

Piirrä kuvat kaikista graafeista tehtävissä 1, 2, 3, 6 ja 7!

1. Olkoot  $G = (V, E)$  ja  $H = (W, F)$  graafeja, missä  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  
 $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$ ,  $W = \{3, 4, 5, 6\}$  ja  
 $F = \{\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$ . Määritä graafit  $G \cup H$ ,  $G \cap H$  ja  $G \oplus H$ .
2. Olkoon  $G = (V, E)$  kuten tehtävässä 1, ja olkoot  $u = 1$ ,  $v = 4$ ,  $e = \{2, 3\}$  ja  
 $f = \{1, 4\}$ . Määritä graafit  $G - u$ ,  $G - v$ ,  $G - e$ ,  $G + f$  ja  $G - u - v - e$ .
3. Olkoon  $G = (V, E)$  kuten tehtävässä 1. Määritä yksinkertainen graafi, joka  
saadaan  $G$ :stä
  - (a) yhdistämällä solmut 2 ja 5;
  - (b) kutistamalla särmä  $\{1, 3\}$ .
4. Olkoon  $G = (V, E)$  kuten tehtävässä 1. Anna  $G$ :n vierusmatriisi ja tapausmat-  
riisi. Laske Lauseen 2.1 avulla, kuinka monta 3-särmäistä polkua on solmusta  
1 solmuun 4.
5. Olkoot  $G_1 = (V, E_1)$ ,  $G_2 = (V, E_2)$  ja  $G_3 = (V, E_3)$  graafeja, missä  $V =$   
 $\{1, \dots, 10\}$ ,  $E_1 = \{\{i, j\} \mid |i - j| \text{ on parillinen}\}$ ,  
 $E_2 = \{\{i, j\} \mid |i - j| \text{ on pariton}\}$ , ja  $E_3 = \{\{i, j\} \mid |i - j| \leq 2\}$ .  
Osoita, että  $G_1$ ,  $G_2$  ja  $G_3$  ovat kaikki keskenään ei-isomorfisia.
6. Olkoon  $G = (V, E)$  kuten tehtävässä 1. Määritä kaikki suorat polut solmusta  
1 solmuun 5.
7. Olkoon  $G = (V, E)$  kuten tehtävässä 1. Muodosta  $G$ :stä suunnattu graafi  
 $G^*$  korvaamalla kukin särmä  $\{u, v\}$  jommalla kummalla suunnatulla särmällä  
 $(u, v)$  tai  $(v, u)$  s.e.
  - (a)  $G^*$  on vahvasti yhtenäinen,
  - (b)  $G^*$  on kvasivahvasti yhtenäinen, mutta ei vahvasti yhtenäinen.
8. Olkoon  $G = (V, E)$  graafi, jossa on  $n$  solmua. Oletetaan, että jokaisella sol-  
mulla  $u \in V$  ja jokaisella  $1 \leq i \leq 5$  pätee:  $|\{v \in V \mid d(u, v) = i\}| \geq \frac{n-1}{10}$ .  
Osoita, että  $G$  on yhtenäinen.  
Tässä  $d(u, v)$  on lyhimmän polun  $p : u \rightarrow v$  pituus.  
(Vihje: vertaa Lause 2.6.)