Graafiteoria A, syksy 2007
Harjoitus 4
12.11.2007

Piirrä kuvat kaikista graafeista tehtävissä 1, 2, 3, 5 ja 6!

1. Olkoot $G = (V, E)$ ja $G' = (V', E')$ graafeja, missä $V = V' = \{2, \ldots, 8\}$, $E = \{\{i, j\} \mid \mathrm{syt}(i, j) = 1\}$ ja $E' = \{\{i, j\} \mid i + j \text{ on alkuluku}\}$.

   Määritä graafien G ja G' yhtenäisyysasteet, särmäyhtenäisyysasteet ja minimiasteet.

2. Anna esimerkki graafista G, jolla

   (a) $\kappa(G) = 1$, $\kappa'(G) = 1$ ja $\delta(G) = 4$

   (b) $\kappa(G) = 2$, $\kappa'(G) = 3$ ja $\delta(G) = 3$

   (c) $\kappa(G) = 2$, $\kappa'(G) = 3$ ja $\delta(G) = 4$

3. Tarkastellaan Hararyn graafia $H_{3,8}$. Osoita, että $H_{3,8}$ on 3-yhtenäinen, mutta ei 4-yhtenäinen.

4. Osoita, että jokaisella täydellisellä kaksijakoisella graafilla $K_{n,m}$ pätee $\kappa(K_{n,m}) = \kappa'(K_{n,m}) = \delta(K_{n,m})$.

5. Anna esimerkki kaksijakoisesta graafista G, jolla $\kappa(G) < \kappa'(G) < \delta(G)$.

6. Osoita Lauseen 2.37 avulla, että kuvan 2.34 graafi G_5 on 4-yhtenäinen.

7. Todista Mengerin lauseen (Lause 2.41) toinen suunta: Jos graafin G minkä hyvänsä kahden eri solmun välillä on ainakin k solmuiltaan erillistä polkua, niin G on k-yhtenäinen.

8. Olkoon T puu, ja olkoon v sen solmu, jonka aste on k. Osoita, että T:ssä on vähintään k loppusolmua.

   (Vihje: Katso Lause 3.5.)