

1. Kuinka monta solmua ja kuinka monta särmää on graafissa  
(a)  $K_{m,n}$       (b)  $C_n$       (c)  $W_n$ ?
2. Olkoon  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Anna esimerkki kahdesta keskenään ei-isomorfisesta (siis erilaisesta) graafista  $G = (V, E)$  ja  $G' = (V, E')$ , jotka ovat molemmat 3-säännöllisiä. Onko tällaisia graafeja  $G$  ja  $G'$  olemassa, jos solmujen joukossa  $V$  on vähemmän kuin 6 alkiota?
3. Olkoot  $m, n > 0$ . Osoita, että graafissa  $K_{m,n}$  on vähemmän särmää kuin sen komplementtigräafissa  $\overline{K}_{m,n}$ .
4. Kuinka monta aligraafia on graafilla  
(a)  $K_{2,3}$       (b)  $C_5$ ?
5. Osoita, että graafilla  $K_n$  on täsmälleen

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^{\binom{i}{2}} - 1$$

eri aligraafia. (Esimerkki 1.10 luentomonisteesta.)

6. Osoita, että jokaisella graafilla  $G$  pätee:  $\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$ . Osoita myös, että  $\delta(G) = \frac{2|E|}{|V|}$  jos ja vain jos  $\frac{2|E|}{|V|} = \Delta(G)$ .
7. Onko olemassa suunnattua graafia  $G = (V, E)$ , missä  $V = \{a, b, c, d\}$  ja lähtö- ja tuloasteet ovat  
(a)  $\deg^+(a) = \deg^+(b) = \deg^+(c) = \deg^+(d) = 2$  sekä  $\deg^-(a) = 0$ ,  $\deg^-(b) = \deg^-(c) = 3$  ja  $\deg^-(d) = 2$   
(b)  $\deg^+(a) = 0$ ,  $\deg^+(b) = 1$ ,  $\deg^+(c) = 2$ ,  $\deg^+(d) = 3$  sekä  $\deg^-(a) = 3$ ,  $\deg^-(b) = 2$ ,  $\deg^-(c) = 1$ ,  $\deg^-(d) = 0$   
(c)  $\deg^+(a) = \deg^+(b) = \deg^+(c) = \deg^+(d) = 2$  sekä  $\deg^-(a) = 3$ ,  $\deg^-(b) = 2$ ,  $\deg^-(c) = 1$ ,  $\deg^-(d) = 0$   
Jos on, anna esimerkki graafista  $G$ ; jos ei ole, perustele miksi ei.

8. Todista, että Ramseyn luku  $R(3, 3)$  on 6.

Vihje: Monisteen Lauseen 1.4 perusteella  $R(3, 3) \leq 6$ , joten riittää antaa esimerkkigraafi, joka osoittaa, että  $R(3, 3) > 5$ .