GRAAFITEORIA A
Harjoitus 3, kevät 2004

1. Olkoon G kuvion 1.32 graafi. Luennolla määritettiin sen Laplacen matriisi. Luennolla myös muodostettiin siitä tietty digraafi ja määritettiin tämän digraafin Laplacen matriisi L. Muodostettava G:stä (suuntaamalla se jollakin muulla tavalla) jokin toinen digraafi ja todettava, että senkin Laplacen matriisi on L.

2. Miten voidaan graafin a) vierus-, b) tapausmatriisia tutkimalla päätellä, onko graafi yhtenäinen?

3. Todistettava: Jos yhtenäisessä graafissa on n solmua, niin siinä on ainakin $n - 1$ särmää.

4. a) Graafin solmujen välillä määritellään relaatio ~ niin, että $u \sim v$, jos ja vain jos u:sta lähtee polku v:hen. Onko ~ ekvivalenssi? Jos on, niin mitä voidaan sanoa ekvivalenssiluokista? b) Kuten edellä, mutta tarkastellaan digraafia ja polku on suunnattu.

5. Olkoon v graafin G paritonasteinen solmu. Osoitettava, että siitä lähtee polku G:n johonkin toiseen (v:stä eroavaan) paritonasteiseen solmuun.

6. Kuinka monta keskenään ei-isomorfista a) 2-, b) 3-, c) 4-, d) 5-solmuista yhtenäistä graafia on olemassa?

7. Osoitettava, että yhtenäisessä graafissa on polku, joka sisältää graafin kaikki a) solmut, b) särmät.

8. Todistettava oikeaksi tai vääräksi: Graafi on yhtenäinen, jos ja vain jos sen komplementti on epäyhtenäinen.

Ne, joista ”todistustehtävät” 3, 5, 7 ja 8 tuntuvat liian vaikeilta, voivat tyytyä havainnollistamaan tehtävien väitteitä sopivilla esimerkeillä.