forall y \in \mathbb{Z}\colon x + y = 2x - y$ on epätosi. Tehdään vastaoletus, että se onkin tosi. Tällöin, kun $y = x$, niin $x + x = 2x - x \Leftrightarrow x = 0$. Siis täytyisi olla $\forall y \in \mathbb{Z}\colon 0 + y = 2 \cdot 0 - y$, mikä on selvästi epätosi. Vastaoletus on siis väärä ja tehtävän lause täten epätosi.

51. **a)** Lause $\forall x \in \mathbb{R}\colon x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ on tosi, sillä jos $x = 3$, niin $x^2 = 3^2 = 9$.

b) Lause $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ on epätosi, sillä $(-3)^2 = 9$, mutta $-3 \neq 3$.

c) Lause $\forall x \in \mathbb{R}\colon x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$ on epätosi, sillä esimerkiksi $-4 < 3$, mutta $(-4)^2 = 16 > 9$.

d) Lause $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 < 9 \Rightarrow x < 3$ on tosi. Nimittäin $x^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

53. **a)** Lause $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 = -1 \Rightarrow x = 2$ on tosi, sillä yhtälö $x^2 = -1$ on epätosi kaikilla $x \in \mathbb{R}$, jolloin implikaatio $x^2 = -1 \Rightarrow x = 2$ on määritelmän mukaan tosi.

b) Lause $\forall x \in \mathbb{R} \colon x^2 = -1 \Rightarrow x \neq 2$ on tosi vastaavalla perusteella kuin a-kohdan lause.

c) Lause $\forall x \in \mathbb{R} \colon x^2 = -1 \Rightarrow x^2 \neq -1$ on tosi vastaavalla perusteella kuin a-kohdan lause.

55. Lause $\neg\exists x \in X \colon p(x)$ on tosi täsmälleen silloin, kun lause $\exists x \in X \colon p(x)$ on epätosi eli kun ei ole olemassa sellaista $x \in X$, että $p(x)$ on tosi. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $p(x)$ on epätosi kaikilla $x \in X$. Tämä taas tarkoittaa, että lause $\forall x \in X \colon \neg p(x)$ on tosi. Olemme näin osoittaneet, että lause $\neg\exists x \in X \colon p(x)$ on tosi, jos ja vain jos lause $\forall x \in X \colon \neg p(x)$ on tosi.

57. Olkoon $p(x) =$ '$x \geq 0$' ja $q(x) =$ '$x < 0$'. Tällöin lause

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon \big(p(x) \Leftrightarrow q(x)\big) \tag{1}$$

on epätosi, sillä jos $x \geq 0$, niin ei voi olla $x < 0$. Toisaalta, koska lauseet $\forall x \in \mathbb{R} \colon p(x)$ ja $\forall x \in \mathbb{R} \colon q(x)$ ovat selvästi epätosia, niin lause

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon p(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \colon q(x) \tag{2}$$

on ekvivalenssin määritelmän mukaan tosi. Lauseilla (1) ja (2) on siis tässä eri totuusarvot, joten ne eivät voi olla yhtäpitäviä eli ekvivalentteja.

58. Olkoon T transkendenttilukujen joukko ja A algebrallisten lukujen joukko. Päättely on tällöin

$$\begin{array}{l} 2 \in T \\ \neg\exists x \in T \colon x \in A \\ \forall x \in \mathbb{Q} \colon x \in A \\ \forall x \in \mathbb{Z} \colon x \in \mathbb{Q} \\ \hline 2 \notin \mathbb{Z} \end{array}$$

Jos olisi $2 \in \mathbb{Z}$, niin oletuksen (4. rivi) perusteella olisi $2 \in \mathbb{Q}$ ja edelleen (3. rivi) $2 \in A$. Tästä seuraa kuitenkin ristiriita, sillä oletuksen mukaan (1. rivi) $2 \in T$, mutta toisaalta (2. rivi) $\neg\exists x \in T \colon x \in A$ eli $\forall x \in T \colon x \notin A$. Vastaoletus $2 \in \mathbb{Z}$, on siis väärä ja näin ollen päättely on pätevä.

62. Todistetaan induktiolla, että

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{$*$}$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Perusaskel. Kun $n = 1$, niin $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$, joten yhtälö $(*)$ on voimassa.

Induktioaskel. Induktio-oletus on

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \tag{IO}$$

ja induktioväite on

$$\text{(IV)} \qquad 1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)\big((k+1)+1\big)\big(2(k+1)+1\big).$$

Induktioväitteen todistus.

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 &\overset{\text{IO}}{=} \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
&= (k+1)\left(\frac{1}{6}k(2k+1) + (k+1)\right) \\
&= (k+1)\left(\frac{1}{3}k^2 + \tfrac{7}{6}k + 1\right) \\
&= (k+1)\frac{1}{6}(2k^2 + 7k + 6) \\
&= (k+1)\frac{1}{6}(k+2)(2k+3) \\
&= \frac{1}{6}(k+1)\big((k+1)+1\big)\big(2(k+1)+1\big).
\end{aligned}$$

Induktioväite ja siis myös tehtävän väite on näin todistettu.

64. Luku 1 voidaan selvästi järjestää jonoon vain $1 = 1!$ eri tavalla. Oletetaan, että luvut $1, 2, \dots, k$ voidaan järjestää jonoon $k!$ eri tavalla. Olkoon $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ jokin näistä jonoista. Luku $k+1$ voidaan sijoittaa tähän jonoon $k+1$ eri paikkaan: ennen lukua a_1, ennen lukua a_2, $\dots$, ennen lukua a_k tai luvun a_k jälkeen. Jokaista luvuista $1, 2, \dots, k$ muodostettua järjestettyä jonoa kohti on siis $k+1$ luvuista $1, 2, \dots, k+1$ muodostettua järjestettyä jonoa. Täten luvut $1, 2, \dots, k+1$ voidaan järjestää jonoon $(k+1)k! = (k+1)!$ eri tavalla. Induktioperiaatteesta seuraa nyt, että luvut $1, 2, \dots n$ voidaan järjestää jonoon $n!$ eri tavalla.

66. Todistetaan induktiolla, että jos $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $n \geq 4$, niin $2^n < n!$.

Perusaskel. Väite $2^n < n!$ on tosi, kun $n = 4$, sillä $2^4 = 16 < 24 = 4!$.

Induktioaskel. Oletetaan, että $2^k < k!$ kokonaisluvulla $k \geq 4$. Tällöin

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k!.$$

Koska $k \geq 4$, niin $2 < k+1$ ja siten

$$2 \cdot k! < (k+1)k! = (k+1)!.$$

Siis $2^{k+1} < (k+1)!$, ja tehtävän väite seuraa nyt induktioperiaatteesta.

72. Olkoon (a_n) geometrinen jono, jonka ensimmäinen termi $a_1 = a$ ja jonka kahden peräkkäisen termin suhde on q.

a) Jonon (a_n) yleinen termi (kun $n \in \mathbb{Z}_+$) on

$$a_n = aq^{n-1}.$$

Todistus. Koska $a_1 = a = aq^{1-1}$, niin väitös on tosi n:n arvolla 1. Oletetaan, että väitös on tosi, kun $n = k$; siis että $a_k = aq^{k-1}$. Koska $q = a_{k+1}/a_k$, niin

$$a_{k+1} = qa_k = qaq^{k-1} = aq^k = aq^{(k+1)-1}.$$

Siis väitös on tosi n:n arvolla $k+1$, joten induktioperiaatteen mukaan se on tosi kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

b) Jonoa (a_n) vastaavan geometrisen sarjan osasumma ehdolla $q \neq 1$ on

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Todistus. Koska $a_1 = a = a\frac{1-q^1}{1-q}$, niin väitös on tosi n:n arvolla 1. Oletetaan, että väitös on tosi, kun $n = k$. Nyt a-kohdan mukaan $a_{k+1} = aq^k$, jolloin induktio-oletuksesta seuraa, että

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} &= a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{k-1} + aq^k \\ &= a\frac{1-q^k}{1-q} + aq^k = a\left(\frac{1-q^k}{1-q} + q^k\right) \\ &= a\left(\frac{1-q^k+q^k-q^kq}{1-q}\right) = a\frac{1-q^{k+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Siis väitös on tosi n:n arvolla $k+1$, joten induktioperiaatteen mukaan se on tosi kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.
Jos $q = 1$, niin $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a, a, a, \ldots)$. Jonoa (a_n) vastaavan geometrisen sarjan osasumma ehdolla $q = 1$ on täten

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + a + \cdots + a = na.$$

74. Todistetaan induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ on voimassa

$$(*) \qquad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Koska $1 \cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1$, niin yhtälö $(*)$ on tosi n:n arvolla 1.

Tehdään induktio-oletus, että yhtälö $(*)$ on voimassa, kun $n = k$. Tällöin

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! \\ &\quad = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)!\big(1 + (k+1)\big) - 1 \\ &\quad = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1 = \big((k+1)+1\big)! - 1. \end{aligned}$$

Siis yhtälö $(*)$ on voimassa n:n arvolla $k+1$, ja tehtävän väitös seuraa nyt induktioperiaatteesta

78. Todistuksen perusaskel on muotoa $0 = 0$, mutta tästähän ei seuraa, että $0 = 1$ eikä siis että $0 = 1 = \cdots = n$. Perusaskeleen pitäisi olla muotoa $0 = 1$, mikä ei tietenkään pidä paikkansa.

82. Nollasta eroavien reaalilukujen tulo on positiivinen, jos ja vain jos negatiivisia tulontekijöitä on parillinen määrä.

Todistus. Olkoot seuraavassa luvut a_i nollasta eroavia reaalilukuja. Tarkoittakoon p_n lausetta 'tulo $a_1 \cdots a_n$ on positiivinen, jos ja vain jos siinä negatiivisia tulontekijöitä on parillinen määrä'.

Lause p_2 on tosi, sillä tulo $a_1 a_2$ on positiivinen, jos ja vain jos negatiivisia tulontekijöitä on kaksi (2) tai ei yhtään (0).

Oletetaan, että lause p_n on tosi aina, kun $2 \leq n \leq k$. Jos $a_{k+1} > 0$, niin tulon $a_1 \cdots a_k a_{k+1}$ etumerkki on sama kuin tulon $a_1 \cdots a_k$, ja kummassakin tulossa on yhtä monta negatiivista tulontekijää. Täten oletuksen perusteella tulo $a_1 \cdots a_k a_{k+1}$ on positiivinen, jos ja vain jos siinä negatiivisia tulontekijöitä on parillinen määrä.

Entä jos $a_{k+1} < 0$? Jos tällöin tulo $a_1 \cdots a_k a_{k+1}$ on positiivinen, niin tulon $a_1 \cdots a_k$ täytyy olla negatiivinen. Oletuksen perusteella tulossa $a_1 \cdots a_k$ on tällöin pariton määrä negatiivisia tulontekijöitä, joten tulossa $a_1 \cdots a_k a_{k+1}$ niitä on parillinen määrä. Kääntäen, jos tulossa $a_1 \cdots a_k a_{k+1}$ on parillinen määrä negatiivisia tulontekijöitä, niin tulossa $a_1 \cdots a_k$ niitä on pariton määrä. Oletuksen perusteella tulo $a_1 \cdots a_k$ on tällöin negatiivinen, jolloin tulo $a_1 \cdots a_k a_{k+1}$ on positiivinen. Siis tulo $a_1 \cdots a_k a_{k+1}$ on positiivinen, jos ja vain jos siinä negatiivisia tulontekijöitä on parillinen määrä.

On siis osoitettu, että lause p_n on tosi arvolla $n = k + 1$. Tehtävän väitös seuraa nyt toisesta induktioperiaatteesta.

83. Koska laskutoimitus $*$ on vaihdannainen, niin $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$ eli väitös on tosi arvolla $n = 2$. Tehdään induktio-oletus, että väitös on tosi aina, kun $2 \leq n < k$. Induktioväite on, että väitös on tosi, kun $n = k$. Olkoot x_{i_1}, x_{i_2}, $\ldots$, x_{i_k} alkiot x_1, x_2, $\ldots$, x_k kirjoitettuna johonkin toiseen järjestykseen.

Jos $x_k = x_{i_1}$, niin liitännäisyyden, vaihdannaisuuden ja induktio-oletuksen perusteella

$$\begin{aligned} x_{i_1} * x_{i_2} * \cdots * x_{i_k} &= x_k * (x_{i_2} * \cdots * x_{i_k}) = (x_{i_2} * \cdots * x_{i_k}) * x_k \\ &\overset{\text{I.O.}}{=} (x_1 * \cdots * x_{k-1}) * x_k = x_1 * x_2 * \cdots * x_k. \end{aligned}$$

Jos $x_k = x_{i_k}$, niin vastaavasti

$$\begin{aligned} x_{i_1} * x_{i_2} * \cdots * x_{i_k} &= (x_{i_1} * \cdots * x_{i_{k-1}}) * x_k \\ &\overset{\text{I.O.}}{=} (x_1 * \cdots * x_{k-1}) * x_k = x_1 * x_2 * \cdots * x_k. \end{aligned}$$

Jos $x_k = x_{i_m}$, missä $1 < m < k$, niin

$$\begin{aligned}
x_{i_1} * x_{i_2} * \cdots * x_{i_k} &= x_{i_1} * \cdots * x_{i_{m-1}} * x_{i_m} * x_{i_{m+1}} * \cdots * x_{i_k} \\
&= x_{i_1} * \cdots * x_{i_{m-1}} * \big(x_k * (x_{i_{m+1}} * \cdots * x_{i_k})\big) \\
&= x_{i_1} * \cdots * x_{i_{m-1}} * \big((x_{i_{m+1}} * \cdots * x_{i_k}) * x_k\big) \\
&= (x_{i_1} * \cdots * x_{i_{m-1}} * x_{i_{m+1}} * \cdots * x_{i_k}) * x_k \\
&\overset{\text{I.O.}}{=} (x_1 * \cdots * x_{k-1}) * x_k = x_1 * x_2 * \cdots * x_k.
\end{aligned}$$

Induktioväite on näin todistettu, joten toisen induktioperiaatteen mukaan tehtävän väitös on tosi aina, kun $n \geq 2$.

84. Rekursioyhtälön $f_{n+1} = 2f_n + 3$ ratkaisu alkuehdolla $f_0 = 1$ on $f_n = 4 \cdot 2^n - 3$, sillä

$$2f_n + 3 = 2(4 \cdot 2^n - 3) + 3 = 4 \cdot 2^{n+1} - 3 = f_{n+1}$$

ja

$$f_0 = 4 \cdot 2^0 - 3 = 1.$$

103. **a)** $\{\, x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4 \,\} = \{-2, 2\}$,

b) $\{\, x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 2 \,\} = \emptyset$,

c) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2 \,\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

107. **a)** $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$,

b) $\mathcal{P}\big(\{a, \{a\}\}\big) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \big\{\{a\}\big\}, \{a, \{a\}\}\Big\}$.

110. **a)** Väärä, sillä jos $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$ ja $C = \big\{\{1\}\big\}$, niin $A \notin B$ ja $B \notin C$, mutta $A \in C$.

b) Väärä, sillä jos $A = \{1\}$, $B = \big\{1, \{1\}\big\}$ ja $C = \big\{\{1\}\big\}$, niin $A \in B$ ja $B \notin C$, mutta $A \in C$.

c) Väärä, sillä jos $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$ ja $C = \big\{\{1\}\big\}$, niin $A \subseteq B$ ja $B \notin C$, mutta $A \in C$.

112. Kun $A = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$ ja $B = \big\{\{\emptyset\}\big\}$, niin $\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\{\emptyset\}\big\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\}$ ja $\mathcal{P}(B) = \Big\{\emptyset, \big\{\{\emptyset\}\big\}\Big\}$. Tällöin väite

a) $A \in \mathcal{P}(B)$ on epätosi, **b)** $A \subseteq \mathcal{P}(B)$ on epätosi,

c) $A \subset \mathcal{P}(B)$ on epätosi, **d)** $B \in \mathcal{P}(A)$ on tosi,

e) $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ on tosi, **f)** $B \subset \mathcal{P}(A)$ on tosi.

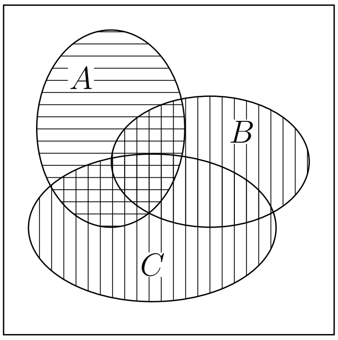
118. Oletetaan, että $A \subseteq B$. Valitaan mielivaltainen $C \in \mathcal{P}(A)$. Nyt siis $C \subseteq A$, jolloin oletuksen perusteella $C \subseteq B$. Siis $C \in \mathcal{P}(B)$. Täten $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Valitaan mielivaltainen $x \in A$. Tällöin $\{x\} \subseteq A$ ja siis $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$. Oletuksesta seuraa, että $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$ eli että $\{x\} \subseteq B$. Täten on oltava $x \in B$. Koska x oli mielivaltainen, niin $A \subseteq B$.

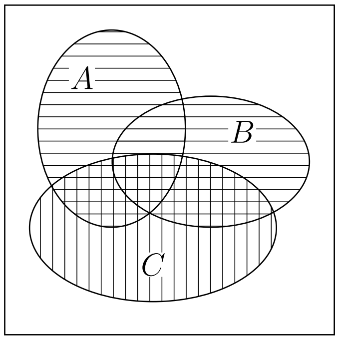
121. Olkoon perusjoukko $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $A = \{\, x \in X \mid x \text{ on parillinen} \,\}$, $B = \{\, x \in X \mid x \text{ on alkuluku} \,\}$. Tällöin

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \qquad B = \{2, 3, 5, 7\},$$
$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}, \qquad A \cap B = \{2\},$$
$$A \setminus B = \{4, 6, 8, 10\}, \qquad B \setminus A = \{3, 5, 7\},$$
$$\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \qquad \overline{B} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}.$$

123. a)



A vaakaviivoitettu
$B \cup C$ pystyviivoitettu
$A \cup (B \cup C)$ viivoitettu tai ruudutettu

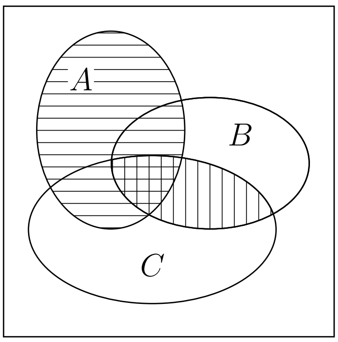


$A \cup B$ vaakaviivoitettu
C pystyviivoitettu
$(A \cup B) \cup C$ viivoitettu tai ruudutettu

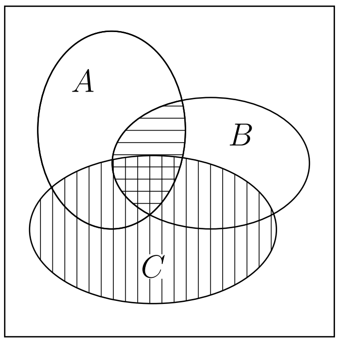
Todistus.

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C. \end{aligned}$$

b)



A vaakaviivoitettu
$B \cap C$ pystyviivoitettu
$A \cap (B \cap C)$ ruudutettu



$A \cap B$ vaakaviivoitettu
C pystyviivoitettu
$(A \cap B) \cap C$ ruudutettu

Todistus.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

126. **a)** Valitaan mielivaltainen $x \in A \cup (A \cap B)$. Tällöin $x \in A$ tai $x \in A \cap B$. Siis $x \in A$ tai $x \in A$ ja $x \in B$, joten joka tapauksessa $x \in A$. Näin on osoitettu, että $A \cup (A \cap B) \subseteq A$.

Toisaalta, jos $x \in A$, niin välttämättä myös $x \in A \cup (A \cap B)$. Siis $A \subseteq A \cup (A \cap B)$, ja täten on osoitettu, että $A \cup (A \cap B) = A$.

b) Osittelulaista ja idempotenssilaista seuraa, että

$$A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B).$$

Nyt a-kohdan mukaan $A \cup (A \cap B) = A$, joten on osoitettu, että $A \cap (A \cup B) = A$.

128. Olkoon perusjoukkona X.

a)

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= \big(A \cap (\overline{B} \cup B)\big) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cap X) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= A \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap X = A \cup B. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} A \cup (B \setminus A) &= A \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap X = A \cup B. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A \cap (B \setminus A) &= A \cap (B \cap \overline{A}) \\ &= A \cap (\overline{A} \cap B) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset. \end{aligned}$$

132. Olkoon seuraavassa $a \in X$.

a) $L_{p\vee q} = L_p \cup L_q$, sillä

$$\begin{aligned} a \in L_{p\vee q} &\Leftrightarrow a \in \{\, x \in X \mid p(x) \vee q(x) \,\} \\ &\Leftrightarrow p(a) \vee p(q) \\ &\Leftrightarrow a \in \{\, x \in X \mid p(x) \,\} \vee a \in \{\, x \in X \mid q(x) \,\} \\ &\Leftrightarrow a \in L_p \cup L_q. \end{aligned}$$

b) $L_{p\wedge q} = L_p \cap L_q$, sillä

$$\begin{aligned} a \in L_{p\wedge q} &\Leftrightarrow a \in \{\, x \in X \mid p(x) \wedge q(x) \,\} \\ &\Leftrightarrow p(a) \wedge p(q) \\ &\Leftrightarrow a \in \{\, x \in X \mid p(x) \,\} \wedge a \in \{\, x \in X \mid q(x) \,\} \\ &\Leftrightarrow a \in L_p \cap L_q. \end{aligned}$$

c) $L_{\neg p} = X \setminus L_p$, sillä

$$\begin{aligned} a \in L_{\neg p} &\Leftrightarrow a \in \{\, x \in X \mid \neg p(x) \,\} \\ &\Leftrightarrow \neg p(a) \\ &\Leftrightarrow a \notin \{\, x \in X \mid p(x) \,\} \\ &\Leftrightarrow a \notin L_p \\ &\Leftrightarrow a \in \overline{L_p} = X \setminus L_p. \end{aligned}$$

d) Oletetaan, että $p(x) \Rightarrow q(x)$ aina, kun $x \in X$. Jos nyt $a \in L_p$, niin $p(a)$ on tosi. Oletuksesta seuraa, että tällöin myös $q(a)$ on tosi, joten $a \in L_q$. Siis $L_p \subseteq L_q$.

Oletetaan sitten, että $L_p \subseteq L_q$. Valitaan mielivaltainen $a \in X$. Jos $p(a)$ on tosi, niin $a \in L_p$, jolloin oletuksen mukaan $a \in L_q$. Siis myös $q(a)$ on tosi. Täten $p(x) \Rightarrow q(x)$ aina, kun $x \in X$. (Jos $p(a)$ on epätosi, niin implikaatio $p(a) \Rightarrow q(a)$ on triviaalisti tosi.)

e) Oletetaan, että $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ aina, kun $x \in X$. Tällöin

$$x \in L_p \Leftrightarrow p(x) \Leftrightarrow q(x) \Leftrightarrow x \in L_q.$$

Siis $L_p = L_q$.

Oletetaan sitten, että $L_p = L_q$ eli että $\{\, x \in X \mid p(x) \,\} = \{\, x \in X \mid q(x) \,\}$. Tällöin $p(x)$ on tosi, jos ja vain jos $q(x)$ on tosi, eli $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ aina, kun $x \in X$.

135. **a)** Yhtälö $\mathcal{P}(A\cup B) = \mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$ ei ole yleisesti voimassa. Olkoon esimerkiksi $A = \{1\}$ ja $B = \{2\}$. Tällöin $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}\big\}$, $\mathcal{P}(B) = \big\{\emptyset, \{2\}\big\}$ ja

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\} \neq \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\big\} = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

b) Yhtälö $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ on yleisesti voimassa, sillä

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{P}(A \cap B) &\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \subseteq A \wedge x \subseteq B \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \mathcal{P}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

136. Jos $A_k = \left]0, \frac{1}{k}\right[$, niin

a) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k =]0,1[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \cdots \cup \left]0, \frac{1}{n}\right[=]0,1[$,

b) $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k =]0,1[\cap \left]0, \frac{1}{2}\right[\cap \cdots \cap \left]0, \frac{1}{n}\right[= \left]0, \frac{1}{n}\right[$,

c) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k =]0,1[$,

d) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \left]0, \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}\right[=]0,0[= \emptyset$.

144. **a)** Kun $A = \{1,2\}$ ja $B = \{a,b\}$, niin $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$.

b) Kun $A = \big\{1,\{2\}\big\}$ ja $B = \big\{\{a\},b\big\}$, niin $A \times B = \big\{(1,\{a\}),(1,b),(\{2\},\{a\}),(\{2\},b)\big\}$.

146. Yhtälö $\big(x,(y,z)\big) = \big((x,y),z\big)$ ei ole yleisesti voimassa, sillä määritelmän mukaan

$$\big(x,(y,z)\big) = \big\{\{x\},\{x,(y,z)\}\big\} = \Big\{\{x\},\Big\{x,\big\{\{y,\},\{y,z\}\big\}\Big\}\Big\}$$

ja

$$\big((x,y),z\big) = \big\{\{(x,y)\},\{(x,y),z\}\big\} = \Big\{\Big\{\big\{\{x\},\{x,y\}\big\}\Big\},\Big\{\big\{\{x\},\{x,y\}\big\},z\Big\}\Big\}.$$

149. Olkoon esimerkiksi $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ ja $C = \{3\}$. Tällöin

$$A \cup (B \times C) = \{1,(2,3)\} \qquad \text{ja} \qquad (A \cup B) \times (A \cup C) = \{1,2\} \times \{1,3\}.$$

151. **a)** Joukot eivät ole samat: Olkoon $X = \{1,2\}$, $A = \emptyset$, $B = \{1\}$ ja $C = D = \{2\}$. Siis $A,B,C,D \in \mathcal{P}(X)$. Nyt

$$\begin{aligned} (A \times B) \cup (C \times D) &= \emptyset \cup \{(2,2)\} = \{(2,2)\}, \\ (A \cup C) \times (B \cup D) &= \{2\} \times \{1,2\} = \{(2,1),(2,2)\}. \end{aligned}$$

b) Yhtälö $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ on yleisesti voimassa, sillä

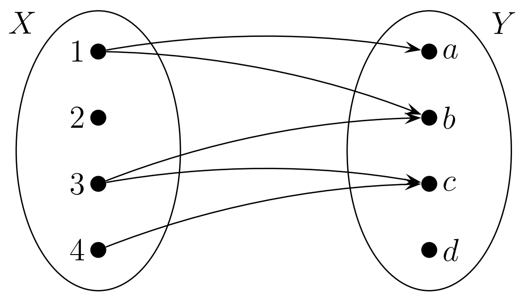
$$\begin{aligned}(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in C \times D \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in C \wedge y \in D \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \wedge y \in B \cap D \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D).\end{aligned}$$

c) Olkoon $X = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$ ja $B = \{2\}$. Nyt

$$\overline{(A \times B)} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\} \qquad \text{ja} \qquad \overline{A} \times \overline{B} = \{(2, 1)\}.$$

Siis $\overline{(A \times B)} \neq \overline{A} \times \overline{B}$.

153. **a)** Nuolikuvio:



Matriisi:

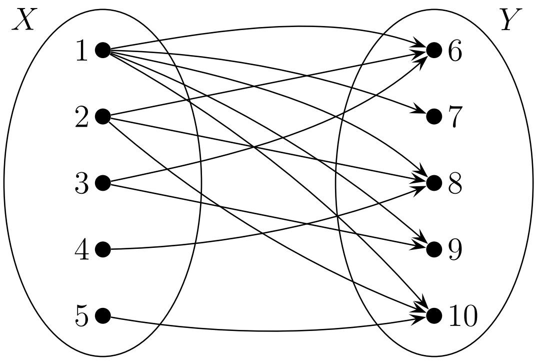
	a	b	c	d
1	1	1	0	0
2	0	0	0	0
3	0	1	1	0
4	0	0	1	0

b) Relaation lähtöjoukko on X, maalijoukko on Y, määrittelyjoukko on $\{1, 3, 4\}$ ja arvojoukko on $\{a, b, c\}$.

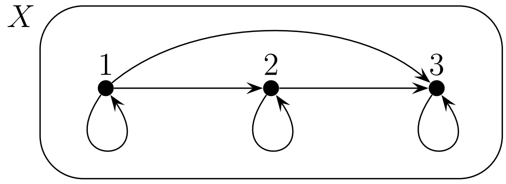
155. **a)** Esimerkin 60 relaatio matriisina:

	Abraham	Ismael	Iisak	Jaakob	Joosef	Efraim	Manasse
Abraham	0	1	1	0	0	0	0
Ismael	0	0	0	0	0	0	0
Iisak	0	0	0	1	0	0	0
Jaakob	0	0	0	0	1	0	0
Joosef	0	0	0	0	0	1	1
Efraim	0	0	0	0	0	0	0
Manasse	0	0	0	0	0	0	0

b) Esimerkin 61 relaatio nuolikuviona:



c) Esimerkin 62 relaatio polkukuviona, kun $X = \{1, 2, 3\}$:



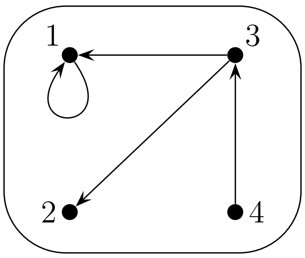
158. $R = \{(1, \{1\}), (1, \{1, 2\}), (1, \{1, 3\}), (1, X), (2, \{2\}), (2, \{1, 2\}), (2, \{2, 3\}), (2, X), (3, \{3\}), (3\{1, 3\}), (3, \{2, 3\}), (3, X)\}$.

161. **a)** $R \circ S = \{(a, d), (a, c)\}$,

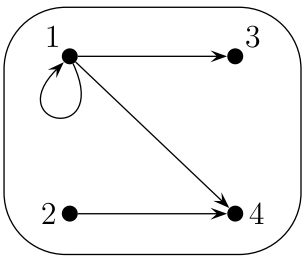
b) $R^{-1} = \{(a, a), (b, a), (d, b)\}$,

c) $S^2 = \{(b, b), (c, c), (c, d)\}$.

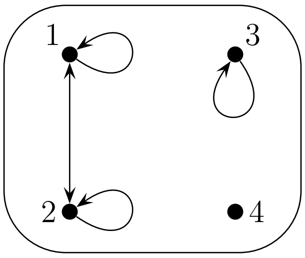
162. **a)** R^{-1}



b) R^2



c) $R \circ R^{-1}$



165. **a)** Oikein: Olkoon $R^{-1} = S^{-1}$. Valitaan mielivaltainen $(x, y) \in R$. Siis $(y, x) \in R^{-1}$, joten oletuksen mukaan $(y, x) \in S^{-1}$. Nyt $(x, y) \in S$, eli $R \subseteq S$. Vastaavasti saadaan $R \supseteq S$.

b) Väärin: Olkoon $S = \{(3, 4), (4, 2)\} \neq \{(3, 1), (1, 2)\} = R$. Kuitenkin $S \circ S = \{(3, 2)\} = R \circ R$.

167. **a)** Koska

$$(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R,$$

niin $R = (R^{-1})^{-1}$.

b) Koska

$$\begin{aligned}(x, y) \in (R \circ S)^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in R \circ S \\ &\Leftrightarrow \exists z \in Y : (y, z) \in R \wedge (z, x) \in S \\ &\Leftrightarrow \exists z \in Y : (x, z) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1},\end{aligned}$$

niin $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

168. **a)** Koska

$$\begin{aligned}(x, y) \in (R \cup S)^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in R \cup S \\ &\Leftrightarrow (y, x) \in R \vee (y, x) \in S \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \vee (x, y) \in S^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \cup S^{-1},\end{aligned}$$

niin $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

b) Koska

$$\begin{aligned}(x, y) \in (R \cap S)^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in R \cap S \\ &\Leftrightarrow (y, x) \in R \wedge (y, x) \in S \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in S^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1},\end{aligned}$$

niin $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

170. *Oletus.* $R, S \subseteq X \times X$ ja $R \subseteq S$. *Väitös.* $R^n \subseteq S^n$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}$.

Todistus.

i) Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Tapauksessa $n = 0$ on $R^0 = S^0 = I$, joten $R^0 \subseteq S^0$. Induktio-oletus: $R^k \subseteq S^k$. Valitaan mielivaltainen $(x, y) \in R^{k+1} = R^k \circ R$. Siis on olemassa sellainen $z \in X$, että $(x, z) \in R^k$ ja $(z, y) \in R$. Täten induktio-oletuksen ja alkuperäisen oletuksen mukaan $(x, z) \in S^k$ ja $(z, y) \in S$, eli $(x, y) \in S^k \circ S$. Siis $R^{k+1} \subseteq S^{k+1}$.

Induktioperiaatteen mukaan väitös on tosi, kun $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

ii) Oletuksesta seuraa, että $R^{-1} \subseteq S^{-1}$ (lause 15.2). Merkitään $R' = R^{-1}$ ja $S' = S^{-1}$ ja osoitetaan, että $(R')^n \subseteq (S')^n$, kun $n \in \mathbb{Z}_+$. Tämä palautuu kohtaan i), joten väitös on tosi myös kun $n \in \mathbb{Z}_-$.

183. **a)** $R = \emptyset \quad (\text{tai } \{(a, a)\})$,

b) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b)\}$,

c) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$.

187. **a)** *Oletus.* $R \subseteq X^2$. *Väitös.* R on refleksiivinen, jos ja vain jos $I \subseteq R$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $(a, a) \in R$ aina, kun $a \in X$. Valitaan mielivaltainen $(x, x) \in I$. Nyt $(x, x) \in R$, sillä $x \in X$. Siis $I \subseteq R$.

Oletetaan sitten, että $I \subseteq R$. Jos R olisi ei-refleksiivinen, niin olisi olemassa sellainen $a \in X$, että $(a, a) \notin R$, jolloin olisi $I \nsubseteq R$. Siis R on refleksiivinen.

b) *Väitös.* Relaatio R on irrefleksiivinen, jos ja vain jos $I \cap R = \emptyset$.

Todistus. Oletetaan ensin, että R on irrefleksiivinen. Siis ei ole olemassa sellaista $a \in X$, jolla $(a, a) \in R$. Koska $I = \{\, (a, a) \mid a \in X \,\}$, niin $I \cap R = \emptyset$.

Oletetaan sitten, että $I \cap R = \emptyset$. Jos R ei olisi irrefleksiivinen, niin olisi olemassa sellainen $(x, x) \in X^2$, jolla $(x, x) \in R$, jolloin olisi $(x, x) \in R \cap I \neq \emptyset$. Siis R on irrefleksiivinen.

188. **a)** *Väitös.* Relaatio R on symmetrinen, jos ja vain jos $R = R^{-1}$.

Todistus. Oletetaan ensin, että R on symmetrinen. Tällöin

$$(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R \overset{\text{symm.}}{\Leftrightarrow} (x, y) \in R.$$

Siis $R = R^{-1}$.

Oletetaan sitten, että $R = R^{-1}$ ja $(x, y) \in R$. Nyt $(x, y) \in R^{-1}$ eli $(y, x) \in R$. Siis R on symmetrinen.

b) *Väitös.* Relaatio R on vertailullinen, jos ja vain jos $R \cup R^{-1} = X \times X$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $(x,y) \in R \vee (y,x) \in R$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin

$$\begin{aligned}(x,y) \in X \times X &\Leftrightarrow x \in X \wedge y \in X \\ &\overset{\text{oletus}}{\Leftrightarrow} (x,y) \in R \vee (y,x) \in R \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in R \vee (x,y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in R \cup R^{-1}.\end{aligned}$$

Siis $R \cup R^{-1} = X \times X$.

Oletetaan sitten, että $R \cup R^{-1} = X \times X$. Valitaan mielivaltaiset $x, y \in X$. Siis oletuksen mukaan $(x,y) \in R \cup R^{-1}$, joten $(x,y) \in R \vee (y,x) \in R$ eli R on vertailullinen.

191. **a)** $r(R) = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(0,1),(1,2),(2,0),(3,0)\}$,

b) $s(R) = R \cup \{(1,0),(2,1),(0,2),(0,3)\}$,

c) $t(R) = R \cup \{(0,2),(0,0),(1,0),(2,1),(3,1),(3,2)\}$.

192. *Oletus.* $R \subseteq X^2$. *Väitös.* Relaatio R on refleksiivinen (symmetrinen, transitiivinen), jos ja vain jos $R = r(R)$ ($R = s(R)$, $R = t(R)$).

Todistus. Merkitään $R' = r(R)$ ($R' = s(r)$, $R' = t(T)$). Oletetaan ensin, että R on refleksiivinen (symmetrinen, transitiivinen). Koska

1. R on refleksiivinen (symmetrinen, transitiivinen),
2. $R \subseteq R$,
3. $R \subseteq S$ aina, kun S on refleksiivinen (symmetrinen, transitiivinen) ja $R \subseteq S$,

niin sulkeuman määritelmän mukaan $R = R'$.

Oletetaan sitten, että $R = R'$. Koska R' on refleksiivinen (symmetrinen, transitiivinen), niin R on refleksiivinen (symmetrinen, transitiivinen).

193. *Oletus.* Relaatio R' on R:n refleksiivinen (symmetrinen, transitiivinen) sulkeuma. *Väitös.* Relaatio R' on yksikäsitteinen.

Todistus. Oletetaan, että R' ja R'' ovat molemmat R:n refleksiivisiä sulkeumia. Sulkeuman määritelmän ehdon 3) mukaan

(i) $$R' \subseteq S, \text{ kun } S \text{ on refleksiivinen ja } R \subseteq S$$

ja

(ii) $$R'' \subseteq S, \text{ kun } S \text{ on refleksiivinen ja } R \subseteq S.$$

Määritelmän ehtojen 1) ja 2) mukaan R' ja R'' ovat refleksiivisiä, $R \subseteq R'$ ja $R \subseteq R''$. Siispä (i):n mukaan $R' \subseteq R''$ ja (ii):n mukaan $R'' \subseteq R'$, joten $R' = R''$.

203. **a)** 4 kpl ($\heartsuit$, $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$), **b)** 13 kpl (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A).

205. **a)** $X/\!\sim\, = \big\{ \{a\} \bigm| a \in X \big\}$, **b)** $X/\!\sim\, = \{X\}$.

206. **a)** R ei ole transitiivinen, sillä $(3,2),(2,1) \in R$, mutta $(3,1) \notin R$.

b) $R \cup \{(1,3),(3,1)\}$ on ekvivalenssi.

221. **a)** Osittainen järjestys. **b)** Ei kumpikaan.

c) Ei kumpikaan. **d)** Osittainen järjestys.

e) Osittainen järjestys. **f)** Ei kumpikaan.

224. **a)** Relaatio $\prec$ ei ole transitiivinen, sillä $3 \prec 4$ ja $4 \prec 1$, mutta $3 \not\prec 1$.

b) Ei voi täydentää tiukaksi järjestykseksi.

228. **a)** Määritellään kaikille $x_i, y_i \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3) \preceq (y_1,y_2,y_3) \Leftrightarrow x_1 < y_1 &\vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2)\\ &\vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 \le y_3).\end{aligned}$$

b) Määritellään kaikille $x, y \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}x \preceq y \Leftrightarrow{}& (x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}^2) \vee (x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}^3)\\ &\vee (x \in \mathbb{R}^2 \wedge y \in \mathbb{R}^3) \vee (x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\colon x \le y)\\ &\vee \big(x \in \mathbb{R}^2 \wedge y \in \mathbb{R}^2\colon [x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \le y_2)]\big)\\ &\vee \big(x \in \mathbb{R}^3 \wedge y \in \mathbb{R}^3\colon \text{(kuten a-kohdassa)}\big).\end{aligned}$$

c) Määritellään kaikille $i \in \{1, \ldots n\}$ ja kaikille $x_i, y_i \in X_i$:

$$\begin{aligned}&(x_1,x_2,\ldots,x_n) \preceq (y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ \Leftrightarrow{}& x_1 \prec_1 y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \prec_2 y_2) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 \prec_3 y_3) \vee \cdots\\ &\vee (x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n \preceq_n y_n),\end{aligned}$$

missä $\prec_i$ on järjestetyn joukon X_i järjestys.

234. Oletetaan, että $Q \subseteq X^2$ on vertailullinen ja transitiivinen relaatio, $xEy \Leftrightarrow xQy \wedge yQx$ ja $xPy \Leftrightarrow \neg yQx$.

a) *Väitös.* E on ekvivalenssi.

Todistus. Koska Q on vertailullinen, niin xEx, jokaisella $x \in X$. Siis E on refleksiivinen.

Oletetaan, että xEy. Määritelmän mukaan yQx ja xQy eli yEx. Siis E on symmetrinen.

Oletetaan, että xEy ja yEz. Siis xQy, yQx, yQz ja zQy, joten Q:n transitiivisuuden takia xQz ja zQx eli xEz. Täten E on transitiivinen.

b) *Väitös.* P on transitiivinen ja asymmetrinen.

Todistus. Oletetaan, että xPy ja yPz. Siis $\neg yQx$ ja $\neg zQx$. Koska Q on vertailullinen, niin xQy ja yQz, joten xQz. Jos olisi zQx, niin saataisiin yQx. Siis $\neg zQx$ eli xPz. Tätän P on transitiivinen.

Oletetaan, että xPy eli $\neg yQx$. Koska Q on vertailullinen, niin $\neg(\neg xQy)$. Siis $\neg yPx$ eli P on asymmetrinen.

c) *Väitös.* Aina, kun $x, y \in X$, niin joko xEy, xPy tai yPx.

Todistus. Valitaan mielivaltaiset $x, y \in X$. Koska Q on vertailullinen, niin $xQy \vee yQx$. Siis joko

- $xQy \wedge yQx$, jolloin xEy, tai
- $xQy \wedge \neg yQx$, jolloin xPy, tai
- $\neg xQy \wedge yQx$, jolloin yPx.

Täten ainakin yksi vaihtoehdoista xEy, xPy tai yPx pätee. Lisäksi

- Jos xEy, niin $\neg xPy$ ja $\neg yPx$.
- Jos xPy, niin $\neg xEy$ ja $\neg yPx$ (asymmetrisyys).
- Jos yPx, niin $\neg xEy$ ja $\neg xPy$ (asymmetrisyys).

Täten korkeintaan yksi vaihtoehdoista xEy, xPy tai yPx pätee.

d) *Oletus.* xEy. *Väitös.* $xQz \Leftrightarrow yQz$.

Todistus. Oletuksen mukaan xQy ja yQx. Jos xQz, niin yQz transitiivisuuden takia. Samoin jos yQz, niin xQz.

241. **a)** Ei ole kuvaus. **b)** Ei. **c)** On. **d)** Ei.

244. **a)** $f([1,2]) = [1,4]$, **b)** $f([-2,3]) = [0,9]$,
c) $f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$, **d)** $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$,
e) $f^{-1}([-4,-1]) = \emptyset$, **f)** $f^{-1}([-4,4]) = [-2,2]$,
g) $A_f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

248. Lauseen 26 todistus.

(4).
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow x \in \{\, x \mid f(x) \in B_1 \cap B_2 \,\} \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Siis $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(6). Valitaan $y \in f(f^{-1}(B))$. Siis $y = f(x)$, missä $x \in f^{-1}(B) = \{\, x \mid f(x) \in B \,\}$. Täten $y \in B$. Siis $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

255. **a)** Ei ole voimassa: Olkoon $X = Y = \{1,2\}$ ja $f(1) = f(2) = 2$. Nyt $\{1\}, \{2\} \subseteq \{1,2\}$, mutta $f(\{1\} \setminus \{2\}) = \{2\}$ ja $f(\{1\}) \setminus f(\{2\}) = \emptyset$.

b) On voimassa:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Leftrightarrow x \in \{\, x \mid f(x) \in B_1 \setminus B_2 \,\} \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \notin B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \notin f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

262. **a)** Ei ole injektio eikä surjektio.

b) On injektio ja surjektio.

c) On injektio, muttei surjektio.

d) Ei ole injektio eikä surjektio (eikä funktio).

266. **a)** $\{(1,a),(2,b)\}$, $\{(1,b),(2,a)\}$, $\{(1,c),(2,a)\}$, $\{(1,c),(2,b)\}$, $\{(1,a),(2,c)\}$, $\{(1,b),(2,c)\}$.

b) $\{(1,a),(2,b),(3,b)\}$, $\{(1,a),(2,a),(3,b)\}$, $\{(1,a),(2,b),(3,a)\}$, $\{(1,b),(2,b),(3,a)\}$, $\{(1,b),(2,a),(3,a)\}$, $\{(1,b),(2,a),(3,b)\}$.

c) $\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$, $\{(1,c),(2,b),(3,a)\}$, $\{(1,b),(2,c),(3,a)\}$, $\{(1,b),(2,a),(3,c)\}$, $\{(1,a),(2,c),(3,b)\}$, $\{(1,c),(2,a),(3,b)\}$.

269. **a)** Olkoon $f(x) = x$ ja $g(x) = -x$. Nyt $h(x) = f(x) + g(x) = 0$, joka ei ole bijektio.

b) Triviaalisti jos $f = g$. Myös jos f ja g ovat aidosti kasvavia (tai väheneviä). Tällöin f ja g ovat jatkuvia, joten $f + g$ on aidosti kasvava määrittelyjoukossaan. Siis $f + g$ on injektio (lause 27). Koska f ja g ovat aidosti kasvavia ja $f + g$ on jatkuva, niin $(f + g)(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$ ja $(f + g)(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$. Siis $f + g$ on surjektio (lause 28).

276. Oletetaan ensin, että kaikilla $A_1, A_2 \subseteq X$ on $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$. Olkoot $x, y \in X$ ja $x \neq y$. Nyt

$$f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\emptyset) = \emptyset \overset{\text{oletus}}{=} f(\{x\}) \cap f(\{y\}).$$

Jos olisi $f(x) = f(y)$, niin olisi $f(\{x\}) \cap f(\{y\}) \neq \emptyset$. Siis täytyy olla $f(x) \neq f(y)$, joten f on injektio.

Oletetaan sitten, että f on injektio. Valitaan mielivaltaiset $A_1, A_2 \subseteq X$. Olkoon ensin $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Siis on olemassa sellaiset $x_1 \in A_1$ ja $x_2 \in A_2$, että $y = f(x_1)$ ja $y = f(x_2)$. Koska f on injektio, niin $x_1 = x_2 = x \in A_1 \cap A_2$. Siis $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Täten $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$. Olkoon sitten $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Siis on olemassa sellainen $x \in A_1 \cap A_2$, että $y = f(x)$. Koska nyt $x \in A_1$ ja $x \in A_2$, niin $y = f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Täten $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

281. **c)** Oletetaan, että $ax_1 + b = ax_2 + b$. Siis $x_1 = x_2$, joten f on injektio. Valitaan mielivaltainen $y \in \mathbb{R}$. Koska $(y-b)/a \in \mathbb{R}$ ja $f((y-b)/a) = y$, niin f on surjektio. Käänteiskuvaus $f^{-1}(x) = (x-b)/a$.

a) Kohdan c mukaan funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f(x) = 2x$ on bijektio. Käänteiskuvaus $f^{-1}(x) = x/2$.

b) Kohdan c mukaan funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f(x) = 3x + 4$ on bijektio. Käänteiskuvaus $f^{-1}(x) = (x-4)/3$.

288. **a)** $(f \circ g)(x) = 6x, \quad (g \circ f)(x) = 6x.$

b) $(f \circ g)(x) = x^6, \quad (g \circ f)(x) = x^6.$

c) $(f \circ g)(x) = mnx, \quad (g \circ f)(x) = nmx.$

d) $(f \circ g)(x) = x^{nm}, \quad (g \circ f)(x) = x^{mn}.$

296. *Todistus.* Olkoon $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ eli $g(f(x)) = g(f(y))$. Koska g on injektio, niin $f(x) = f(y)$, josta f:n injektiivisyyden takia seuraa $x = y$. Siis $g \circ f$ on injektio.

Valitaan mielivaltainen $z \in Z$. Koska f ja g ovat surjektioita, niin on olemassa sellaiset $y \in Y$ ja $x \in X$, että $g(y) = z$ ja $f(x) = y$. On siis olemassa sellainen $x \in X$, että $g(f(x)) = z$, joten $g \circ f$ on surjektio.

Ei voi osoittaa lievemmillä oletuksilla bijektioksi.

303. **a)** Olkoon $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}_+\colon f(x) = 1/(x-a) - 1/(b-a)$. Koska f on bijektio, niin $]a,b[\ \sim \mathbb{R}_+$.

b) Olkoon $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}\colon$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{(a+b)/2 - a}, & \text{jos } x \leq \dfrac{a+b}{2}; \\[2ex] \dfrac{1}{x-b} - \dfrac{1}{(a+b)/2 - b}, & \text{jos } x > \dfrac{a+b}{2}. \end{cases}$$

Koska f on bijektio, niin $]a,b[\ \sim \mathbb{R}$.

c) Koska $\sim$ on ekvivalenssirelaatio, niin $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}_+$ seuraa a- ja b-kohdista.

309. *Todistus.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Oletaan, että on olemassa bijektio $f\colon A \to B' \subseteq B$. Selvästi f on injektio $A \to B$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Oletetaan, että on olemassa injektio $f\colon A \to B$. Siis f^{-1} on surjektio $f(A) \to A$. Olkoon $a \in A \neq \emptyset$ ja $g\colon B \to A$ sellainen, että

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & \text{jos } x \in f(A); \\ a, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Nyt g on surjektio $B \to A$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Oletetaan, että on olemassa surjektio $f\colon B \to A$. Nyt f^{-1} ei ole välttämättä funktio. Voidaan kuitenkin valita[1] sellainen funktio $g^{-1} \subseteq f^{-1}$, että $M_{g^{-1}} = M_{f^{-1}} = A$. Olkoon $B' = A_{g^{-1}} \subseteq B$. Tällöin $f(B') = A$ ja koska g^{-1} on kuvaus, niin $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ kaikilla $x, y \in B'$. Siis funktio $g\colon B' \to A\colon g(x) = f(x)$ on injektio ja surjektio. Täten $A \sim B'$, missä $B' \subseteq B$.

311. **a)** Olkoot joukot A_1 ja A_2 numeroituvia. Merkitään $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots\}$, missä $i \in \{1, 2\}$. Muodostetaan tulojoukon $A_1 \times A_2$ alkioista seuraava taulukko:

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & & \dots \\ \hline
a_{21} & (a_{11},a_{21}) & \rightarrow & (a_{12},a_{21}) & & (a_{13},a_{21}) & \rightarrow & (a_{14},a_{21}) & & \dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{22} & (a_{11},a_{22}) & & (a_{12},a_{22}) & & (a_{13},a_{22}) & & (a_{14},a_{22}) & & \dots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
a_{23} & (a_{11},a_{23}) & & (a_{12},a_{23}) & & (a_{13},a_{23}) & & \dots & & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
a_{24} & (a_{11},a_{24}) & & (a_{12},a_{24}) & & \dots & & & & \\
 & \downarrow & \nearrow & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Järjestetään tulojoukon alkiot jonoon nuolten osoittamassa järjestyksessä. Muodostuvassa jonossa tulojoukon $A_1 \times A_2$ jokainen alkio esiintyy täsmälleen kerran. Siis joukko $A_1 \times A_2$ on numeroituva.

b) Olkoot joukot A_1, A_2, $\dots$, A_n numeroituvia. Oletetaan, että joukko $A_1 \times \cdots \times A_k$ $(k < n)$ on numeroituva. Merkitään $A_1 \times \cdots \times A_k = B$. Vastaavasti kuin a-kohdassa voidaan osoittaa, että joukko $B \times A_{k+1} = (A_1 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$ on numeroituva. Selvästi $(A_1 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1} \sim A_1 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}$. Täten tehtävän a-kohdan ja induktioperiaatteen nojalla joukko $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ on numeroituva.

312. Jos jokin $A_k = \emptyset$, niin $A_1 \times A_2 \times \cdots$ on numeroituva (tyhjä joukko). Oletetaan seuraavassa, että mikään joukoista A_k ei ole tyhjä.

Väitös. Jos vähintään kaksi alkiota sisältäviä joukkoja A_k on vain äärellinen määrä, niin joukko $A_1 \times A_2 \times \cdots$ on numeroituva.

Todistus. Olkoon joukoissa A_1, $\dots$, A_n vähintään kaksi alkiota ja joukoissa $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$ yksi alkio. Tehtävän 311 b-kohdan ratkaisun perusteella joukko $A_1 \times \cdots \times A_n$ on numeroituva. On helppo havaita (totea), että nyt $A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1} \times \cdots \sim A_1 \times \cdots \times A_n$. Täten myös joukko $A_1 \times A_2 \times \cdots$ on numeroituva.

[1] Joukko-opin valinta-aksiooma: Jokaista relaatiota R kohti on olemassa funktio $H \subseteq R$, jolla $M_R = M_H$.

Väitös. Jos vähintään kaksi alkiota sisältäviä joukkoja A_k on äärettömän monta, niin joukko $A_1 \times A_2 \times \cdots$ on ylinumeroituva.

Todistus. Olkoot B_1, $B_2, \ldots$ ne joukoista A_k, joissa on vähintään kaksi alkiota. On selvää, että $B_1 \times B_2 \times \cdots \sim A_1 \times A_2 \times \cdots$. Oletetaan, että joukko $B_1 \times B_2 \times \cdots$ on numeroituva ja että sen alkiot lueteltuina ovat

$$\begin{gathered}(b_{11}, b_{12}, b_{13}, \ldots),\\ (b_{21}, b_{22}, b_{23}, \ldots),\\ (b_{31}, b_{32}, b_{33}, \ldots),\\ \vdots\end{gathered}$$

Muodostetaan alkio $(y_1, y_2, \ldots) \in B_1 \times B_2 \times \cdots$ siten, että $y_i \neq b_{ii}$ kaikilla $i \geq 1$. (Näin voidaan tehdä, sillä jokaisessa joukossa B_i on vähintään kaksi alkiota, jolloin y_i:ksi voidaan valita eri alkio kuin b_{ii}.) Tällöin $(y_1, y_2, \ldots)$ ei ole mukana em. luettelossa, joten oletus joukon $B_1 \times B_2 \times \cdots$ numeroituvuudesta oli väärä. Siis joukko $A_1 \times A_2 \times \cdots$ on tässä tapauksessa ylinumeroituva.

323. Rekisteritunnuksia on $29^3 \cdot 10^3 = 24\,389\,000$ kpl, jos kaikkia kirjaimia ja numeroita saa käyttää.

327. **a)** Todennäköisyys on $\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}$, jos n on parillinen, ja $\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2}$, jos n on pariton.

b) Kun $n \to \infty$, niin $\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \to 0$ ja $\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \to 0$.

330. Kaikkien vaihtoehtojen läpi käyminen kestää $15! \cdot 0{,}01\, s \approx 414{,}7$ vuotta.

341. **a)** Erilaisia tapoja on $\binom{25}{4} = 12\,650$.

b) Erilaisia tapoja on $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600$.