Johdatus analyysiin

Kurssin sisältö:

1. a) Raja-arvon laskusäännöt
   b) L'Hospitalin sääntö (alkeellinen muoto)
   c) Jatkuvuus
   d) Raja-arvo "ääretön" ; Raja-arvo "äärettömyydessä"

2. a) Derivaatan määritelmä
   b) Käyrän tangentti ja normaali
   c) Derivoimissäännöt
   d) Funktion kulku
   e) Approksimointi differentiaalilla

3. a) Yhdistetty funktio
   b) Käänteisfunktio
   c) Funktiot $f(x) = e^x$ ja $g(x) = \ln x$
   d) Trigonometriset funktiot

4. a) Integraalifunktio
   b) Pinta-ala ja määrätty integraali
   c) Integraalifunktion ja määrätyn integraalin yhteys
   d) Pinta-ala ; Tilavuus

5. a) Kahden muuttujan funktio
   b) Osittaisderivaatta

6. Vanhoja loppukokeita ja tenttejä

I a) RAJA-ARVON LASKUSÄÄNNÖT

b) L'HOSPITALIN SÄÄNTÖ

c) JATKUVUUS

d) RAJA-ARVO "ÄÄRETÖN"

RAJA-ARVO "ÄÄRETTÖMYYDESSÄ"

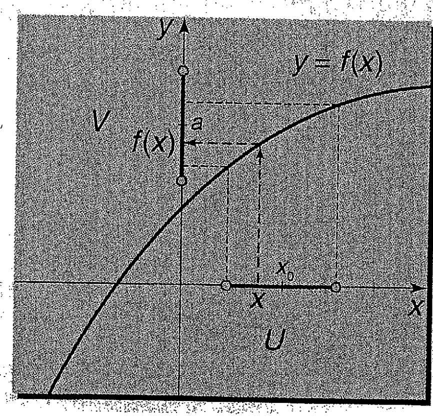
Funktion raja-arvo

Olkoon funktio f määritelty kohdan x_0 eräässä ympäristössä tätä kohtaa mahdollisesti lukuunottamatta. Funktiolla f on kohdassa x_0 *raja-arvo* a, jos funktion f arvot saadaan *mielivaltaisen lähelle* lukua a aina, kun muuttujan x $(\neq x_0)$ arvot valitaan *tarpeeksi läheltä* lukua x_0.

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{tai} \quad f(x) \to a, \text{ kun } x \to x_0.$$

*Täsmällisesti tämä tarkoittaa seuraavaa. Kun on annettu luvun a mielivaltainen ympäristö V, niin löytyy luvun x_0 sellainen ympäristö U, että aina kun $x \in U$ ja $x \neq x_0$, niin $f(x) \in V$.



Raja-arvon laskusääntöjä

Olkoon $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$. Tällöin seuraavat säännöt ovat voimassa.

Summan raja-arvo on raja-arvojen summa

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b.$$

Tulon raja-arvo on raja-arvojen tulo

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab.$$

Osamäärän raja-arvo on raja-arvojen osamäärä

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \quad \text{jos } b \neq 0.$$

Näiden sääntöjen perusteella voidaan helposti todistaa seuraavat raja-arvon ominaisuudet.

Vakiotekijä voidaan siirtää limesmerkin ohi

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = ca = c \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Polynomifunktion raja-arvo ja arvo ovat samat

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0).$$

Rationaalifunktion raja-arvo (nimittäjän nollakohdan ulkopuolella) ja arvo ovat samat

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}, \text{ jos } q(x_0) \neq 0.$$

Esim. 1 Laske **a)** $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 4x + 5)$, **b)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x-4}{x^2-2x}$.

a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 4x + 5) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 9.$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x-4}{x^2-2x} = \dfrac{2(-2)-4}{(-2)^2 - 2(-2)} = -1.$

Seuraavaksi tutkimme rationaalifunktion raja-arvoa sellaisessa kohdassa, jossa sekä osoittaja että nimittäjä häviävät. Suora sijoitus antaisi tällöin tulokseksi *epämääräisen muodon* $\frac{0}{0}$, mutta sopivasti supistamalla saamme raja-arvon määritetyksi.

Esim. 2 Laske **a)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x-4}{x^2-2x}$, **b)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3}$.

a) Sijoittamalla $x = 2$ saisimme epämääräisen muodon $\frac{0}{0}$. Koska $x = 2$ on osoittajan ja nimittäjän nollakohta, niin sekä osoittaja että nimittäjä ovat jaollisia $(x-2)$:lla, joka siis voidaan supistaa pois. Täten

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{x^2-2x} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2}{x} = \frac{2}{2} = 1.$$

b) Sijoitus $x = 3$ antaa epämääräisen muodon $\frac{0}{0}$, joten osoittaja ja nimittäjä ovat jaollisia $(x-3)$:lla. Suorittamalla jakolaskun tai käyttämällä toisen asteen polynomin tekijöihinjakokaavaa (MT 1–2, s. 129) saamme $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ ja $2x^2 - 7x + 3 = 2(x-3)(x - \frac{1}{2})$. Koska limesmerkin kuljettaminen yhtälöketjun mukana on hankalaa, käytämme toista merkintätapaa. Arvoilla $x \neq 3$ on

$$\frac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3} = \frac{(x-3)(x+1)}{2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{x+1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{x+1}{2x-1} \to \frac{3+1}{2 \cdot 3 - 1} = \frac{4}{5}, \text{ kun } x \to 3.$$

Esim. 3 Laske $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Tapa 1

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \to \frac{1}{2},$$

kun $x \to 1$.

Tapa 2

Laventamalla $(\sqrt{x}+1)$:llä saamme

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \to \frac{1}{2},$$

kun $x \to 1$.

Siis $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

Theorem 1 L'Hôpital's Rule (First Form)

Suppose that $f(a) = g(a) = 0$, that $f'(a)$ and $g'(a)$ exist, and that $g'(a) \neq 0$. Then

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Funktion toispuoliset raja-arvot

Olkoon funktio f määritelty kohdan x_0 eräässä ympäristössä tätä kohtaa mahdollisesti lukuunottamatta. Funktiolla f on kohdassa x_0 *vasemmanpuolinen* (*oikeanpuolinen*) *raja-arvo* a, jos funktion f arvot saadaan mielivaltaisen lähelle lukua a aina, kun $x < x_0$ $(x > x_0)$ ja kun x on tarpeeksi lähellä lukua x_0.

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a \quad \text{tai} \quad f(x) \to a, \text{ kun } x \to x_0-$$

$$\left(\lim_{x \to x_0+} f(x) = a \quad \text{tai} \quad f(x) \to a, \text{ kun } x \to x_0+ \right).$$

Jos toispuoliset raja-arvot ovat olemassa ja samat, niin funktion raja-arvo on niiden yhteinen arvo. Myös käänteinen lause on voimassa.

Raja-arvon ja toispuolisten raja-arvojen yhteys

Funktiolla on raja-arvo, jos ja vain jos sillä on samat toispuoliset raja-arvot

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \to x_0-} f(x) = a \text{ ja } \lim_{x \to x_0+} f(x) = a.$$

Funktion jatkuvuus annetussa kohdassa

Olkoon funktio f määritelty kohdan x_0 eräässä ympäristössä. Funktio f on *jatkuva* kohdassa x_0, jos sen raja-arvo ja arvo tässä kohdassa ovat yhtä suuret. Toisin sanoen: f on jatkuva kohdassa x_0, jos $\lim_{x \to x_0} f(x)$ on olemassa ja $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Jos f ei ole jatkuva kohdassa x_0, niin se on *epäjatkuva* tässä kohdassa.

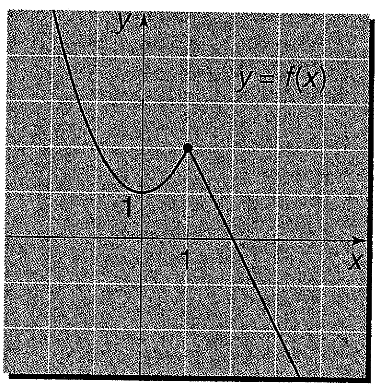
Funktio f on *vasemmalta* (*oikealta*) *jatkuva* kohdassa x_0, jos sen vasemmanpuolinen (oikeanpuolinen) raja-arvo ja arvo tässä kohdassa ovat yhtäsuuret.

Funktion f jatkuvuutta ja epäjatkuvuutta tutkitaan siis vain sellaisissa kohdissa, joissa f on määritelty. Sellainen kohta, jossa f ei ole määritelty, ei ole funktion f jatkuvuuskohta eikä epäjatkuvuuskohta.

Esim. 1 Onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, \text{ kun } x \le 1, \\ -2x+4, \text{ kun } x > 1, \end{cases}$$

jatkuva kohdassa $x = 1$?



Vasemmanpuolinen raja-arvo

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x^2+1) = 2$$

ja oikeanpuolinen raja-arvo

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (-2x+4) = 2$$

ovat yhtäsuuret, joten $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Toisaalta $f(1) = 2$, joten $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Vastaus on siis myönteinen.

Jatkuvuus annetulla välillä

Olkoon f välillä I määritelty funktio. Sanomme, että f on *jatkuva välillä I*, jos se on jatkuva tämän välin jokaisessa kohdassa. Tällöin funktion f kuvaaja välillä I on *katkeamaton, yhtenäinen, "jatkuva" käyrä.*

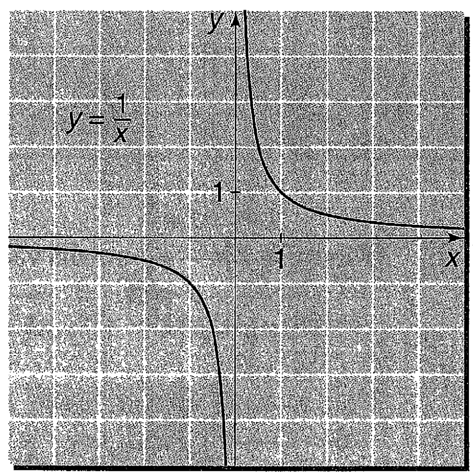
Raja-arvon laskusäännöistä (s. 17) seuraa, että jatkuvuus säilyy peruslaskutoimituksissa.

Jatkuvuuden säilyminen laskutoimituksissa

Olkoot funktiot f ja g jatkuvia välillä I. Tällöin funktiot $f+g$ ja fg ovat jatkuvia välillä I. Funktio $\frac{f}{g}$ on jatkuva välin I jokaisessa sellaisessa kohdassa x_0, jossa $g(x_0) \neq 0$.

1 Raja-arvo äärettömyydessä. Vaakasuorat asymptootit

Esim. 1 Tarkastelemme funktiota $f(x) = \frac{1}{x}$, kun x vähenee rajatta eli kun $x \to -\infty$ (lue: "x lähenee miinus ääretöntä"). Laskimella tai kuvaajan perusteella tuntuu selvältä, että tämän funktion arvo lähenee silloin lukua 0. (*Tällaisten väitteiden täsmällistä todistamista on käsitelty tehtävässä 230.) Siksi sanomme, että funktiolla $f(x) = \frac{1}{x}$ on *miinus äärettömyydessä* (*epäolennainen*) *raja-arvo* 0, ja merkitsemme $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

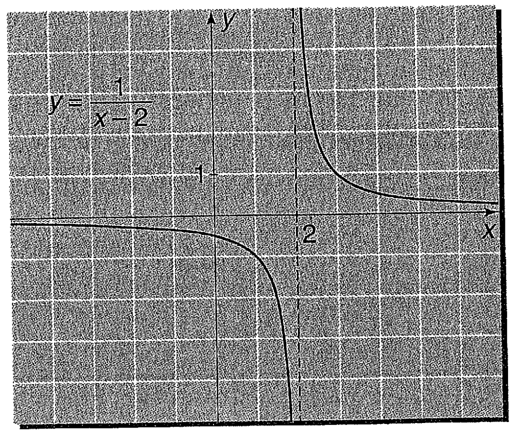


Vastaavasti huomaamme, että funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ arvo lähenee lukua 0 silloinkin, kun x kasvaa rajatta eli kun $x \to \infty$ (lue: "x lähenee ääretöntä"). Siksi sanomme, että funktiolla $f(x) = \frac{1}{x}$ on *äärettömyydessä* (*epäolennainen*) *raja-arvo* 0, ja merkitsemme

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$

Raja-arvo ääretön. Pystysuorat asymptootit

Esim. 1 Tarkastelemme funktiota $f(x) = \frac{1}{x-2}$.



Kun x lähenee vasemmalta lukua 2 eli kun $x \to 2-$, niin laskimella tai kuvaajan perusteella tuntuu selvältä, että tämän funktion arvo vähenee rajattomasti. Vastaavasti, kun x lähenee oikealta lukua 2 eli kun $x \to 2+$, niin funktion arvo kasvaa rajattomasti. Siksi sanomme, että funktiolla f on *kohdassa* $x = 2$ *(epäolennainen) vasemmanpuolinen raja-arvo miinus ääretön ja (epäolennainen) oikeanpuolinen raja-arvo ääretön.* Merkitsemme

$$\lim_{x \to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2+} \frac{1}{x-2} = \infty.$$

Geometrisesti tämä tarkoittaa sitä, että käyrä $y = \frac{1}{x-2}$ lähenee "y-akselin suuntaisessa äärettömyydessä" rajattomasti suoraa $x = 2$ sitä kuitenkaan saavuttamatta. Siksi sanomme, että käyrällä $y = \frac{1}{x-2}$ on *pystysuorana asymptoottina* suora $x = 2$.

Esim. 2 Laske **a)** $\lim_{x \to 3-} \frac{x-1}{x-3}$, **b)** $\lim_{x \to 3+} \frac{x-1}{x-3}$.

a) Kun $x \to 3-$, niin osoittaja $x - 1 \to 2$ ja nimittäjä $x - 3 \to 0$ pysyen negatiivisena. Täten $\frac{x-1}{x-3} \to -\infty$.

b) Kun $x \to 3+$, niin käy kuten a-kohdassa paitsi nimittäjä pysyy positiivisena, joten $\frac{x-1}{x-3} \to \infty$.

HARJOITUKSIA I

1. a) $\lim\limits_{x\to 3} 2x^2$, b) $\lim\limits_{x\to 1} (2x^2-5x)$, c) $\lim\limits_{x\to 0} (2x^2-5x+3)$,
d) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} (2x^2-5x+3)$.

2. a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x^2-x}$,
c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+x}{x^2+3x}$, d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2}{2x}$.

3. a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-x-2}$, b) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{17x^2+82x-15}{x+5}$ [k91],
c) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{6x+18}{x^3+3x^2}$, d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{2x^2-5x+2}$ [s80].

4. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\frac{1}{x+1}}{x}$,
c) $\lim\limits_{h\to 4} \dfrac{\frac{1}{h}-\frac{1}{4}}{h-4}$, d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}$.

5. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{8+x}-3}{x-1}$,
c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x-\sqrt{8-x^2}}$, d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1}$ [s81].

6. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ [s79], b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{x+10}{4-2x}\right)$ [k81].

7. Määritä vakio a siten, että funktiolla $\dfrac{ax^2-6x+4}{x^2-x-2}$ on äärellinen raja-arvo kun $x\to 2$. Mikä tämä raja-arvo on? [K72]

8. Määritä sellaiset vakiot a ja b, että $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2x^2+ax+b}{x-a} = -5$.

9. Kun $x \neq -a$, on $f(x) = \dfrac{x^2-x+a}{x+a}$. Määritä a siten, että f supistuu polynomiksi. Mitä on tällöin $\lim\limits_{x\to -a} f(x)$? [k90]

10. Onko funktio f jatkuva kohdassa x_0, kun

a) $x_0 = 1,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{kun } x \neq 1, \\ 2, & \text{kun } x = 1, \end{cases}$

b) $x_0 = 3,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{kun } x \neq 3, \\ 9, & \text{kun } x = 3? \end{cases}$

11. Onko funktio f jatkuva kohdassa x_0, kun

a) $x_0 = 1, f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < 1, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \geq 1, \end{cases}$ b) $x_0 = 3, f(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{kun } x \leq 3, \\ \sqrt{x-2}, & \text{kun } x > 3? \end{cases}$

12. Määritä sellainen vakio c, että funktio f on jatkuva kaikkialla, kun

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{kun } x \leq -1, \\ -x+c, & \text{kun } x > -1, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2+4, & \text{kun } x \leq 2, \\ cx-1, & \text{kun } x > 2. \end{cases}$

13. Määritä sellainen vakio c, että funktio f on jatkuva kaikkialla, kun

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-7, & \text{kun } x \leq c, \\ -2x+3, & \text{kun } x > c, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{kun } x < c, \\ -x+5, & \text{kun } x \geq c. \end{cases}$

14. a) Olkoon $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$, kun $x \neq 3$. Miten $f(3)$ on määriteltävä, jotta f saadaan jatkuvaksi kohdassa $x = 3$?

15. Määritä $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, kun $f(x)$ on

a) $2 + \dfrac{5}{x}$, b) $\dfrac{4x-3}{x}$, c) $\dfrac{3}{x^2} - 1$,

d) $\dfrac{4x^2-3}{x^2}$, e) $\dfrac{6x-3}{2x+8}$, f) $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+4x}$.

16. Määritä

a) $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{2x-1}{x-1}$, b) $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{2x-1}{x-1}$, c) $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{x+1}{x^2}$,

d) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x+1}{x^2}$.

17. MÄÄRITÄ

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$; c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^4-1}$.

II a) DERIVAATAN MÄÄRITELMÄ

b) KÄYRÄN TANGENTTI JA NORMAALI

c) DERIVOIMISSÄÄNNÖT

d) FUNKTION KULKU

e) DIFFERENTIAALI

Joskus on kätevää merkitä

$\Delta x = x - x_0$ (x:n arvojen muutos),

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ (funktion f arvojen muutos).

Merkitsemällä $y = f(x)$ voimme kirjoittaa myös

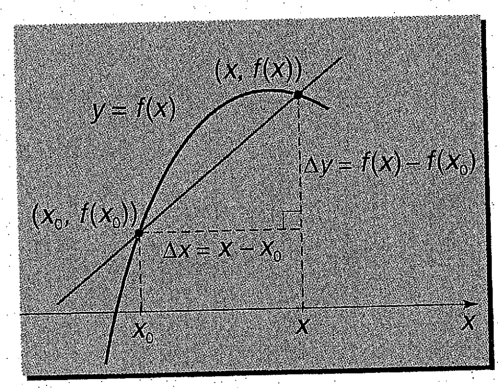
$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ (y:n arvojen muutos).

Merkinnät $\Delta x, \Delta f$ ja Δy luetaan: ”delta x, delta f, delta y”.

Erotusosamäärä

Funktion $y = f(x)$ *erotusosamäärä* kohdasta x_0 kohtaan $x\ (\neq x_0)$ on

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$



Esim. 2 Laske funktion $f(x) = x^3$ erotusosamäärä **a)** kohdasta 2 kohtaan 3, **b)** kohdasta 4 kohtaan 1, **c)** kohdasta –3 kohtaan 2.

a) $\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2} = \dfrac{3^3-2^3}{3-2} = 27-8 = 19,$

b) $\dfrac{f(1)-f(4)}{1-4} = \dfrac{1-4^3}{1-4} = \dfrac{-63}{-3} = 21,$

c) $\dfrac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} = \dfrac{2^3-(-3)^3}{2+3} = \dfrac{35}{5} = 7.$

Yleisesti erotusosamäärän

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

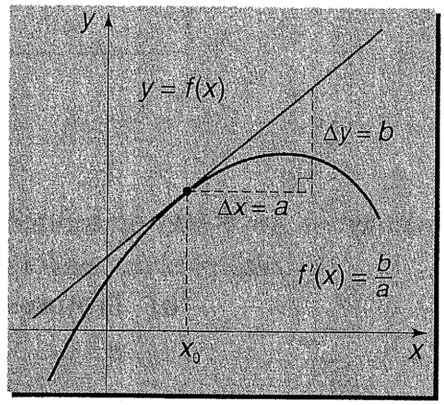
raja-arvo, kun $x \to x_0$, ilmoittaa käyrän $y = f(x)$ pisteestä $(x_0, f(x_0))$ piirretyn tangentin kulmakertoimen. Näin pääsemme *derivaattaan*, joka on *differentiaalilaskennan* peruskäsite.

Derivaatta

Funktion $y = f(x)$ *derivaatta* kohdassa x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

mikäli tämä raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että f on kohdassa x_0 *derivoituva*.



Derivaatan geometrinen merkitys on funktion f kuvaajan pisteestä $(x_0, f(x_0))$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Derivaatta ilmoittaa funktion f muutosnopeuden kohdassa x_0.

Jos erotusosamäärällä on vain vasemmanpuolinen (oikeanpuolinen) raja-arvo, niin f on kohdassa x_0 *vasemmalta* (*oikealta*) *derivoituva*. Tämä raja-arvo on funktion f *vasemmanpuolinen* (*oikeanpuolinen*) *derivaatta* kohdassa x_0. Sille käytetään merkintää $f'(x_0-)$ ($f'(x_0+)$).

Merkinnät $f'(x_0), f'(x_0-)$ ja $f'(x_0+)$ luetaan "f pilkku x_0, f pilkku x_0 miinus ja f pilkku x_0 plus". Voimme kirjoittaa derivaatan määritelmän

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

myös muotoon

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Esim. 2 Funktion $f(x) = x^3$ derivaatta kohdassa $x = 2$, joka on

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2},$$

voidaan esittää myös muodossa

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^3 - 2^3}{h}.$$

Derivoituvuus ja jatkuvuus

Olkoon f välillä I määritelty funktio. Sanomme, että f on *derivoituva välillä* I, jos se on derivoituva tämän välin jokaisessa kohdassa.

Derivoituva funktio on aina jatkuva.

Derivaattafunktio

Funktion $y = f(x)$ *derivaattafunktion* f' arvo $f'(x)$ on funktion f derivaatta kohdassa x. *Derivoiminen* tarkoittaa derivaattafunktion muodostamista. Derivaattafunktio f' on määritelty kaikissa niissä kohdissa x, joissa funktio f on derivoituva. Derivaattafunktiota voidaan kutsua lyhyesti myös derivaataksi, ellei väärinkäsityksen vaaraa ole.

Potenssin derivoimissääntö

$\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Summan derivoimissääntö

Summan derivaatta on yhteenlaskettavien derivaattojen summa

$$(f+g)' = f' + g'$$

eli

$$\mathrm{D}(f(x)) + g(x)) = \mathrm{D}f(x) + \mathrm{D}g(x).$$

Vakiotekijän siirtosääntö

Vakiotekijä voidaan siirtää derivoimismerkin ohi

$$(cf)' = cf'$$

eli

$$\mathrm{D}(cf(x)) = c\mathrm{D}f(x).$$

Korkeamman kertaluvun derivaatat

Funktion $y = f(x)$ derivaatta f' (mikäli se on olemassa) on itsekin funktio, joten voimme derivoida senkin (mikäli se on derivoituva). Näin saamme funktion f *toisen kertaluvun derivaatan* eli lyhemmin *toisen derivaatan* $f''(x)$ (lue: "f kaksi pilkku x"), jota merkitsemme myös

$$\mathrm{D}^2 f,\ \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2},\ y'',\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

(lue: "D kaksi f", "d kaksi f d x toiseen", "y kaksi pilkku", "d kaksi y d x toiseen"). Vastaavasti saamme funktion f *kolmannen derivaatan* $f^{(3)}(x)$ (lue: "f kolme x") ja yleisesti *n. derivaatan* $f^{(n)}(x)$ (lue: "f n x"), jota merkitsemme myös

$$\mathrm{D}^n f,\ \frac{d^n f}{dx^n},\ y^{(n)},\ \frac{d^n y}{dx^n}$$

(lue: "D n f", "d n f d x n", "y n", "d n y d x n").

Tulon derivoimissääntö

Kahden derivoituvan funktion tulofunktio on derivoituva. Sen derivaatta saadaan kertomalla kumpikin tulontekijä toisen derivaatalla ja laskemalla näin saadut tulot yhteen

$$(fg)' = f'g + fg'$$

eli

$$\mathrm{D}(f(x)g(x)) = g(x)\mathrm{D}f(x) + f(x)\mathrm{D}g(x).$$

Funktion potenssin derivoimissääntö

Tutkimme seuraavaksi potenssin $f(x)^n$ derivaattaa. Tapauksissa $n = 2$ ja $n = 3$ saamme tulon derivoimissäännöllä

$$\mathrm{D}f^2 = \mathrm{D}(f \cdot f) = f'f + ff' = 2ff',$$
$$\mathrm{D}f^3 = \mathrm{D}(f \cdot f^2) = f\mathrm{D}f^2 + f^2\mathrm{D}f = f \cdot 2ff' + f^2 f' = 3f^2 f'.$$

Potenssin derivoimissäännön mekaanisesti antamat tulokset $2f$ ja $3f^2$ eivät siis riitä, vaan ne on kerrottava *sisäfunktion* f derivaatalla f'. Yleisesti

$$\mathrm{D}f(x)^n = nf(x)^{n-1}f'(x).$$

Funktioiden f ja g osamääräfunktio $\frac{f}{g}$ määritellään yhtälöllä $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Osamäärän derivomissääntö

Kahden derivoituvan funktion osamääräfunktio on määrittelyjoukossaan derivoituva. Sen derivaatta saadaan laskemalla osoittajan derivaatta kertaa nimittäjä miinus nimittäjän derivaatta kertaa osoittaja ja jakamalla tämä erotus nimittäjän neliöllä

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

eli

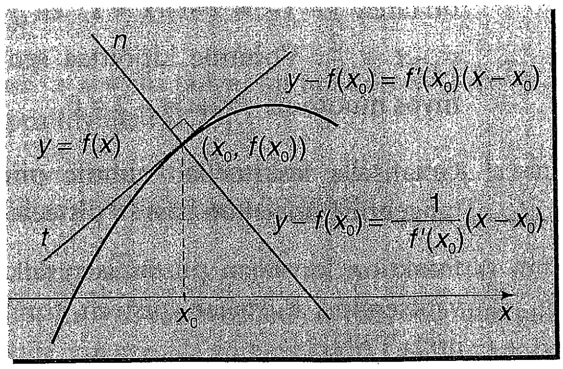
$$\mathrm{D}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\mathrm{D}f(x) - f(x)\mathrm{D}g(x)}{g(x)^2}.$$

II 5

Tangentin ja normaalin yhtälö

Jos funktio f on derivoituva kohdassa x_0, niin käyrän $y = f(x)$ pisteestä $(x_0, f(x_0))$ piirretyn tangentin yhtälö on

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



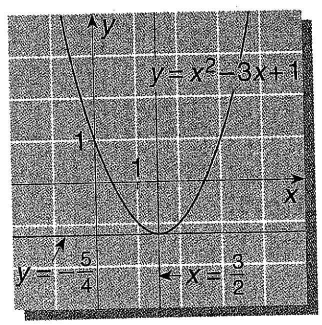
Jos $f'(x_0) \neq 0$, niin tästä pisteestä piirretyn normaalin yhtälö on

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Esim. Määritä paraabelin $y = x^2 - 3x + 1$ **a)** huippu, **b)** huipusta piirretyn tangentin ja normaalin yhtälö.

a) Derivaatan $D(x^2 - 3x + 1) = 2x - 3$ nollakohta on $x = \frac{3}{2}$, jolloin $y = (\frac{3}{2})^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -\frac{5}{4}$. Huippu on siis $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$.

b) Kysytty tangentti on pisteen $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$ kautta kulkeva x-akselin suuntainen suora, joten sen yhtälö on $y = -\frac{5}{4}$. Kysytty normaali on pisteen $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$ kautta kulkeva y-akselin suuntainen suora, joten sen yhtälö on $x = \frac{3}{2}$. Huipun kautta kulkeva normaali on paraabelin symmetria-akseli.



Funktion monotonisuus ja derivaatan merkki

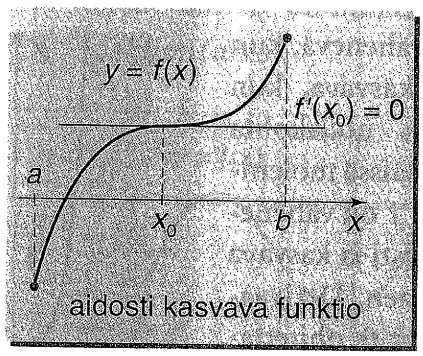
Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$.

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $]a, b[$ ja $f'(x) = 0$ vain yksittäisissä kohdissa, niin f on aidosti kasvava välillä $[a, b]$.

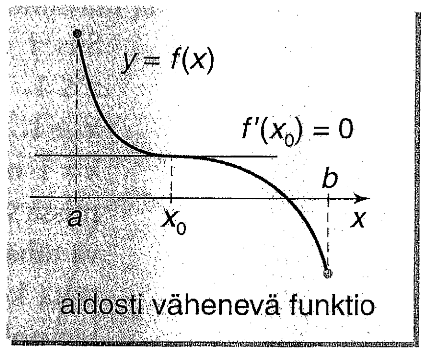
Jos $f'(x) \leq 0$ välillä $]a, b[$ ja $f'(x) = 0$ vain yksittäisissä kohdissa, niin f on aidosti vähenevä välillä $[a, b]$.

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $]a, b[$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$.

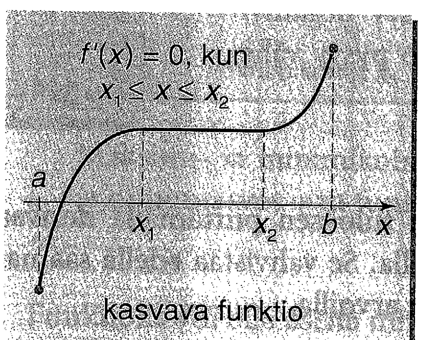
Jos $f'(x) \leq 0$ välillä $]a, b[$, niin f on vähenevä välillä $[a, b]$.



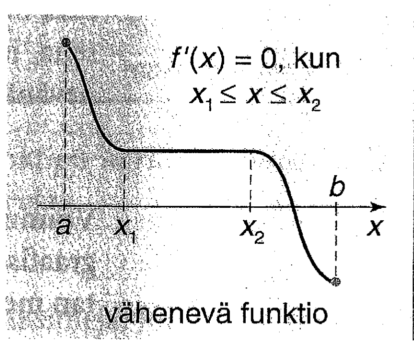
aidosti kasvava funktio



aidosti vähenevä funktio



kasvava funktio



vähenevä funktio

Ääriarvokohdat ja derivaatta

Olkoon funktio f jatkuva kohdassa x_0 ja derivoituva kohdan x_0 eräässä ympäristössä tätä kohtaa mahdollisesti lukuunottamatta. Tällöin x_0 on funktion f

i) minimikohta, jos f' muuttuu tätä kohtaa ohitettaessa negatiivisesta positiiviseksi,

	x_0	
$f'(x)$	−	+
$f(x)$	↘	↗
	min	

ii) maksimikohta, jos f' muuttuu positiivisesta negatiiviseksi.

	x_0	
$f'(x)$	+	−
$f(x)$	↗	↘
	max	

Jos f' säilyttää merkkinsä, niin x_0 ei ole ääriarvokohta.

	x_0	
$f'(x)$	−	−
$f(x)$	↘	↘

	x_0	
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	↗	↗

Jatkuvan funktion ääriarvolause

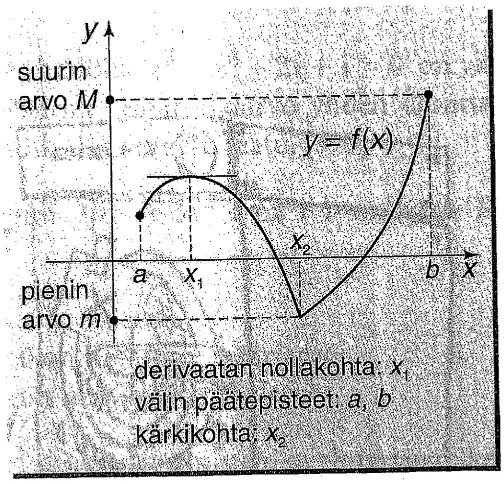
Suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio f saa aina pienimmän ja suurimman arvonsa. Nämä arvot löydetään laskemalla f:n arvot

i) derivaatan nollakohdissa,

ii) välin päätepisteissä,

iii) kärkikohdissa (eli kohdissa, joissa derivaattaa ei ole olemassa)

ja valitsemalla näistä arvoista pienin ja suurin.



Kuvaajan perusteella tämä lause vaikuttaa uskottavalta. Sen todistus ei kuulu koulukurssiin.

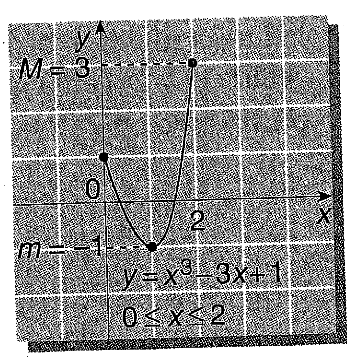
Esim. 1 Määritä funktion $f(x) = x^3 - 3x + 1$ pienin ja suurin arvo välillä $[0, 2]$.

Jatkuvuus ja derivoituvuus
Funktio f on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva välillä $[0, 2]$.

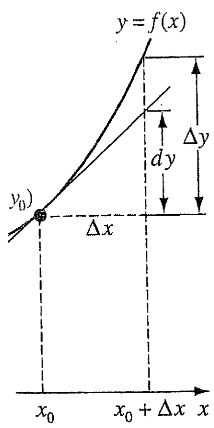
Derivaatan nollakohdat
Derivaatan $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ nollakohdat ovat $x = \pm 1$. Kohta $x = 1$ kuuluu väliin $[0, 2]$, mutta kohta $x = -1$ ei kuulu. Funktion arvo $f(1) = -1$.

Välin päätepisteet
$f(0) = 1$, $f(2) = 3$.

Johtopäätökset
Jatkuvan funktion ääriarvolauseen mukaan funktion pienin arvo on -1 ja suurin on 3.



IT 8



Definition Differentials

Let $y = f(x)$ be a differentiable function of the independent variable x.

Δx is an arbitrary increment in the independent variable x.

dx, called the **differential of the independent variable** x, is equal to Δx.

Δy is the actual change in the variable y as x changes from x to $x + \Delta x$; that is, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

dy, called the **differential of the dependent variable** y, is defined by $dy = f'(x)\,dx$.

EXAMPLE 1 Find dy if

(a) $y = x^3 - 3x + 1$ (b) $y = \sqrt{x^2 + 3x}$

(c) $y = \sin(x^4 - 3x^2 + 11)$

Solution If we know how to calculate derivatives, we know how to calculate differentials. We simply calculate the derivative and multiply it by dx.

(a) $dy = (3x^2 - 3)\,dx$

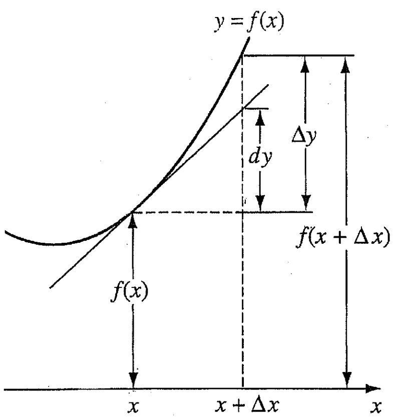
(b) $dy = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)^{-1/2}(2x + 3)\,dx = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}\,dx$

(c) $dy = \cos(x^4 - 3x^2 + 11) \cdot (4x^3 - 6x)\,dx$ ■

Approximations Differentials will play several roles in this book, but for now their chief use is in providing approximations. We hinted at this earlier.

Suppose that $y = f(x)$, as shown in Figure 3. An increment Δx produces a corresponding increment Δy in y, which can be approximated by dy. Thus, $f(x + \Delta x)$ is approximated by

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x}$$



$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$

This is the basis for the solutions to all the examples that follow.

EXAMPLE 2 Suppose you need good approximations to $\sqrt{4.6}$ and $\sqrt{8.2}$, but your calculator has died. What might you do?

Solution Consider the graph of $y = \sqrt{x}$ sketched in Figure 4. When x changes from 4 to 4.6, $\sqrt{x}$ changes from $\sqrt{4} = 2$ to (approximately) $\sqrt{4} + dy$. Now

$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

which, at $x = 4$ and $dx = 0.6$, has the value

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.6) = \frac{0.6}{4} = 0.15$$

Thus,

$$\sqrt{4.6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0.15 = 2.15$$

Similarly, at $x = 9$ and $dx = -0.8$,

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}(-0.8) = \frac{-0.8}{6} \approx -0.133$$

Hence,

$$\sqrt{8.2} \approx \sqrt{9} + dy \approx 3 - 0.133 = 2.867$$

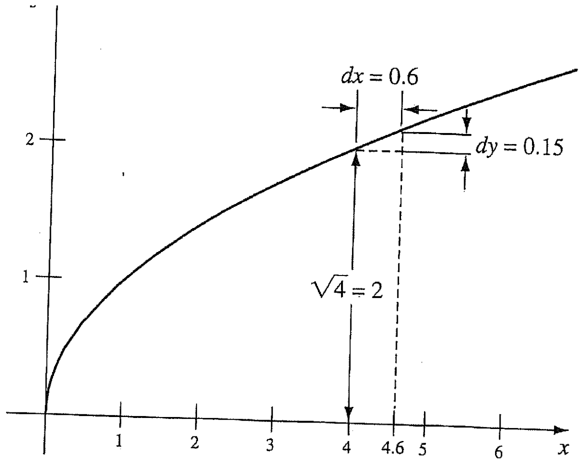


Figure 4

Note that both dx and dy were negative in this case.

The approximate values 2.15 and 2.867 may be compared to the true values (to four decimal places) of 2.1448 and 2.8636. ■

EXAMPLE 3 Use differentials to approximate the increase in the area of a soap bubble when its radius increases from 3 inches to 3.025 inches.

Solution The area of a spherical soap bubble is given by $A = 4\pi r^2$. We may approximate the exact change, ΔA, by the differential dA, where

$$dA = 8\pi r\, dr$$

At $r = 3$ and $dr = \Delta r = 0.025$,

$$dA = 8\pi(3)(0.025) \approx 1.885 \text{ square inches}$$ ■

Estimating Errors Here is a typical problem in science. A researcher measures a certain variable x to have a value x_0 with a possible error of size $\pm\Delta x$. The value x_0 is then used to calculate a value y_0 for y that depends on x. The value y_0 is contaminated by the error in x, but how badly? The standard procedure is to estimate this error by means of differentials.

EXAMPLE 4 The side of a cube is measured as 11.4 centimeters with a possible error of ± 0.05 centimeter. Evaluate the volume of the cube and give an estimate for the possible error in this value.

Solution The volume V of a cube of side x is $V = x^3$. Thus, $dV = 3x^2\, dx$. If $x = 11.4$ and $dx = 0.05$, then $V = (11.4)^3 \approx 1482$ and

$$dV = 3(11.4)^2(0.05) \approx 19$$

Thus, we might report the volume of the cube as 1482 ± 19 cubic centimeters. ■

The quantity ΔV in Example 4 is called the **absolute error**. Another measure of error is the **relative error**, which is found by dividing the absolute error by the total volume. We can approximate the relative error $\Delta V/V$ by dV/V. In Example 4, the relative error is

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} \approx \frac{19}{1482} \approx 0.0128$$

The relative error is often expressed in terms of a percentage. Thus, we say that for the cube in Example 4 the relative error is approximately 1.28%.

HARJOITUKSIA II

1. Laske derivaatan määritelmän perusteella
   a) $f'(0)$, kun $f(x) = 2x^3 - x$, **b)** $f'(3)$, kun $f(x) = 4x - x^2$,
   c) $f'(1)$, kun $f(x) = x^2 - 3x$.

2. Olkoon $f(x) = x^3$. Määritä
   a) funktion f erotusosamäärä kohdasta x_0 kohtaan x,
   b) $f'(x_0)$,
   c) kohtaa i) $x = -1$, ii) $x = 0$, iii) $x = 2$ vastaavasta käyrän $y = f(x)$ pisteestä piirretyn tangentin kulmakerroin.

3. Olkoon $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Määritä $f'(0)$ derivaatan määritelmän nojalla. [s75]

4. Olkoon $f'(0) = a$ ja $f'(1) = b$. Määritä
   a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$, **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(1) - f(x)}{x - 1}$,
   c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$, **d)** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1-h) - f(1)}{-h}$.

5. Funktio f on määritelty välillä $]-1, 1[$, ja derivaatta f' on olemassa pisteessä $x = 0$ (mutta ei välttämättä muualla). Määritä
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2) - f(-x^2)}{x^2}.$$ [K91]

6. Määritä paraabelin $y = x^2 - 2x$ pisteestä $(-1, 3)$ piirretyn
   a) tangentin, **b)** normaalin
   yhtälö.

7. Määritä käyrän $y = x^3 + x$ ne pisteet, joiden kautta kulkevat tangentit ovat suoran **a)** $4x - y = 0$, **b)** $x + y = 0$ suuntaiset.

8. Määritä paraabelin $y = 4 - x^2$ se tangentti, joka on
   a) suoran $y = 2x + 1$ suuntainen,
   b) kohtisuorassa suoraa $x - y + 2 = 0$ vastaan.

9. Tutki kulkukaaviolla funktion f monotonisuutta, kun $f(x)$ on
   a) $x^3 - x$, **b)** $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$, **c)** $x^3 - 6x^2 + 12x$, **d)** $3x^4 + x^3 - 3$.

10. Määritä funktion f ääriarvokohdat, kun $f(x)$ on
   a) $x^3 - 3x^2$, **b)** $5x^3 - 3x^5$, **c)** $x^4 - 18x^2$, **d)** $x^4 - 32x$.

11. Määritä

a) funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ääriarvot välillä $[0, 5]$,

b) funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ääriarvot välillä $[-1, 3]$.

12 Millä a:n arvoilla funktio $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 10$ on kaikkialla kasvava?

13. Funktiolla $f(x) = x^3 - ax^2$ on ääriarvo kohdassa $x = -2$. Määritä a ja ääriarvon laatu.

14. Funktiolla $f(x) = ax^5 + bx^4$ on kohdassa 1 ääriarvo -2. Määritä a ja b sekä ääriarvon laatu.

15. MÄÄRITÄ ANNETUN FUNKTION SUURIN ARVO M JA PIENIN ARVO m, KUN

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $-1 \leq x \leq 4$. [s81]

b) Funktion $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ derivaatta, $-1 \leq x \leq 0$.

16. Määritä funktion $f(x) = \sqrt{4x^3 - x^4}$ suurin arvo.

17. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$ suurin arvo.

18. Derivoi

a) $x(1 - x^2)$, b) $x^2(2x + 3)$, c) $x^3(4x^2 - 2x + 3)$

19. Derivoi

a) $\dfrac{x}{x-1}$, b) $\dfrac{x^2}{x+1}$, c) $\dfrac{2x}{x^2+1}$,

Määritä derivaatan f' nollakohdat, kun $f(x)$ on

20. a) $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, b) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{1 - x}$, c) $\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$, d) $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ [K85].

Määritä funktion f ääriarvot, kun $f(x)$ on

21. a) $\dfrac{2x}{x^2 + 1}$, b) $x(x - 4)^3$, c) $x(1 - x)^4$.

22. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$ pienin ja suurin arvo välillä $[-1, 1]$.

Tutki funktion f monotonisuutta, kun $f(x)$ on

23. a) $\dfrac{x}{x-3}$, b) $\dfrac{x^2}{x^2 + 4}$.

24. OLKOON $y = x^4 + 2x$. MÄÄRITÄ Δy JA dy, KUN

a) $x = 2$ JA $\Delta x = dx = 1$; b) $x = 3$ JA $\Delta x = dx = 0{,}005$.

25. PALLON LÄPIMITTA ON MITATTU 20±1 CM. TUTKI PALLON TILAVUUTTA,

a) YHDISTETTY FUNKTIO
b) KÄÄNTEISFUNKTIO
c) FUNKTIOT $f(x) = e^x$ JA $g(x) = \ln x$
d) TRIGONOMETRISET FUNKTIOT

Yhdistetty funktio

Funktioiden f ja g *yhdistetty funktio* $g \circ f$ (luetaan ”g pallo f”) määritellään yhtälöllä

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Funktio g on yhdistetyn funktion $g \circ f$ *ulkofunktio* ja f on *sisäfunktio*.

Esim. 2 Olkoon $f(x) = 2x + 3$ ja $g(x) = x^2 + 1$. Tällöin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 + 1 = 4x^2 + 12x + 10,$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) + 3 = 2x^2 + 5.$$

Siis $f \circ g \neq g \circ f$, joten funktioiden yhdistäminen ei noudata vaihdantalakia. Voimme esittää yhdistetyn funktion $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ yhtälöketjuna

$$y = g(u), \quad u = f(x).$$

Esim. 3 Yhdistetty funktio $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ voidaan esittää yhtälöketjuna

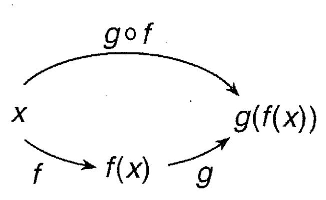
$$y = \sqrt{u}, \quad u = x^2 + 2x.$$

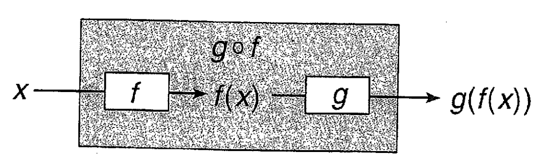
Yhdistettäviä funktioita voi olla enemmänkin kuin kaksi.

Esim. 4 Funktioiden $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$ ja $h(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$ yhdistetty funktio on

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(\sin x)) = h(\sin^2 x) = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x}.$$

Funktioiden f ja g yhdistämistä voidaan havainnollistaa *nuolikaaviolla* tai *laatikkokaaviolla*.





Laatikkokaaviossa funktio kuvataan ”koneena”, joka lukee siihen syötetyn muuttujan arvon ja tulostaa vastaavan funktion arvon.

Jotta yhdistetty funktio $g \circ f$ olisi määritelty kohdassa x, niin funktion f täytyy olla määritelty kohdassa x ja funktion g kohdassa $f(x)$.

Yhdistetyn funktion derivoimissääntö

Yhdistetyn funktion derivaatta on ulko- ja sisäfunktion derivaattojen tulo

$$Dg(f(x)) = g'(f(x))\,f'(x).$$

Todistus ei kuulu koulukurssiin. Voimme ilmoittaa yhdistetyn funktion derivoimissäännön myös muodossa

$$D(g \circ f)(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))\,f'(x)$$

ja edelleen *ketjusääntönä*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx},$$

missä $y = g(u)$, $u = f(x)$. Tällöin $\frac{dy}{du} = g'(u)$ on ulkofunktion derivaatta ja $\frac{du}{dx} = f'(x)$ on sisäfunktion derivaatta.

Vaikka "differentiaalit" dy, dx ja du eivät sellaisinaan merkitse mitään, on havainnollista ajatella, että yhdistetyn funktion derivoimissääntö saadaan "laventamalla" $\frac{dy}{dx}$ differentiaalilla du.

Esim. 1 Laske $D(1+3x)^2$.

Voisimme käyttää funktion potenssin derivoimissääntöä, mutta käytämme yhdistetyn funktion derivoimissääntöä. Voimme menetellä kahdella tavalla, jotka ovat muodollisesti erilaiset mutta asiallisesti samat.

Tapa 1. Esitämme funktion $h(x) = (1+3x)^2$ muodossa $h = g \circ f$ eli $h(x) = g(f(x))$, missä sisäfunktio $f(x) = 1 + 3x$ ja ulkofunktio $g(x) = x^2$. Koska $f'(x) = 3$ ja $g'(x) = 2x$, niin yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaan

$$h'(x) = g'(f(x))\,f'(x) = 2(1+3x)3 = 6(1+3x).$$

Tapa 2. Esitämme funktion $y = (1+3x)^2$ yhtälöketjuna $y = u^2$, $u = 1 + 3x$, jolloin ketjusäännön mukaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = 2u \cdot 3 = 6u = 6(1+3x).$$

III 3

Käänteisfunktio

Funktiot f ja g ovat toistensa *käänteisfunktioita*, jos

$$f(g(x)) = x \qquad \text{ja} \qquad g(f(x)) = x$$

eli jos

$$(f \circ g)(x) = x \qquad \text{ja} \qquad (g \circ f)(x) = x$$

kaikilla niillä x:n arvoilla, joilla asianomainen funktio on määritelty.

Funktion f käänteisfunktiolle käytetään usein merkintää f^{-1}. Toistensa käänteislaskutoimituksilla saadut funktiot ovat toistensa käänteisfunktioita.

Esim. 2 Ovatko funktiot f ja g toistensa käänteisfunktioita, kun

a) $f(x) = x^3 + 1$ ja $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$, **b)** $f(x) = x^2$ ja $g(x) = \sqrt{x}$?

a) Funktiot f ja g on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Koska

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 + 1) = \sqrt[3]{(x^3+1)-1} = \sqrt[3]{x^3} = x,$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1 \\ &= x - 1 + 1 = x,\end{aligned}$$

niin f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita.

b) Funktio f on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Funktio g on määritelty, kun $x \geq 0$. Kaikilla $x \geq 0$ on

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x,$$

joten käänteisfunktion määritelmän edellinen ehto on voimassa. Sen sijaan jälkimmäinen ehto ei ole voimassa, koska

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| \neq x, \text{ kun } x < 0.$$

Vastaus on siis kielteinen. Ks. myös esim. 4.

Voimme havainnollistaa käänteisfunktiota nuolikaaviolla.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \qquad y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

Käänteisfunktion olemassaolo

Jokaisella aidosti monotonisella funktiolla on käänteisfunktio.

Käänteisfunktion derivaatta

Jos f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita, niin $g(f(x)) = x$ kaikilla niillä x:n arvoilla, joilla f on määritelty. Derivoimalla tämän yhtälön molemma puolet ja käyttämällä vasemmalla puolella yhdistetyn funktion derivoimis sääntöä saamme $g'(f(x))\,f'(x) = 1$, josta edelleen

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Käänteisfunktion derivoimissääntö

Olkoon funktio f derivoituva ja olkoon sillä käänteisfunktio g. Jos $y = f(x)$ ja $f'(x) \neq 0$, niin

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Siis funktion ja käänteisfunktion vastinkohdissa lasketut derivaatat ovat toistensa käänteislukuja.

Esim. 1 Oletetaan, että funktiolla f on käänteisfunktio g ja että $f(-1) = 2$ sekä $f'(-1) = 3$. Mitä on $g'(2)$?

Käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan

$$g'(2) = \frac{1}{f'(x)},$$

missä x toteuttaa yhtälön $f(x) = 2$. Koska $f(-1) = 2$, niin $x = -1$. (Käänteisfunktion olemassaolosta seuraa, ettei yhtälöllä $f(x) = 2$ ole muita ratkaisuja.) Täten

$$g'(2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3}.$$

Esim. 2 Määritä funktion $f(x) = x^3 + x$ käänteisfunktion $x = g(y)$ derivaatta kohdassa $y = 10$ (g:n olemassaolo, ks. s. 145, esim. 2).

Käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan

$$g'(10) = \frac{1}{f'(x)},$$

missä x toteuttaa yhtälön $f(x) = 10$. Yhtälön $x^3 + x = 10$ ratkaisuksi saamme kokeilemalla $x = 2$. (Käänteisfunktion olemassaolon perusteella muita ratkaisuja ei ole.) Siis

$$g'(10) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3 \cdot 2^2 + 1} = \frac{1}{13}.$$

Neliöjuurifunktion derivoimissääntö

$$\mathrm{D}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Yleisesti, jos f on derivoituva ja positiivinen, niin

$$\mathrm{D}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Esim. 2 Määritä käyrälle $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ kohtaa $x = 1$ vastaavasta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö.

Olkoon $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$. Sivuamispisteen y-koordinaatti $f(1) = \sqrt{1^2 + 3 \cdot 1} = \sqrt{4} = 2$. Derivaatta

$$f'(x) = \frac{\mathrm{D}(x^2 + 3x)}{2\sqrt{x^2 + 3x}} = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}},$$

joten tangentin kulmakerroin on $f'(1) = \dfrac{2 \cdot 1 + 3}{2\sqrt{1^2 + 3 \cdot 1}} = \dfrac{5}{4}$. Edelleen tangentin yhtälö on $y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1)$ eli $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$, jonka voimme kirjoittaa myös muotoon $5x - 4y + 3 = 0$.

Olkoon $\frac{m}{n}$ rationaaliluku. Yhdistetyn funktion derivoimissäännön (tai funktion potenssin derivoimissäännön) perusteella voidaan osoittaa, että

$$\mathrm{D}x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n} - 1} \quad (x > 0).$$

Potenssin derivoimissääntö, jonka johdimme alunperin eksponentin ollessa positiivinen kokonaisluku, on siis samanlaisena voimassa kaikille rationaalisille eksponenteille. Toisin sanoen kaikilla rationaaliluvuilla a on

$$\mathrm{D}x^{a} = ax^{a-1} \quad (x > 0).$$

1 Neperin luku e ja funktio $y = e^x$

Tutkimme aluksi funktion $f(x) = 2^x$ derivaattaa. Erotusosamäärä kohdas x kohtaan $x+h$ on

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2^{x+h}-2^x}{h} = \frac{2^x 2^h - 2^x}{h} = 2^x \frac{2^h-1}{h}.$$

Täten

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 2^x \frac{2^h-1}{h} = 2^x \lim_{h\to 0} \frac{2^h-1}{h} = c2^x, \text{ missä } c = \lim_{h\to 0} \frac{2^h-1}{h}$$

Meidän on laskettava c. Saamme laskimella seuraavan taulukon.

h	$\frac{2^h-1}{h}$
0,1	0,717735
0,01	0,695555
0,001	0,693387
0,0001	0,693171
0,00001	0,69315

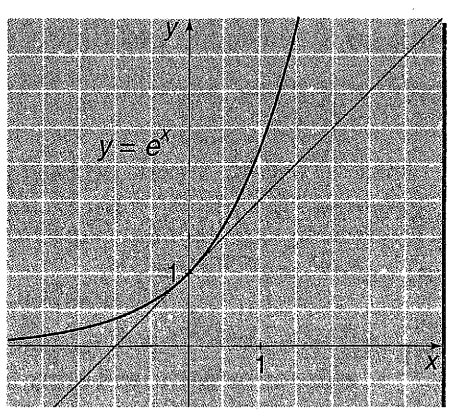
Siis kolmen desimaalin tarkkuudella $c = 0{,}693$, joten likimäärin $\mathrm{D}\,2^x = 0{,}693 \cdot 2^x$. Vakion c geometrinen merkitys on käyrän $y = 2^x$ pisteen $(0, 1)$ kautta kulkevan tangentin kulmakerroin, sillä

$$c = \lim_{h\to 0} \frac{2^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = f'(0).$$

Voimme tutkia samalla tavalla funktion $f(x) = k^x$ derivaattaa muillakin k:n arvolla $(k > 0, k \neq 1)$. Jos esimerkiksi $k = 3$, niin saamme kolmen desimaalin tarkkuudella $c = 1{,}099$, joten likimäärin $\mathrm{D}\,3^x = 1{,}099 \cdot 3^x$.

Erityisen kiinnostava on se kantaluku k, jolle $c = 1$. Koska kantaluvulle $k = 2$ on $c = 0{,}693 < 1$ ja kantaluvulle $k = 3$ on $c = 1{,}099 > 1$, niin välillä $2 < k < 3$ on olemassa sellainen kantaluku e, jolle $c = 1$. Kutsumme lukua e *Neperin luvuksi*. Voidaan todistaa, että se on irrationaalinen. Laskimella saamme likiarvon $e \approx 2{,}718281828$. Siis $\mathrm{D}e^x = e^x$.

Funktion $y = e^x$ arvot saamme laskimella. Esimerkiksi $e^2 \approx 7{,}39$ ja $e^{-1} \approx 0{,}37$. Tämän funktion kuvaaja leikkaa y-akselin 45° kulmassa, sillä pisteen $(0, 1)$ kautta kulkevan tangentin kulmakerroin on $c = 1$.



Eksponenttifunktion $f(x) = e^x$ ominaisuuksia

Määrittely- ja arvojoukko

$M_f = \mathbf{R}$, $A_f =]0, \infty[$.

Jatkuvuus

Funktio f on kaikkialla jatkuva.

Monotonisuus

Funktio f on aidosti kasvava.

Asymptootit

Käyrällä $y = e^x$ on asymptoottina negatiivinen x-akseli.

Laskusääntöjä

$$e^u e^v = e^{u+v}, \quad \frac{e^u}{e^v} = e^{u-v}, \quad (e^u)^v = e^{uv}.$$

$$e^0 = 1, \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

Eksponenttiyhtälö

Funktio f saa kaikki positiiviset reaaliarvot täsmälleen kerran, joten $e^u = e^v \Leftrightarrow u = v$.

Esim. 1 Sievennä **a)** $e^x e^{2x}$, **b)** $\frac{(e^{2x})^3}{e^{4x}}$.

a) $e^x e^{2x} = e^{x+2x} = e^{3x}$,

b) $\frac{(e^{2x})^3}{e^{4x}} = \frac{e^{2x \cdot 3}}{e^{4x}} = \frac{e^{6x}}{e^{4x}} = e^{6x-4x} = e^{2x}$.

Esim. 2 Ratkaise yhtälö **a)** $e^{2x} = e$, **b)** $e^{-x} = 1$.

a) $e^{2x} = e \Leftrightarrow e^{2x} = e^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$,

b) $e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = e^0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2 Funktion $y = e^x$ derivaatta

Olemme edellä johtaneet e-kantaisen eksponenttifunktion derivoimissäännön.

e-kantaisen eksponenttifunktion derivoimissääntö

$$\mathrm{D}\, e^x = e^x.$$

Esim. 1 Laske **a)** $\mathrm{D}\,(x - e^x)$, **b)** $\mathrm{D}\,x^2e^x$, **c)** $\mathrm{D}\,\dfrac{x}{1-e^x}$.

a) $\mathrm{D}\,(x - e^x) = \mathrm{D}x - \mathrm{D}\,e^x = 1 - e^x$,

b) $\mathrm{D}\,x^2e^x = x^2\,\mathrm{D}e^x + e^x\,\mathrm{D}x^2 = x^2e^x + e^x\,2x = e^x(x^2 + 2x)$,

c) $\mathrm{D}\dfrac{x}{1-e^x} = \dfrac{(1-e^x)\mathrm{D}x - x\mathrm{D}(1-e^x)}{(1-e^x)^2} = \dfrac{1-e^x+xe^x}{(1-e^x)^2} = \dfrac{1+e^x(x-1)}{(1-e^x)^2}$.

Olkoon f derivoituva funktio. Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaan

$$\mathrm{D}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x).$$

Esim. 2 Laske **a)** $\mathrm{D}\,e^{-x}$, **b)** $\mathrm{D}\,e^{3x}$.

a) $\mathrm{D}\,e^{-x} = e^{-x}\,\mathrm{D}(-x) = -e^{-x}$,

b) $\mathrm{D}\,e^{3x} = e^{3x}\,\mathrm{D}(3x) = 3e^{3x}$.

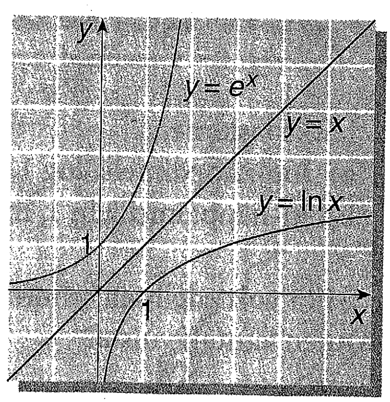
Luonnollinen logaritmi

Luonnollisen logaritmijärjestelmän eli *Neperin järjestelmän* kantaluku on e. Positiivisen luvun a luonnollinen logaritmi $\ln a$ on se eksponentti, johon kantaluku e on korotettava, jotta tulokseksi saadaan a.

Lyhenne ln tulee sanoista ”logarithmus naturalis”. Luonnollinen logaritmifunktio $y = \ln x$ ja e-kantainen eksponenttifunktio $y = e^x$ ovat toistensa käänteisfunktioita. Jos nimittäin $y = e^x$, niin $\ln y = \ln e^x = x$ ja siis $x = \ln y$. Jos taas $x = \ln y$, niin $e^x = e^{\ln y} = y$. Voimme esittää tämän käänteisfunktio-ominaisuuden myös muodossa

$$e^{\ln x} = x \ (x > 0), \qquad \ln e^x = x \ (x \in \mathbf{R}).$$

Kuvaaja



Luonnollisen logaritmifunktion derivoimissääntö

$$\mathrm{D}\ln x = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

Yhdistetyn funktion derivoimissäännön perusteella

$$\mathrm{D}\ln f(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x),$$

joten

$$\mathrm{D}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

mikäli f on derivoituva ja $f(x) > 0$.

Esim. 3 Derivoi **a)** $\ln(x^2+1)$, **b)** $\ln 3x$, **c)** $\ln\sqrt{1-2x}$.

a) $\mathrm{D}\ln(x^2+1) = \dfrac{\mathrm{D}(x^2+1)}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1} \quad (x \in \mathbf{R}).$

b) *Tapa 1*
Suoraan derivoimalla saamme

$$\mathrm{D}\ln 3x = \frac{\mathrm{D}(3x)}{3x} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

Tapa 2
Käytämme aluksi logaritmin laskusääntöjä ja derivoimme vasta sen jälkeen. Täten

$$\mathrm{D}\ln 3x = \mathrm{D}(\ln 3 + \ln x) = \mathrm{D}\ln x = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

c) *Tapa 1*

$$\mathrm{D}\ln\sqrt{1-2x} = \frac{\mathrm{D}\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}} = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,\frac{\mathrm{D}(1-2x)}{2\sqrt{1-2x}}$$
$$= \frac{-2}{2(1-2x)} = \frac{1}{2x-1} \quad (x < \tfrac{1}{2}).$$

Tapa 2
Koska $\ln\sqrt{1-2x} = \ln(1-2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(1-2x)$, niin kysytty derivaatta on

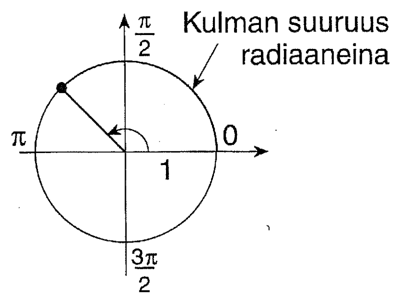
$$\mathrm{D}\,\frac{1}{2}\ln(1-2x) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{D}(1-2x)}{1-2x} = \frac{1}{2}\,\frac{-2}{1-2x} = \frac{1}{2x-1} \quad (x < \tfrac{1}{2}).$$

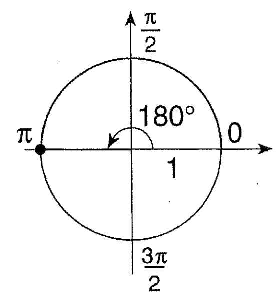
1 Kulman yksiköt

Geometriassa on kätevää ilmoittaa kulmien suuruudet asteina. Analyysissa taas on parempi ilmoittaa kulmat reaalilukuina, jotka osoittavat kulman suuruuden radiaaneina (ks. MT 4). Kulman suuruus radiaaneina on yksikköympyrän vastaavan kaaren pituuden mittaluku varustettuna kiertosuunnan etumerkillä. Kulma radiaaneina on näin määriteltynä dimensioton, mutta radiaanille voidaan käyttää myös lyhennettä rad.

Asteiden muuttamisen radiaaneiksi ja päinvastoin välittävät yhtälöt

$$180° = \pi, \qquad 1° = \frac{\pi}{180}, \qquad 1 = \frac{180°}{\pi}.$$





Esim. 1 a) $90° = \frac{\pi}{2}$, b) $45° = \frac{\pi}{4}$, c) $30° = \frac{\pi}{6}$, d) $-60° = -\frac{\pi}{3}$.

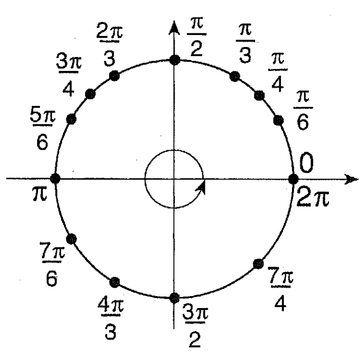
Esim. 2 a) $\frac{\pi}{18} = 10°$, b) $\frac{5\pi}{6} = 150°$, c) $\frac{3\pi}{4} = 135°$, d) $2\pi = 360°$.

Esim. 3 Merkitse yksikköympyrään radiaaneina kulmat, joiden suuruudet asteina ovat

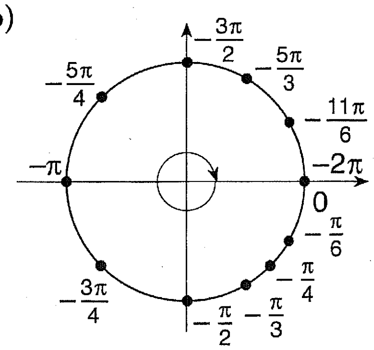
a) 0, 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150, 180, 210, 240, 270, 315 ja 360,

b) 0, –30, –45, –60, –90, –135, –180, –225, –270, –300, –330 ja –360.

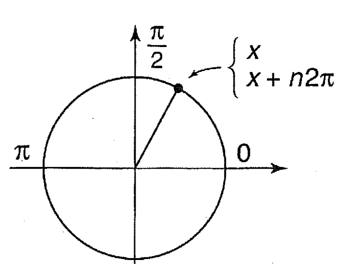
a)



b)



Kulman x kehäpiste pysyy samana, jos kulmaan lisätään täyden kulman $360° = 2\pi$ monikerta $n2\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$.

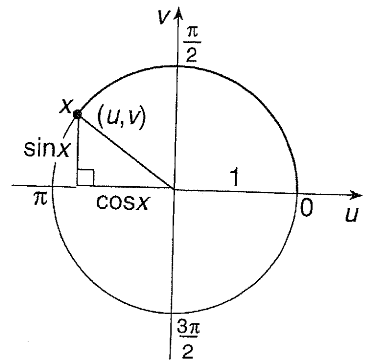


2 Funktiot $y = \sin x$, $y = \cos x$ ja $y = \tan x$

Palautamme mieleen trigonometristen funktioiden määritelmät. Olkoon kulmaa x vastaava uv-koordinaatiston yksikköympyrän kehäpiste (u, v).

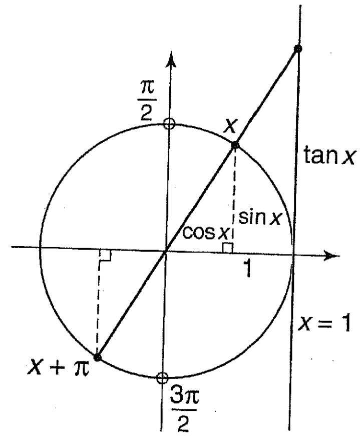
Reaaliluvun x (eli kulman, jonka suuruus radiaaneissa on x) sini ja kosini määritellään yhtälöillä

$$\cos x = u,$$
$$\sin x = v.$$



Luvun x (eli kulman x) tangentti määritellään yhtälöllä

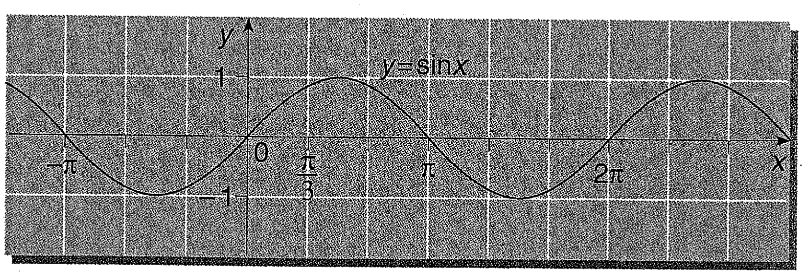
$$\tan x = \frac{v}{u} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$



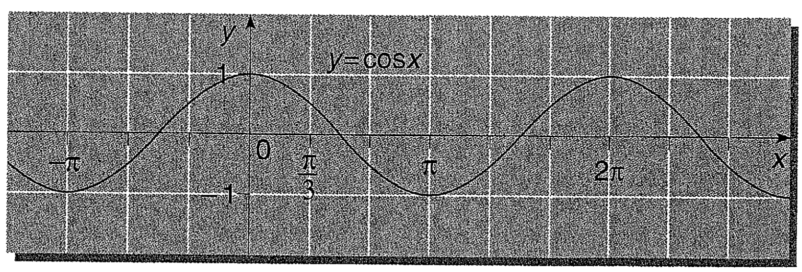
Määrittelyehtona on, että nimittäjä $\cos x \neq 0$ eli $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$.

Trigonometristen funktioiden kuvaajia piirrettäessä riittää tarkastella perusjakson pituista väliä eli sinillä ja kosinilla väliä $[0, 2\pi]$ ja tangentilla väliä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Muualla kuvaaja toistuu yhtenevänä.

x	$y = \sin x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	−1
2π	0



x	$y = \cos x$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	−1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1



Trigonometristen funktioiden derivoimissäännöt

$$\mathrm{D}\sin x = \cos x, \quad \mathrm{D}\cos x = -\sin x, \quad \mathrm{D}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi).$$

Koska

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

niin voimme kirjoittaa tangentin derivoimissäännön myös muotoon

$$\mathrm{D}\tan x = 1 + \tan^2 x.$$

Esim. 1 Laske funktion $f(x) = \sin x$ derivaatta kohdissa $0, \frac{2\pi}{3}$ ja $\frac{3\pi}{2}$.

Sijoittamalla derivaattafunktioon $f'(x) = \cos x$ saamme

$$f'(0) = \cos 0 = 1,\ f'(\frac{2\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},\ f'(\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0.$$

Esim. 2 Laske **a)** $\mathrm{D}(x - \cos x)$, **b)** $\mathrm{D}(x\sin x)$, **c)** $\mathrm{D}\frac{\sin x}{x}$.

a) $\mathrm{D}(x - \cos x) = \mathrm{D}x - \mathrm{D}\cos x = 1 - (-\sin x) = 1 + \sin x,$

b) $\mathrm{D}(x\sin x) = \sin x\,\mathrm{D}x + x\,\mathrm{D}\sin x = \sin x + x\cos x,$

c) $\mathrm{D}\frac{\sin x}{x} = \frac{x\,\mathrm{D}\sin x - \sin x\,\mathrm{D}x}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$

Esim. 3 Laske käyrälle $y = \tan x$ kohtaa $x = \frac{\pi}{4}$ vastaavan pisteen kautta kulkevan tangentin kulmakerroin.

Kulmakerroin on derivaatan $y' = 1 + \tan^2 x$ arvo sivuamiskohdassa.

Kysytty kulmakerroin on $y'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \tan^2\frac{\pi}{4} = 1 + 1^2 = 2.$

Jos trigonometrisella funktiolla on derivoituva sisäfunktio f, niin yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaan

$$\mathrm{D}\sin f(x) = f'(x)\cos f(x),\ \mathrm{D}\cos f(x) = -f'(x)\sin f(x),$$

$$\mathrm{D}\tan f(x) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x)(1 + \tan^2 f(x)) \quad (f(x) \neq \frac{\pi}{2} + n\pi).$$

HARJOITUKSIA III

1. Muodosta $(g \circ f)(x)$ ja $(f \circ g)(x)$, kun
   a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x^2$, b) $f(x) = x^2,\ g(x) = x^3$,

2. Määritä ulkofunktio g ja sisäfunktio f, kun
   a) $g(f(x)) = (3x-5)^2$, b) $g(f(x)) = \sqrt{4-x^2}$,

3. a) $D(4x-3)^2$, b) $D\left(\frac{x}{x-2}\right)^2$, c) $D(4-x^2)^3$, d) $D(1-\frac{2}{x^2})^3$.

4. Laske $\frac{dy}{dx}$, kun
   a) $y = u^6,\ u = x^4 - x^2$, b) $y = u^5,\ u = \frac{2x}{x-1}$,
   c) $y = \frac{1}{u},\ u = 2 - 3v,\ v = x^3 + 1$.

5. Olkoon $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{1}{x^2}$. Mikä on funktion $g \circ f$
   a) lauseke, b) määrittelyehto?

6. Olkoon funktio f derivoituva. Määritä g', kun $g(x)$ on
   a) $f(5-x)$, b) $f(x^2)$, c) $x f(2x)$,
   d) $f(\frac{1}{x})$, e) $f(f(x))$, f) $\frac{1}{f(2-x)}$.

7. Olkoon funktio f kaikkialla derivoituva ja kasvava. Millä x:n arvoilla funktio $g(x) = f(x^3 - 12x)$ on kasvava?

8. Oletetaan, että f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita. Määritä
   a) $g(3)$, kun $f(2) = 3$, b) $f(-4)$, kun $g(2) = -4$,
   c) $f(0)$, kun $g(-1) = 0$, d) $g(12)$, kun $f(-3) = 12$,
   e) $f(g(5))$, f) $g(f(0))$.

9. Oletetaan, että funktiolla f on käänteisfunktio g. Laske
   a) $g'(3)$, kun $f(0) = 3$ ja $f'(0) = 1$,
   b) $g'(-5)$, kun $f(-2) = -5$ ja $f'(-2) = -12$.

10. Funktio f määritellään seuraavasti: $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$, kun $x > 0$. Osoita, että käänteisfunktio f^{-1} on olemassa, ja määritä $(f^{-1})'(0)$. [S81]

11. a) $Dx^2\sqrt{x}$, b) $D\frac{1}{x\sqrt{x}}$, c) $D\frac{x^2}{\sqrt{x}}$, d) $D\frac{1+x}{\sqrt{x}}$.

12. Laske käyrälle $y = f(x)$ kohtaa x_0 vastaavaan pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin, kun
   a) $y = \sqrt{3-2x},\ x_0 = 1$, b) $y = \sqrt{x - x^2},\ x_0 = \frac{1}{2}$,
   c) $y = \sqrt{5 - x^4},\ x_0 = 1$, d) $y = \sqrt{x - \sqrt{x}},\ x_0 = 4$.

13. Millä x:n arvoilla funktio f on aidosti kasvava, kun $f(x)$ on

a) $2\sqrt{x} - x$, b) $\sqrt{2x - x^2}$?

14. Derivoi

a) xe^x, b) $x^3 e^x$, c) $\frac{x}{e^x}$,

d) $(x-1)e^{-2x}$, e) $\frac{e^x}{2 - e^x}$, f) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

15. Muodosta funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$ derivaatta ja tutki, millä x:n arvoilla se on negatiivinen. [K99]

16. Määritä käyrälle $y = 2x - 3e^{\frac{x}{2}}$ kohtaa $x = 0$ vastaavaan pisteeseen piirretyn tangentin yhtälö.

17. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = e^{-x} + x$ on kasvava?

Derivoi

18. a) $4 \ln x$, b) $\ln 4x$, c) $\ln x^4$, d) $(\ln x)^4$, e) $\ln \sqrt[4]{x}$, f) $x^4 \ln x$.

Derivoi

19. a) $\ln(x^2 - 3x)$, b) $\ln\sqrt{1 - x^2}$, c) $\ln\frac{x}{x-1}$,

d) $e^x \ln x$, e) $\ln(e^{2x} + 1)$, f) $\ln \cos x$.

20. Määritä funktion $f(x) = x^2 \ln x$ pienin ja suurin arvo välillä $[1, e]$.

21. On annettu funktiot $f(x) = e^{2x}$ ja $g(x) = \ln x$. Ratkaise yhtälö $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x^2)$. [K98]

Derivoi

22. a) $2 \cos 2x$, b) $2 \cos \frac{x}{2}$, c) $x \cos x$,

d) $\frac{\cos x}{x}$, e) $\sin^2 x + \cos^2 x$, f) $(\sin x + \cos x)^2$.

23. Derivoi

a) $\tan^2 x$, b) $\frac{1}{\tan x}$, c) $\frac{\tan x}{x}$,

Laske funktion f derivaatan nollakohdat välillä $[0, 2\pi]$, kun $f(x)$ on

24. a) $x - \cos x$, b) $2x - \sin x$, c) $x - \sin^2 x$.

25. Laske funktion f derivaatan nollakohdat välillä $[0, 2\pi]$, kun $f(x)$ on

a) $\sin 2x - 2 \sin x$, b) $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$, c) $\sin x \cos x$.

Määritä funktion f pienin ja suurin arvo, kun $f(x)$ on

26. a) $2 \sin x + \cos 2x$ [S96], b) $(1 - \cos^3 x)^3$ [K91].

27. Määritä funktion f pienin ja suurin arvo välillä $[0, \pi]$, kun $f(x)$ on

a) $\cos 3x + 3 \cos x$, b) $\sin x + \cos^2 x$.

IV a) INTEGRAALIFUNKTIO

b) PINTA-ALA JA MÄÄRÄTTY INTEGRAALI

c) YHTEYS INTEGRAALIFUNKTIOON

d) PINTA-ALA, TILAVUUS

Integraalifunktio

Olkoon funktio f määritelty välillä I. Funktio F on funktion f *integraalifunktio*, jos

$$F'(x) = f(x)$$

kaikilla $x \in I$.

Määritelmän perusteella integraalifunktio F on derivoituva ja siis myös jatkuva välin I jokaisessa pisteessä. Integraalifunktion määrittäminen eli *integroiminen* on derivoimisen käänteistehtävä. *On etsittävä funktio, kun sen derivaatta on annettu.*

Esim. 1 Funktio $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ on funktion $f(x) = x^2$ integraalifunktio, sillä kaikilla $x \in \mathbf{R}$ on

$$F'(x) = D(\tfrac{1}{3}x^3 + 5) = \tfrac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2 = f(x).$$

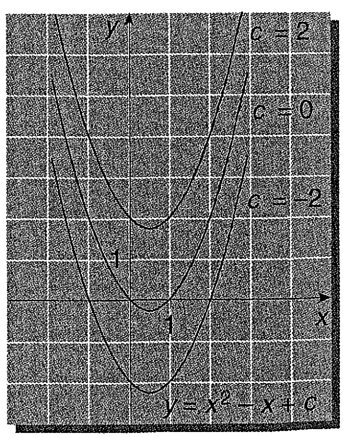
Annetun funktion integraalifunktiot

Olkoon F funktion f eräs integraalifunktio ja c vakio. Tällöin jokainen muotoa $F + c$ oleva funktio on f:n integraalifunktio. Muita integraalifunktioita f:llä ei ole, joten f:n jokainen integraalifunktio on muotoa $F + c$.

Seuraavassa c tarkoittaa mielivaltaista reaalivakiota. Sanomme sitä *integroimisvakioksi*. Sen arvo määräytyy *alkuehdon* perusteella.

Esim. 2 Määritä funktion $f(x) = 2x - 1$ integraalifunktioista **a)** kaikki, **b)** se, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(2, 1)$ kautta, **c)** se, jonka pienin arvo $= 2\frac{1}{4}$.

a) Funktion f eräs integraalifunktio on $F(x) = x^2 - x$. Täten f:n integraalifunktioiden joukko koostuu funktioista $G(x) = F(x) + c = x^2 - x + c$. Integraalifunktioiden kuvaajat eli *integraalikäyrät* saadaan toisistaan y-akselin suuntaisilla siirroilla.



Käytämme funktion f mielivaltaiselle integraalifunktiolle merkintää $\int f$ (lue: integraali f) ja sen arvolle kohdassa x merkintää $\int f(x)\mathrm{d}x$ (lue: integraali $f\,x\,d\,x$). Siis, jos F on jokin f:n integraalifunktio, niin

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Esim. 3 a) $\int (2x+1)\,\mathrm{d}x = x^2 + x + c.$
Tarkistus: $\mathrm{D}(x^2 + x + c) = 2x + 1.$

b) $\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + c.$
Tarkistus: $\mathrm{D}(\frac{1}{2}e^{2x} + c) = \frac{1}{2}\cdot 2e^{2x} = e^{2x}.$

Yleisesti on voimassa *potenssifunktion integroimissääntö*

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1).$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c.$$

Voimme soveltaa edellistä sääntöä vain sellaisille väleille, jotka eivät sisällä kohtaa $x = 0$. Integraalifunktion määritelmä nimittäin edellyttää, että integroitava funktio on määritelty tietyllä välillä.

Vakiotekijän siirtämistä koskevan derivoimissäännön nojalla *vakiotekijä voidaan siirtää integraalimerkin ohi*

$$\int c f(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esim. 3 a) $\int 6x^2\,\mathrm{d}x = 6\int x^2\,\mathrm{d}x = 6\cdot\frac{x^3}{3} + c = 2x^3 + c.$

b) $\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x| + c.$

Koska summa voidaan derivoida termeittäin, niin sama pätee myös integroinnissa. Toisin sanoen *summan integraali on yhteenlaskettavien integraalien summa*

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Edellä olevista säännöistä seuraa, että *polynomi voidaan integroida termeittäin.*

Potenssifunktion integroimissääntö

$\int x^a \,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1).$

Esim. 1 Määritä $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ ja tarkista tulos.

Koska $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ ja eksponentti $\neq -1$, niin voimme käyttää potenssin integroimissääntöä

$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$ (millä tahansa välillä, johon $x = 0$ ei kuulu).

Tarkistus: $D(-\frac{1}{x} + c) = D(-x^{-1} + c) = -(-1)x^{-2} + 0 = \frac{1}{x^2}.$

Potenssifunktion yleistetty integroimissääntö

$\int f(x)^a f'(x)\,dx = \dfrac{f(x)^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1).$

Tämän integroimissäännön avulla *ei voida* laskea integraalia $\int f(x)^a\,dx$, sillä sääntö soveltuu vain tapauksiin, joissa $f(x)^a$ on *kerrottu sisäfunktion f derivaatalla f'* eli joissa integroitava on muotoa $f(x)^a f'(x)$.

Esim. 6 $\int x(1-x^2)^2\,dx.$

Funktion $f(x) = 1 - x^2$ derivaatta $f'(x) = -2x$. Lavennamme integraalin vain vakiolla -2, sillä tekijä x on integroitavassa valmiina

$$\begin{aligned}\int x(1-x^2)^2\,dx &= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^2(-2x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int f(x)^2 f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{f(x)^{2+1}}{2+1} + c \\ &= -\frac{1}{6} f(x)^3 + c = -\frac{1}{6}(1-x^2)^3 + c.\end{aligned}$$

2 Eksponentti = −1

Olemme (s. 9) saaneet funktiolle $f(x) = x^a$ tapauksessa $a = -1$ integroimissäännön

$\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c$

(millä tahansa välillä, johon $x = 0$ ei kuulu).

Koska $\mathrm{D}\ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ niin yleisemmin

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int f(x)^{-1} f'(x)\,dx = \ln|f(x)| + c$$

(millä tahansa välillä, jossa $f(x) \neq 0$).

Esim. 3 $\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

Nimittäjän $f(x) = x^2 + 1$ derivaatta $f'(x) = 2x$ on osoittajana, joten

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c = \ln|x^2+1| + c.$$

Aina $x^2 + 1 > 0$, joten $|x^2+1| = x^2 + 1$, ja siis

$$\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \ln(x^2+1) + c.$$

Eksponenttifunktion integroimissääntö

$$\int e^x\,dx = e^x + c.$$

Esim. 1 $\int (1 - 2e^x)\,dx = x - 2e^x + c.$

Esim. 2 Määritä funktion $f(x) = e^x$ se integraalifunktio F, jolle $F(1) = 2$.

Integraalifunktio $F(x) = \int e^x\,dx = e^x + c$ toteuttaa alkuehdon $F(1) = 2$, kun $2 = e + c$ eli $c = 2 - e$. Kysytty integraalifunktio on siis $F(x) = e^x + 2 - e$.

Eksponenttifunktion yleistetty integroimissääntö

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c.$$

Esim. 4 $\int e^{3x}\,dx$.

Eksponentin $f(x) = 3x$ derivaatta $f'(x) = 3$ on vakio. Laventamalla 3:lla saamme

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot 3\,dx = \frac{1}{3}\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{1}{3}e^{f(x)} + c = \frac{1}{3}e^{3x} + c.$$

IV 5

Sini- ja kosinifunktion integroimissäännöt

$\int \cos x \, dx = \sin x + c,$ $\quad$ $\int f'(x) \cos f(x) \, dx = \sin f(x) + c,$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$ $\quad$ $\int f'(x) \sin f(x) \, dx = -\cos f(x) + c.$

Esim. 1 $\int \cos 2x \, dx.$

Merkitsemme $f(x) = 2x$, jolloin $f'(x) = 2$. Laventamalla 2:lla saamme

$$\begin{aligned}\int \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int f'(x) \cos f(x) \, dx = \frac{1}{2} \sin f(x) + c \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x + c.\end{aligned}$$

Tangenttifunktion derivoimissäännöstä $D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ saamme

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x + c$$

(millä tahansa välillä, johon ei kuulu mikään $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$).

***Esim. 5** $\int \tan^2 x \, dx.$

Lisäämällä ja vähentämällä integroitavassa luvun 1 saamme

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \, dx &= \int (1 + \tan^2 x - 1) \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \, dx - \int 1 \, dx \\ &= \tan x - x + c.\end{aligned}$$

***Esim. 6** $\int \sin x \cos x \, dx.$

Tapa 1 Funktiolle $f(x) = \cos x$ on $f'(x) = -\sin x$, joten

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos x \, dx &= -\int \cos x(-\sin x) \, dx \\ &= -\int f(x)^1 f'(x) \, dx = -\frac{f(x)^2}{2} + c \\ &= -\frac{1}{2} \cos^2 x + c.\end{aligned}$$

Tapa 2 Funktiolle $f(x) = \sin x$ on $f'(x) = \cos x$, joten

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos x \, dx &= \int f(x)^1 f'(x) \, dx = \frac{f(x)^2}{2} + c \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 x + c.\end{aligned}$$

IV 6

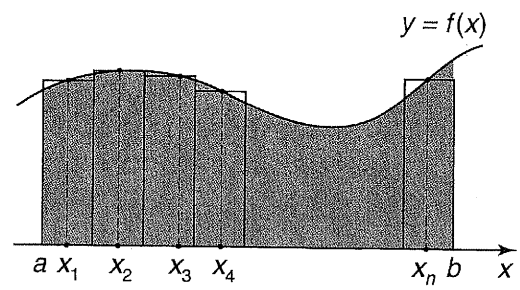
Porrassumma

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty funktio ja olkoon D tämän välin jako n yhtä suureen osaan, jolloin yhden jakovälin pituus $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Jakoon D liittyvä *porrassumma* eli *Riemannin summa* on

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x,$$

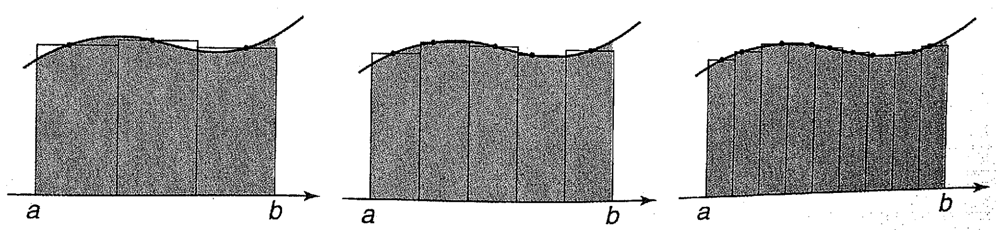
missä x_1 on valittu ensimmäiseltä jakoväliltä, x_2 toiselta, …, x_n viimeiseltä. Niiden ei tarvitse olla jakovälien keskikohtia.



Jos f on ei-negatiivinen, niin porrassumma ilmoittaa niistä suorakulmioista koostuvan monikulmion pinta-alan, joiden kanta on Δx ja korkeudet $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$.

Pinta-ala porrassummien raja-arvona

Olkoon funktio f jatkuva ja ei-negatiivinen välillä $[a, b]$. Tällöin sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrä $y = f(x)$, x-akseli sekä suorat $x = a$ ja $x = b$, saadaan porrassummien raja-arvona, kun jakoa tihennetään rajattomasti eli kun jakovälin pituus Δx lähenee nollaa.



Määrätty integraali

Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Funktion f *määrätty integraali* tällä välillä on porrassumman raja-arvo, kun välin $[a, b]$ jakoa tihennetään rajattomasti eli kun jakovälin pituus lähenee nollaa.

Määrättyä integraalia merkitään $\int_a^b f(x)\,dx$. (Lue: "määrätty integraali a:sta b:hen $f\,x\,d\,x$" tai lyhemmin "integraali a:sta b:hen $f\,x\,d\,x$".)

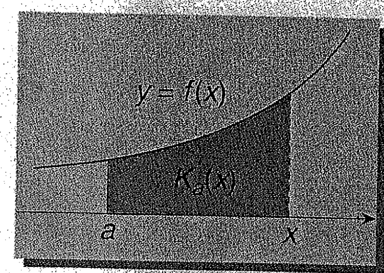
Integroimisvälin $[a, b]$ päätepisteet ovat *integroimisrajoja*: a on *alaraja* ja b *yläraja*.

Kertymäfunktio

Jatkuvan funktion f *kertymäfunktio* (*kohdasta* a) on

$$K_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (x > a).$$

Jos f on ei-negatiivinen, niin $K_a(x)$ ilmoittaa sen pinta-alan, joka "kertyy" käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin väliin siirryttäessä kohdasta a kohtaan x.



Lisäksi määritellään

$$K_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0.$$

Kertymäfunktion derivaatta

Jatkuvan funktion f kertymäfunktiolle $K_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ on $K_a' = f$.

Toisin sanoen K_a on f:n integraalifunktio. Lisäksi on voimassa alkuehto $K_a(a) = 0$.

Esim. 1 **a)** Määritä funktion $f(x) = 3x^2$ kertymäfunktio $K_1(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

b) Laske sen avulla i) $\int_1^2 3x^2\,dx$, ii) $\int_1^4 3x^2\,dx$.

a) Koska K_1 on f:n integraalifunktio, niin $K_1(x) = \int 3x^2 dx =$ $x^3 + c$. Integroimisvakion c saamme alkuehdosta $K_1(1) = 0$ Siis $1 + c = 0$, joten $c = -1$. Näin ollen $K_1(x) = x^3 - 1$.

b) i) $\int_1^2 3x^2\,dx = K_1(2) = 7$, ii) $\int_1^4 3x^2\,dx = K_1(4) = 63$.

Esim. 2 Derivoi **a)** $\int_0^x \sin t\,dt$, **b)** $\int_0^{x^2} \sin t\,dt$.

a) Koska $D\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$, niin $D\int_0^x \sin t\,dt = \sin x$.

b) Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaan

$$D\int_0^{x^2} \sin t\,dt = D\,K_0(x^2) = K_0'(x^2)2x = 2x\sin x^2.$$

IV 8

3 Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys

Olkoon f välillä $[a, b]$ jatkuva funktio ja F jokin sen integraalifunktio. Myös kertymäfunktio $K_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ on f:n integraalifunktio, joten $K_a(x) = F(x) + c$. Alkuehdosta $K_a(a) = 0$ saamme $F(a) + c = 0$ eli $c = -F(a)$. Siis $K_a(x) = F(x) - F(a)$. Valitsemalla $x = b$ saamme

$$K_a(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Määrätyn integraalin $\int^b f(t)\,dt$ arvon saamme siis muodostamalla f:n jonkin integraalifunktion F ja laskemalla sitten erotuksen $F(b) - F(a)$. Merkitsemme vielä

$$\Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

(merkintä $\Big/_a^b F(x)$ luetaan "sijoitus a:sta b:hen fx").

Merkitsemällä integroimismuuttujaa t:n sijasta x:llä saamme määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteyttä koskevan tärkeän tuloksen.

Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys

Olkoon F funktion f jokin integraalifunktio. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a).$$

Integraalifunktioksi F kannattaa valita se, jossa integroimisvakio $c = 0$.

Esim. 1 $\int_2^4 x\,dx = \Big/_2^4 \frac{x^2}{2} = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 8 - 2 = 6.$

Vakiotekijän siirtosääntö

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Summan määrätty integraali

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

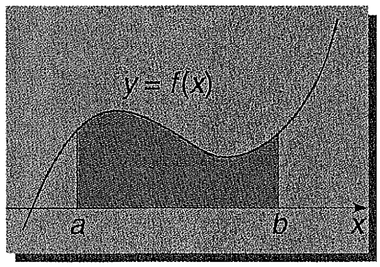
IV 9

1 Käyrän ja x-akselin välinen alue

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio. Sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrä $y = f(x)$, x-akseli ja suorat $x = a$ ja $x = b$ on

$$A = \int_a^b f(x)\,dx,$$

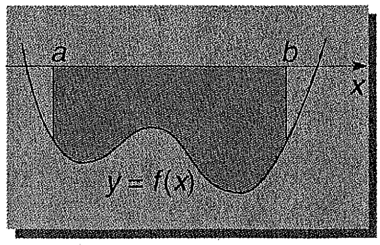
jos $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$,



ja

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

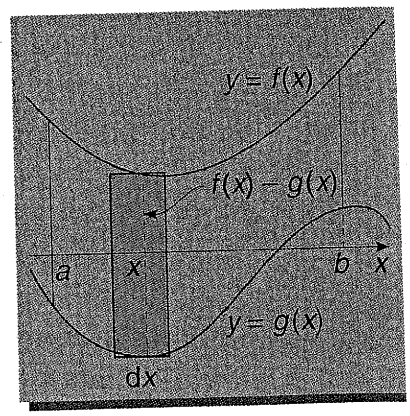
jos $f(x) \leq 0$ välillä $[a, b]$.



3 Kahden käyrän välinen alue

Tarkastelemme aluetta, jota rajoittavat käyrät $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ sekä suorat $x = a$ ja $x = b$. Oletamme, että välillä $[a, b]$ on $f(x) \geq g(x)$. Kohdassa x olevan pystysuoran pinta-alkion korkeus on $f(x) - g(x)$, joten $dA = (f(x) - g(x))\,dx$. Siis

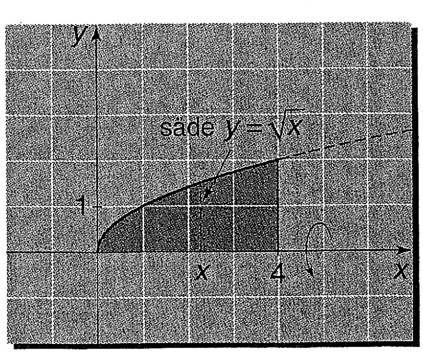
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



Pyörähdyskappaleen tilavuus (pyörähdys x-akselin ympäri)

$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Esim. 1 Käyrän $y = \sqrt{x}$, suoran $x = 4$ ja x-akselin rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen *pyörähdysparaboloidin segmentin* tilavuus.



Kysytty tilavuus on

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx$$

$$= \pi \Big/_0^4 \tfrac{1}{2}x^2 = 8\pi \approx 25{,}1.$$

HARJOITUKSIA IV

1. Osoita, että funktio

a) $F(x) = \sqrt{1-2x}$ on funktion $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ integraalifunktio,

b) $F(x) = 2x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x - 1$ on funktion $f(x) = 6x^2 - \frac{1}{2}x + 3$ integraalifunktio.

2. Onko F funktion f integraalifunktio, kun

a) $F(x) = x \ln x$, $f(x) = \ln x + 1$, b) $F(x) = 2\sin^2 x$, $f(x) = \sin 2x$?

3. Onko funktio

a) $F(x) = -\frac{1}{x}$ funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ integraalifunktio,

b) $F(x) = e^{-2x+1}$ funktion $f(x) = (-2x+1)e^{-2x+1}$ integraalifunktio?

4. Määritä funktio f, jonka integraalifunktio on

a) $F(x) = 2x^3 + 5x - 2$, b) $F(x) = (2x-3)^3$,

c) $F(x) = \sin 2x$, d) $F(x) = e^{-2x}$.

5. Määritä funktion f kaikki integraalifunktiot, kun $f(x)$ on

a) 3, b) $4x + 5$, c) $x^2 - 2x + 3$, d) $4x^3 + 4x - 4$.

6. Määritä funktion $f(x) = x - x^2$ se integraalifunktio, jonka maksimiarvo on 1.

7. Määritä funktion $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ se integraalifunktio, jonka maksimiarvo on 3. Mitä muita ääriarvoja tällä integraalifunktiolla on?

8. a) $\int (2-x)\,dx$, b) $\int (6x^2 - 2x)\,dx$, c) $\int (x^3 - 4x^2 + 3)\,dx$.

9. a) $\int \sqrt[4]{x}\,dx$, b) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$, c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

10. a) $\int \frac{x+2}{x}\,dx$, b) $\int \frac{x^2+2x}{x^3}\,dx$, c) $\int \frac{-3x^4+2x}{x^2}\,dx$.

11. a) $\int \frac{x+3}{x-2}\,dx$, b) $\int \frac{x^2+5}{x+1}\,dx$, c) $\int \frac{2x^3-4x}{x-2}\,dx$.

12. a) $\int \frac{1}{1-x}\,dx \ (x < 1)$, b) $\int \frac{1}{2x+1}\,dx \ (x < -\frac{1}{2})$, c) $\int \frac{3x^3}{x^4-4}\,dx$.

13. Määritä se funktio f, jolle $f'(x) = \frac{3}{x-1} + 2$, kun $x > 1$, ja $f(2) = 1$.

14. Määritä funktion $f(x) = \frac{3}{2-4x}$ $(x < \frac{1}{2})$ se integraalifunktio, joka saa kohdassa $x = \frac{2-e}{4}$ arvon 0.

15. a) $\int \frac{4}{e^x}\,dx$, b) $\int \frac{1}{e^{2x-1}}\,dx$, c) $\int \frac{2}{e^{3t}}\,dt$.

16. a) $\int (2+e^x)^2\,dx$, b) $\int \frac{2e^{3x}-4e^x}{4e^{2x}}\,dx$, c) $\int (e^u - \frac{1}{\sqrt{u}})(e^u + \frac{1}{\sqrt{u}})\,du$.

17. a) $\int \cos 3x\,dx$, b) $\int \sin 4t\,dt$, c) $\int \cos \frac{x}{2}\,dx$.

18. a) $\int \sin(-4x)\,dx$, b) $\int (\sin 3x - \cos 4x)\,dx$, c) $\int u \cos u^2\,du$.

19. a) $\int e^x(e^x-2)^2\,dx$, b) $\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$, c) $\int \frac{e^u}{(e^u-1)^3}\,du$.

20. Määritä funktio f, kun $f'(-x) = \cos x \sin^2 x$ ja $f(\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{8}$.

21. $D\int_1^x (t+1)\,dt$, b) $D\int_0^x e^t\,dt$, c) $D\int_0^x \cos t\,dt$.

22. $\int_1^2 x^{-4}\,dx$, b) $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^3}\,dx$, c) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (x-x^{-1})^2\,dx$ [S83].

23. $\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$, b) $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx$, c) $\int_0^4 (\sqrt{x}+1)^2\,dx$ [K80].

24. $\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx$, b) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2x}\,dx$, c) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x}\,dx$.

25. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx$, b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$, c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

26. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$, b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} |\sin x|\,dx$, c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}$ [S92].

27. Ratkaise yhtälö $\int_1^x \frac{1+t}{t}\,dt = x$, missä $x > 1$.

IV 12

28. Laske käyrän $y = x^2 - x^4$ ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala.

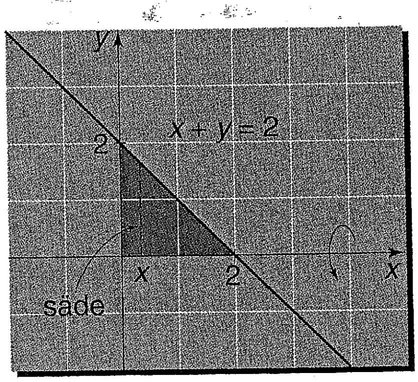
29. Laske sen kaksiosaisen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrä $y = x^3 - x^2 - 2x$ ja x-akseli.

30. Laske käyrän $y = \sqrt{x}$ sekä suorien $y = 0$ ja $x = 4$ rajoittaman alueen pinta-ala.

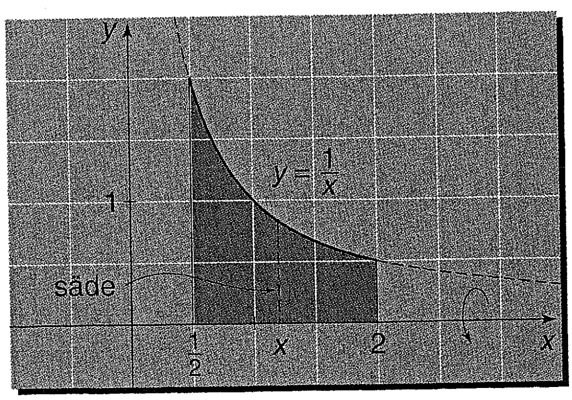
31. Laske **a**) integroimalla, **b**) muulla tavalla sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat koordinaattiakselit ja suora $bx + ay = ab$ $(a, b > 0)$.

32. Laske sen alueen ala, jota rajoittavat käyrä $y = \frac{1+x}{x^3}$, x-akseli sekä suorat $x = \frac{1}{3}$ ja $x = \frac{1}{2}$. [S88]

33. Suorien $x + y = 2$, $x = 0$ ja $y = 0$ rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.



34. Hyperbelin $y = \frac{1}{x}$, suorien $x = \frac{1}{2}$ ja $x = 2$ sekä x-akselin rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.



35. Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy, kun käyrän $y = e^x$, suorien $x = -1$ ja $x = 1$ sekä x-akselin rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri.

V OSITTAISDERIVAATTA

Kahden muuttujan funktio

Kahden muuttujan reaalifunktiolla tarkoitetaan kahden reaalisen muuttujan reaaliarvoista funktiota. Siis f on kahden muuttujan reaalifunktio, kun $f: A \times B \to C$ ja $A, B, C \subset \mathbb{R}$. Jos funktio f kuvaa lukuparin $(x,y) \in A \times B$ luvulle $z \in C$, ts. jos $f: (x,y) \mapsto z$, niin merkitään $z = f(x,y)$. Jos lukuparille (x,y) käytetään vektorimerkintää $\bar{u} = (x,y)$, niin $z = f(\bar{u})$. Kääntäen merkintä $z = f(x,y)$ luetaan "yhteyden $z = f(x,y)$ määrittelemä kahden muuttujan reaalifunktio f". Seuraavassa puhutaan lyhyesti kahden muuttujan funktiosta $f(x,y)$ tai pelkästään funktiosta $f(x,y)$.

Funktion $f(x,y)$ määrittelyjoukoksi valitaan laajin mahdollinen $\mathbb{R}^2$:n osajoukko, jos ei muuten määrätä.

ESIMERKKI. Määritä funktion f määrittelyjoukko, kun a) $f(x,y) = x^2 + y$, b) $f(x,y) = \sqrt{x - y}$,

Ratkaisu. a) Koska polynomi on kaikkialla määritelty ja sen arvot ovat aina reaalisia, niin $M_f = \mathbb{R}^2$.

b) Jotta neliöjuuren arvot olisivat reaalisia, niin juurrettavan on oltava ei-negatiivinen; siis $M_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$.

ESIMERKKI. Tutki, onko funktiolla $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ raja-arvoa pisteessä $(0,0)$.

Ratkaisu. Raja-arvon määritelmän perusteella täytyy funktion saada aina sama raja-arvo lähestymistiestä riippumatta. Jos lähestytään origoa pitkin suoraa $y = 0$, niin saadaan raja-arvoksi

$$\frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0 \xrightarrow[(x,0)\to(0,0)]{} 0.$$

Sen sijaan suoraa $y = x$ pitkin lähestyttäessä on raja-arvo

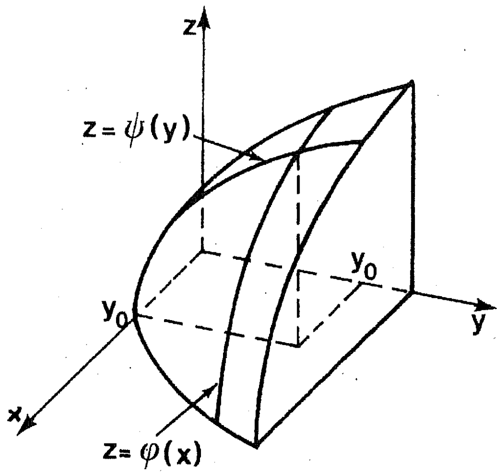
$$\frac{xx}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[(x,x)\to(0,0)]{} \frac{1}{2}.$$

Koska raja-arvo riippuu valitusta tiestä, niin funktiolla $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ ei ole raja-arvoa pisteessä $(0,0)$ määritelmän mielessä.

Osittaisderivaatat

Olkoon funktio $f(x,y)$ määritelty eräässä alueessa A. Tällöin funktiota $z = f(x,y)$ edustaa euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^3$ se pinta, jonka pisteet (x,y,z) toteuttavat yhtälön $z = f(x,y)$. Jos pidetään muuttujaa y vakiona, ts. asetetaan $y = y_0$, niin yhtälö $z = f(x,y_0)$ määrittelee erään pintaa $z = f(x,y)$ pitkin kulkevan anaruuskäyrän $z = \varphi(x)$. Se saadaan pinnan $z = f(x,y)$ ja tason $y = y_0$ leikkauskäyränä.

Nyt määritellään funktion $f(x,y)$ osittaisderivaatat. Raja-arvoa



$$f_x(x_0,y_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

(mikäli se on olemassa) kutsutaan funktion $z = f(x,y)$ osittaisderivaataksi muuttujan x suhteen pisteessä (x_0,y_0). Geometrisesti $f_x(x_0,y_0)$ ilmaisee käyrän $z = \varphi(x)$ tangentin kulmakertoimen pinnan $z = f(x,y)$ pisteessä (x_0,y_0,z_0), missä $z_0 = f(x_0,y_0)$.

Vastaavasti määritellään funktion $z = f(x,y)$ osittaisderivaatta toisen muuttujan y suhteen pisteessä (x_0,y_0) raja-arvona

$$f_y(x_0,y_0) := \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}.$$

Tällöin $f_y(x_0,y_0)$ antaa käyrän $z = \psi(y) := f(x_0,y)$ tangentin kulmakertoimen pinnan $z = f(x,y)$ pisteessä (x_0,y_0,z_0).

Yleensä käytetään osittaisderivaatoille seuraavia merkintöjä:
$f_x, \frac{\partial f}{\partial x}, D_x$ ja $f_y, \frac{\partial f}{\partial y}, D_y$.

Kahden muuttujan funktioiden derivointi palautuu yhden muuttujan tapaukseen, koska osittaisderivaattoja muodostettaessa derivoidaan aina vain yhden muuttujan suhteen toisen pysyessä vakiona. Kaikki derivoimissäännöt säilyvät ennallaam, vain merkinnät ovat hieman erilaisia. Siis on voimassa: Osittaisderivointi tapahtuu samojen sääntöjen mukaan kuin yhden muuttujan funktion derivointi.

ESIMERKKI. Määritä funktion $f(x,y) = \frac{x}{y}$ osittaisderivaatat.

Ratkaisu. Rationaalifunktion derivoimissääntöjen mukaan saadaan

$$f_x(x,y) = D_x\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \quad \text{ja} \quad f_y(x,y) = D_y\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}.$$

Funktiosta $z = f(x,y)$ voidaan muodostaa myös ns. korkeamman kertaluvun osittaisderivaattoja. Mikäli funktio f on kyllin säännöllinen, niin saadaan toisen kertaluvun osittaisderivaatat:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Tässä esimerkiksi symboli f_{xy} tarkoittaa, että funktio $f(x,y)$ on ensin derivoitu muuttujan x ja sitten muuttujan y suhteen; siis f_{xy} on funktion f_x osittaisderivaatta muuttujan y suhteen. Vastaavasti muodostetaan muita korkeamman kertaluvun osittaisderivaattoja; esimerkiksi f_{xyy} on kolmannen kertaluvun osittaisderivaatta, joka saadaan funktiosta $f(x,y)$ derivoimalla se ensin x:n suhteen ja sitten kahdesti y:n suhteen.

Tietyin edellytyksin nämä sekaderivaatat ovat riippumattomia derivoimisjärjestyksestä.

LAUSE 2 (Schwarzin lause). Jos funktion $f(x,y)$ osittaisderivaatat f_{xy} ja f_{yx} ovat jatkuvia pisteessä $\bar{u}_0$, niin pätee

$$f_{xy}(\bar{u}_0) = f_{yx}(\bar{u}_0).$$

Tämä lause on nimetty saksalaisen K. Schwarzin (1843-1921) mukaan, mutta lauseen erikoistapauksesta oli selvillä jo ranskalainen A. Clairaut (1713-1765). Todistus sivuutetaan (ks. todistusta [6], III luku).

ESIMERKKI. Muodosta kaikki funktion f toisen kertaluvun osittaisderivaatat, kun $f(x,y) = x^5y^3 - \cos x \sin y$.

Ratkaisu. Määritetään ensin ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat:

$$f_x(x,y) = 5x^4y^3 + \sin x \sin y, \quad f_y(x,y) = 3x^5y^2 - \cos x \cos y.$$

Muodostetaan edelleen toisen kertaluvun osittaisderivaatat:

$$f_{xx}(x,y) = 20x^3y^3 + \cos x \sin y, \quad f_{xy}(x,y) = 15x^4y^2 + \sin x \cos y,$$

$$f_{yx}(x,y) = 15x^4y^2 + \sin x \cos y, \quad f_{yy}(x,y) = 6x^5y + \cos x \sin y.$$

Sovellutusten kannalta tärkeä käsite "gradientti" määritellään osittaisderivaattojen avulla. Oletetaan, että funktiolla $f(x,y)$ on osittaisderivaatat pisteessä (x,y). Funktion $f(x,y)$ gradientiksi kutsutaan sitä vektoria, jonka komponentit ovat funktion $f(x,y)$ osittaisderivaatat; merkitään grad $f(x,y)$ tai $\nabla f(x,y)$. Siis

$$\text{grad } f(x,y) := f_x(x,y)\bar{i} + f_y(x,y)\bar{j}.$$

ESIMERKKI. Määritä funktion $f(x,y) = xe^y$ gradientti pisteessä $(2,0)$.

Ratkaisu. Osittaisderivaatat ovat $f_x(x,y) = e^y$ ja $f_y(x,y) = xe^y$, ja edelleen $f_x(2,0) = 1$ ja $f_y(2,0) = 2$. Siis kysytty gradientti on grad $f(2,0) = \bar{i} + 2\bar{j}$.

Ääriarvot

Funktiolla $f(\bar{u})$ sanotaan olevan pisteessä $\bar{u}_0$ paikallinen maksimi (vastaavasti paikallinen minimi), jos on olemassa pisteen $\bar{u}_0$ ympäristö $B(\bar{u}_0)$ siten, että jokaisella $\bar{u} \in B(\bar{u}_0)$ pätee

$$f(\bar{u}) \leq f(\bar{u}_0) \quad (\text{vast. } f(\bar{u}) \geq f(\bar{u}_0)).$$

Näitä kutsutaan funktion f paikallisiksi ääriarvoiksi ja pisteitä, joissa ääriarvo saavutetaan, ääriarvopisteiksi.

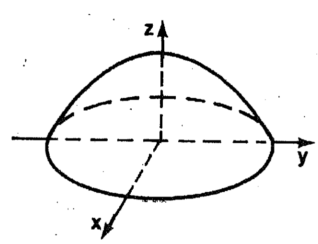
ESIMERKKI. Osoita, että funktiolla $f(x,y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$ on paikallinen maksimi pisteessä $(0,0)$.

Todistus. Olkoon $(x,y) \neq (0,0)$ ympyrän $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6}$ sisällä oleva piste

eli $(x,y) \in B'_\varepsilon(\bar{0})$ missä $\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$. Silloin $\sin(x^2 + y^2) > 0$ ja edelleen

$$f(x,y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2) < \frac{1}{2}.$$

Koska $f(0,0) = \frac{1}{2}$, niin väite on todistettu. □



<u>LAUSE 8</u> (välttämätön ehto ääriarvolle). Olkoon kahden muuttujan funktiolla $f(\bar{u})$ pisteessä $\bar{u}_0$ ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat. Välttämätön ehto ääriarvon olemassaololle pisteessä $\bar{u}_0$ on osittaisderivaattojen häviäminen:

$$f_x(\bar{u}_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f_y(\bar{u}_0) = 0.$$

Todistus. Tehdään vastaoletus, että toinen derivaatoista ei häviä ääriarvopisteessä $\bar{u}_0$, esimerkiksi $f_x(\bar{u}_0) \neq 0$. Merkitään $\bar{u}_0 = (x_0,y_0)$; otetaan käyttöön vain muuttujasta x riippuva funktio $x \mapsto \varphi(x) := f(x,y_0)$. Koska $\varphi'(x_0) = f_x(x_0,y_0) \neq 0$, niin funktio φ saa jokaisessa pisteen x_0 ympäristössä sekä suurempia että pienempiä arvoja kuin $\varphi(x_0)$; siis funktiolla f ei ole ääriarvoa pisteessä $\bar{u}_0$. RR! $\square$

Tämän lauseen avulla voidaan käsitellä jo joitakin ääriarvotehtäviä.

<u>ESIMERKKI</u>. Määritä funktion $f(x,y) = (1 + y^2)x^2 + (2x + 1)y^2 + 1$ ääriarvot.

Ratkaisu. Lasketaan ensin funktion f osittaisderivaatat $f_x(x,y) = 2(x + xy^2 + y^2)$, $f_y(x,y) = 2y(x^2 + 2x + 1)$ ja määritetään niiden yhteiset nollakohdat

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Lauseen 8 perusteella on $(0,0)$ ainoa mahdollinen ääriarvopiste. Koska jokaisella $x,y \in \mathbb{R}$ pätee arvio

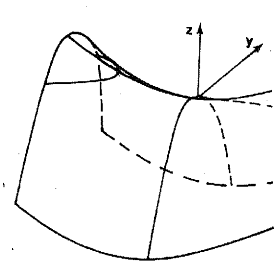
$$f(x,y) = (1 + y^2)x^2 + (2x + 1)y^2 + 1 = y^2(x + 1)^2 + x^2 + 1 \geq 1,$$

niin funktiolla f on paikallinen minimi $f(0,0) = 1$.

Mutta lauseen 8 ehto ei ole riittävä, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

<u>ESIMERKKI</u>. Määritä funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$ ääriarvot.

Ratkaisu. Koska $f_x(x,y) = 2x$ ja $f_y(x,y) = -2y$, niin lauseen 8 nojalla on $(0,0)$ ainoa mahdollinen ääriarvopiste. Mutta $f(0,0) = 0$ ei ole paikallinen ääriarvo, koska mielivaltaisen lähellä origoa funktio f saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Siis funktiolla f ei ole ääriarvoja.



Oheinen kuva osoittaa, että origo on pinnan $z = x^2 - y^2$ ns. <u>satulapiste</u>.

Seuraavassa lauseessa esitetty riittävä ehto ääriarvojen olemassaololle otetaan todistamatta käyttöön (ks. todistusta varten [6], IV luku). Tällöin käytetään toisen kertaluvun osittaisderivaattojen determinanteille lyhennysmerkintää

$$J(\bar{u}_0) := \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{u}_0) & f_{xy}(\bar{u}_0) \\ f_{yx}(\bar{u}_0) & f_{yy}(\bar{u}_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(\bar{u}_0)\cdot f_{yy}(\bar{u}_0) - [f_{xy}(\bar{u}_0)]^2.$$

LAUSE 9 (riittävä ehto ääriarvolle). Olkoon $f(\bar{u})$ kahden muuttujan funktio, jolla on pisteessä $\bar{u}_0$ jatkuvat ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

a) Jos $f_x(\bar{u}_0) = f_y(\bar{u}_0) = 0$ ja $J(\bar{u}_0) > 0$, niin $\bar{u}_0$ on funktion f ääriarvopiste. Jos lisäksi pätee $f_{xx}(\bar{u}_0) < 0$ (vastaavasti $f_{xx}(\bar{u}_0) > 0$), niin kyseessä on paikallinen maksimi (vastaavasti minimi).

b) Jos $f_x(\bar{u}_0) = f_y(\bar{u}_0) = 0$ ja $J(\bar{u}_0) < 0$, niin piste $\bar{u}_0$ ei ole funktion f ääriarvopiste.

ESIMERKKI. Määritä funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ääriarvot.

Ratkaisu. Lasketaan ensin osittaisderivaatat $f_x(x,y) = 3x^2 + 3y$ ja $f_y(x,y) = 3y^2 + 3x$; näiden yhteiset nollakohdat ovat

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x + y^2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = 3$ ja $f_{yy}(x,y) = 6y$. Tutkitaan lauseen 9 avulla pisteet $(0,0)$ ja $(-1,-1)$:

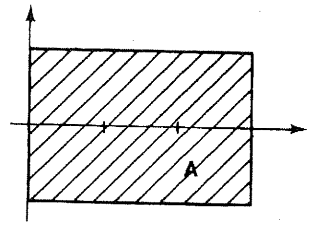
Pisteessä $(0,0)$ saadaan $J(0,0) = 0\cdot 0 - 3^2 = -9 < 0$, joten $(0,0)$ ei ole funktion f ääriarvopiste.

Pisteessä $(-1,-1)$ tulee $J(-1,-1) = (-6)(-6) - 3^2 = 27 > 0$. Koska lisäksi $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$, niin funktion f paikallinen maksimi on $f(-1,-1) = 1$.

Usein ääriarvotehtävä esiintyy muodossa "Määritä jatkuvan funktion $f(x,y)$ suurin ja pienin arvo joukossa A". Tällä tehtävällä ei ole aina ratkaisua. Mutta jos A on kompakti niin kyseisellä tehtävällä on lauseen 1 mukaan ratkaisu. Tällöin suurin ja pienin arvo saavutetaan joko alueen sisällä tai reunalla. Siksi lasketaan ensin funktion $f(x,y)$ osittaisderivaattojen yhteiset nollakohdat alueen sisällä ja sitten määritetään reunalla saavutettavat ääriarvopisteet.

ESIMERKKI. Määritä funktion $f(x,y) = x^2 - 4x + 6y^2 + 1$ suurin ja pienin arvo joukossa $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \le 1 \wedge 0 \le x \le 3\}$.

Ratkaisu. Tutkitaan ensin alueen sisäosa: Funktion $f(x,y)$ osittaisderivaattojen yhteiset nollakohdat ovat



$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x - 4 = 0 \\ f_y(x,y) = 12y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Siis alueen sisällä on ainoa mahdollinen ääriarvopiste $(2,0)$, jossa $\underline{f(2,0) = -3}$.

Tutkitaan alueen reuna: Kyseessä on suorakulmio, jonka sivuina ovat suorat $y = 1$, $y = -1$, $x = 0$ ja $x = 3$. Sivulla $y = 1$ $(0 \le x \le 3)$ saadaan funktiosta $f(x,y)$ yhden muuttujan funktio $z = f(x,1) = x^2 - 4x + 7$, jonka derivaatan $D(x^2 - 4x + 7) = 2x - 4$ nollakohdassa $x = 2$ saadaan $\underline{f(2,1) = 3}$. Sivulla $y = -1$ $(0 \le x \le 3)$ tulee sama funktio $z = f(x,-1) = x^2 - 4x + 7$ kuin edellä. Sivulla $x = 0$ $(-1 \le y \le 1)$ saadaan funktio $z = f(0,y) = 6y^2 + 1$, jonka derivaatan $D(6y^2 + 1) = 12y$ nollakohdassa $y = 0$ pätee $\underline{f(0,0) = 1}$. Sivulla $x = 3$ $(-1 \le y \le 1)$ saadaan funktio $z = f(3,y) = 6y^2 - 2$, jonka derivaatan $D(6y^2 - 2) = 12y$ nollakohta on $y = 0$; tällöin pätee $\underline{f(3,0) = -2}$.

Lopuksi lasketaan funktion arvot alueen kulmapisteissä: $\underline{f(0,1) = f(0,-1) = 7}$ ja $\underline{f(3,1) = f(3,-1) = 4}$.

Valitaan alleviivatuista funktion arvoista suurin ja pienin. Siis joukossa A funktion $f(x,y)$ suurin arvo on $f(0,1) = f(0,-1) = 7$ ja pienin arvo $f(2,0) = -3$.

Harjoituksia

MÄÄRITÄ SEURAAVIEN FUNKTIOIDEN KAIKKI OSITTAISDERIVAATAT ANNETUSSA PISTEESSÄ.

1. $f(x,y) = x - y + 2, \quad (3,2)$

2. $f(x,y) = xy + x^2, \quad (2,0)$

3. $f(x,y,z) = x^3y^4z^5, \quad (0,-1,-1)$

4. $g(x,y,z) = \dfrac{xz}{y+z}, \quad (1,1,1)$

OSOITA, ETTÄ ANNETTU FUNKTIO TOTEUTTAA ANNETUN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖN

5. $z = x e^y, \quad x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$

6. $z = \frac{x+y}{x-y}, \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

7. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$

8. $w = x^2 + yz, \quad x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 2w$

9. $w = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = -2w$

10. $z = f(x^2 + y^2)$, where f is any differentiable function of one variable,

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

11. $z = f(x^2 - y^2)$, where f is any differentiable function of one variable,

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

MÄÄRITÄ KAIKKI TOISEN KERTALUVUN OSITTAIS-DERIVAATAT SEURAAVISSA TAPAUKSISSA

12. $z = x^2(1 + y^2)$

13. $w = x^3 y^3 z^3$

14. $f(x, y) = x^2 + y^2$

15. $z = \sqrt{3x^2 + y^2}$

TUTKI KRIITTISET PISTEET

V 9

16. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

17. $f(x, y) = xy - x + y$

18. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

19. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

20. $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$

21. MÄÄRITÄ FUNKTION $f(x,y) = x - x^2 + y^2$ SUURIN JA PIENIN ARVO SUORAKAITEESSA $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.

22. MÄÄRITÄ FUNKTION $f(x,y) = xy - 2x$ SUURIN JA PIENIN ARVO SUORAKAITEESSA $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

TAMPEREEN YLIOPISTO
MTL/Matematiikka
Johdatus analyysiin
Uusintakoe 20.11.2008

Vastaa kaikkiin viiteen kysymykseen.

K1T1 1. (a) Anna esimerkki sellaisesta funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on epäjatkuva kohdassa $x = 1$ ja jatkuva kaikkialla muualla. Perustele vielä funktion f epäjatkuvuus kohdassa $x = 1$ nojautumalla kurssilla esitettyihin jatkuvuusominaisuuksiin. (3p)

(b) Anna esimerkki sellaisesta funktiosta $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on jatkuva kaikkialla ja derivoituva kaikkialla muualla paitsi kohdassa $x = 1$. Perustele vielä funktion g jatkuvuus ja ei-derivoituvuus kohdassa $x = 1$ kurssilla esitettyihin jatkuvuus- ja derivoituvuusominaisuuksiin nojautuen. (3p)

K1T2 2. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = ax + b$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Olkoon $c \in \mathbb{R}$. Osoita funktion derivaatan määritelmän avulla, että $f'(c) = a$. (6p)

K1T3 3. (a) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä

$$f(x) = e^{\sin x}$$

jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Määritä funktion f derivaatan nollakohdat. (3p)

(b) Oletetaan, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva ja aidosti kasvava kaikkialla. Määritellään funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä $g(x) = f(x^2 + 1)$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Millä muuttujan x arvoilla funktio g on aidosti kasvava? (3p)

K1T4 4. Funktion $f(x) = |x^3 - 4x^2 + 3x|$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat tasosta kaksi äärellistä aluetta. Määritä näiden alueiden yhteenlaskettu pinta-ala. (6p)

K1T5 5. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$.

(a) Määritä funktion f ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat. (2p)

(b) Määritä funktion f pienin ja suurin arvo suorakulmiossa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3 \quad \text{ja} \quad 0 \leq y \leq 2\}$. (4p)

Kysymyspaperit saa pitää. Tehtävien ratkaisut jaetaan tentistä lähtiessä. Muista vastata myös kurssikyselyyn.

TAMPEREEN YLIOPISTO
MTL/Matematiikka
Johdatus analyysiin
Uusintakoe 20.11.2008

Vastaa kaikkiin viiteen kysymykseen.

KZT1 1. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{kun} \quad x < 2 \\ x^2 - x + 2, & \text{kun} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Tutki funktion f jatkuvuutta kohdassa $x = 2$. (3p)

(b) Tutki funktion f derivoituvuutta kohdassa $x = 2$. (3p)

KZT2 2. Määritä funktion

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$$

suurin ja pienin arvo välillä $[4, 10]$. (6p)

KZT3 3. (a) Oletetaan tunnetuksi, että funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä $f(x) = x^5 + 2$, on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Määritä $(f^{-1})'(1)$. (3p)

(b) Oletetaan, että funktiot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat derivoituvia ja aidosti kasvava kaikkialla. Määritellään funktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä $h(x) = f(g(-x))$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Millä muuttujan x arvoilla funktio h on aidosti kasvava?

KZT4 4. (a) Määritä

$$\int \frac{dx}{(3x + 1)^5}.$$

(3p)

(b) Laske

$$\int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x})dx.$$

(3p)

KZT5 5. Olkoon $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä $f(x, y) = \sin x \cos x + xy^2$.

(a) Määritä funktion f kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat. (4p)

(b) Määritä $\nabla f(\pi,0)f$ grad (funktion f gradientti pisteessä $(\pi,0)$. (2p)

Kysymyspaperit saa pitää. Tehtävien ratkaisut jaetaan tentistä lähtiessä.

TAMPEREEN YLIOPISTO
MTL/Matematiikka
Johdatus analyysiin
Tentti 15.1.2009

Vastaa kaikkiin viiteen kysymykseen (viimeinen kysymys kääntöpuolella).

K3T1 1. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$, missä a on reaalinen vakio ja

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + 1}{x+1}.$$

(a) Miten vakio a tulee määrätä, jotta funktiolla f on äärellinen raja-arvo kohdassa $x = -1$? (5p)

(b) Miten $f(-1)$ kannattaa nyt määritellä, jos funktiosta f halutaan kaikilla reaaliluvuilla määritelty ja kaikkialla jatkuva funktio? (1p)

K3T2 2. Määritä

(a)

$$D \sin(1-x)\cos(1+x) \quad (3p)$$

(b)

$$D\frac{e^x - 1}{x+1}. \quad (3p)$$

K3T3 3. Olkoon $f :]-2, \infty[\to \mathbb{R}$, missä $f(x) = \ln(x+2) - 3$.

(a) Osoita, että funktiolla f on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \to]-2, \infty[$. (3p)
(Vihje: Osoita, että f on kaikkialla aidosti monotoninen.)

(b) Huomataan, että $f(-1) = -3$. Mitä on $f^{-1}(-3)$? (1p)

(c) Määritä funktion f^{-1} lauseke. (2p)
(Vihje: Ratkaise x yhtälöstä $y = \ln(x+2) - 3$ ja vaihda muuttujien roolit.)

K3T4 4. (a) Määritä funktion $f(x) = x + \sin x$ se integraalifunktio, joka saa kohdassa $x = 2\pi$ arvon -1. (3p)

(b) Tutki, onko funktio

$$F(x) = (x - \sin x)(x + \sin x) + (x - \cos x)(x + \cos x)$$

funktion $f(x) = 4x$ integraalifunktio. (3p)

K3T5 5. Olkoon $f : M_f \to \mathbb{R}$, missä $M_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ja

$$f(x, y) = \frac{x}{y} - xy.$$

(a) Mikä on funktion f määrittelyjoukko M_f? Piirrä myös kuva joukosta M_f. (2p)

(b) Määritä ne pisteet, joissa funktion f molemmat osittaisderivaatat saavat arvon 0 (eli potentiaaliset ääriarvokohdat). (4p)

TAMPEREEN YLIOPISTO
MTL/Matematiikka
Johdatus analyysiin
Tentti 2.4.2009

Vastaa kaikkiin viiteen kysymykseen (loput kääntöpuolella).

K4T1 1. Olkoon $M_f \subseteq \mathbb{R}$. Määritellään funktio $f : M_f \to \mathbb{R}$ lausekkeella

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x}.$$

(a) Mikä on funktion f (laajin mahdollinen) määrittelyjoukko M_f, kun f määritellään tällä tavalla? (1p)

(b) Onko f jatkuva määrittelyjoukossaan? (1p)

(c) Onko f derivoituva määrittelyjoukossaan? (1p)

(d) Määritä raja-arvot $\lim_{x\to -1} f(x)$,$\lim_{x\to 0} f(x)$ ja $\lim_{x\to 1} f(x)$ (mikäli ne ovat olemassa). (3p)

K4T2 2. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on parillinen, mikäli $f(-x) = f(x)$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Jos taas $f(-x) = -f(x)$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$, niin f on pariton.

(a) Olkoon $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = |x + 1|$ ja $f_3(x) = \frac{3}{x} + 2x$. Tutki, mitkä funktioista f_1,f_2 ja f_3 ovat parillisia ja mitkä parittomia. (3p)

(b) Oletetaan, että funktio g on parillinen, funktio h on pariton ja kumpikin on derivoituva kaikkialla. Osoita, että funktion g derivaattafunktio g' on pariton ja funktion h derivaattafunktio h' on parillinen. (3p)
(Vihje: Kirjoita yllä olevan määritelmän mukaiset yhtälöt g:lle ja h:lle ja derivoi ne puolittain.)

(c) Bonuskysymys (mahdollisuus kahteen ylimääräiseen pisteeseen). Funktion voi päätellä parilliseksi tai parittomaksi myös sen kuvaajan avulla. Miten? (+2p)

K4T3 3. Määritä $f'(x)$, kun

(a)
$$f(x) = e^{x^2+x} + x \sin x \quad (2p)$$

(b)
$$f(x) = x^5 - \frac{\cos x}{x} \quad (2p)$$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{\ln \frac{1}{x}}. \quad (2p)$$

K4T4 4. (a) Määritä jokin funktion $f(x) = 2x^3 - e^{-x} - \sin x$ sellainen integraalifunktio, joka ei milloinkaan saa negatiivisia arvoja. Perustele vastauksesi. (3p)

(b) Urpo ja Osmo ovat saaneet tehtäväksi määrätä erään funktion f kaikki integraalifunktiot. Urpo saa vastaukseksi käyräparven $F(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$, missä $C \in \mathbb{R}$. Osmon mielestä taas integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x + C$, missä $C \in \mathbb{R}$. Kumpikin väittää laskeneensa oikein. Selitä, mistä tämä 'ristiriita' johtuu. (3p)

K5T5 5. Tarkastellaan kuvan mukaista suorakulmaista särmiötä, jonka mitat ovat x, y ja z (pituusyksikköä) ja jonka tilavuus on 1 (tilavuusyksikkö).

(a) Muodosta kahden muuttujan funktio $f(x, y)$, josta saadaan särmiön ulkopinta-ala (eli kaikkien tahkojen yhteenlaskettu ala) parametrien x ja y funktiona. (2p)
(Vihje: Ala riippuu tietenkin kaikista parametreista x, y ja z, mutta käyttämällä tietoa tilavuudesta saadaan z ilmaistua x:n ja y:n avulla.)

(b) Miten funktion f määrittelyjoukkoa M_f, missä $M_f \subseteq \mathbb{R}^2$, kannattaa rajata, jotta sillä olisi aina mielekäs tulkinta ja myös tilavuutta koskeva ehto toteutuu? (1p)

(c) Määritä funktion f ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ja ratkaise niiden yhteiset nollakohdat (1 kpl). Millainen särmiö on tällöin kyseessä? (3p)