

Piirrä kuvat kaikista graafeista tehtävissä 1, 4, 5, 6 ja 7!

1. Anna esimerkki graafista, jossa on n solmua, m särmää ja k komponenttia, kun

(a) $n = 6$, $m = 7$ ja $k = 2$ (b) $n = 7$, $m = 10$ ja $k = 3$

(c) $n = 8$, $m = 6$ ja $k = 4$

2. Osoita, että jos G on yhtenäinen n -solmuinen graafi, niin siinä on vähintään $n - 1$ särmää.

(Vihje: induktiolla luvun n suhteen.)

3. Olkoon $G = (V, E)$ yksinkertainen graafi. Määritellään joukossa V relaatio

$$u \sim v \iff \text{on olemassa polku } p : u \rightarrow v.$$

Osoita, että \sim on ekvivalenssirelaatio. Mitä ovat relaation \sim ekvivalenssiluokat?

4. Osoita, että n -solmuisen yksinkertaisen graafin G nulliteetille pätee ehto:

$$0 \leq \mu(G) \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

Anna esimerkit 5-solmuisten graafeista, joilla nämä rajat saavutetaan.

5. Olkoon $G = (V, E)$ graafi, missä $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ ja $E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{c, i\}, \{c, j\}, \{d, f\}, \{d, k\}, \{e, g\}, \{f, h\}, \{f, k\}, \{h, k\}, \{h, l\}, \{i, j\}, \{k, l\}\}$.

Määritä graafin G irrotussolmut ja lohkot.

6. Olkoon G kuten tehtävässä 5. Määritä kaikki G :n yksisärmäiset ja nelisärmäiset irrotusjoukot.

7. Olkoon G kuten tehtävässä 5 ja olkoot $V_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$, $V_2 = \{g, h, i, j, k, l\}$, $V_3 = \{a, c, d, f, h, k, l\}$ ja $V_4 = \{b, e, g, i, j\}$. Määritä irrotukset $\langle V_1, V_2 \rangle$ ja $\langle V_3, V_4 \rangle$, sekä niiden symmetrinen erotus.

8. Täydennä Lauseen 2.16 todistus: Graafin jokainen särmä, joka ei ole luuppi, kuuluu korkeintaan yhteen lohkoon.