Heikki Junnila

DISKREETTIÄ MATEMATIIKKAA.

LUKU I JOUKOT JA RELAATIOT

LUKU II JOUKKOJEN KOKO

LUKU III SUHTEIKOT JA VERKOT

LUKU IV VERKON RENKAAT

LUKU V PUUT

LUKU I

Joukot ja relaatiot

0. Merkinnöistä.

Merkinnällä $a \in A$ tarkoitamme, että *a on joukon A alkio* eli *a kuuluu joukkoon A*. Jos a ei kuulu joukkoon A, niin merkitsemme $a \notin A$.

Joukko on alkioidensa muodostama kokonaisuus: $A = \{a : a \in A\}$; täten kaksi joukkoa A ja B ovat samat, $A = B$, jos ja vain jos A:lla ja B:llä on samat alkiot.

Tyhjä joukko on se joukko, jolla ei ole yhtään alkiota; tyhjästä joukosta käytetään merkintää $\emptyset$. *Yksiö* on sellainen joukko, jolla on täsmälleen yksi alkio, eli muotoa $\{a\}$ oleva joukko.

Jos A ja B ovat sellaisia joukkoja, että jokainen joukon B alkio on joukon A alkio, niin sanomme, että B on A:n *osajoukko* ja merkitsemme $B \subset A$ tai $A \supset B$. Jos on voimassa $B \subset A$ ja $B \neq A$, niin sanotaan, että B on A:n *aito osajoukko* ja käytetään merkintää $B \subsetneqq A$.

Kahden joukon A ja B *yhdistysjoukko* (lyhyesti: A:n ja B:n *yhdiste*) on joukko $A \cup B = \{x : x \in A \text{ tai } x \in B\}$, siis niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat joko joukkoon A tai joukkoon B (tai molempiin). Joukkojen A ja B *leikkausjoukko* (lyhyesti: A:n ja B:n *leikkaus*) on joukko $A \cap B = \{x : x \in A \text{ ja } x \in B\}$, siis niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat sekä joukkoon A että joukkoon B. Joukkojen A ja B *erotusjoukko* (lyhyesti: A:n ja B:n *erotus*) on joukko $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ja } x \notin B\}$, siis niiden joukon A alkioiden joukko, jotka eivät kuulu joukkoon B (toisinaan puhumme myös *joukon B komplementista joukossa A*).

Näemme helposti seuraavien yhtälöiden olevan voimassa:

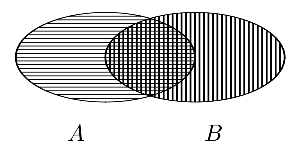
$$A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A$$

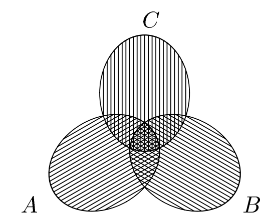
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad , \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad , \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Edellisiä joukkoyhtälöitä ja muitakin kahden tai useamman joukon välisiä suhteita voimme kätevästi havainnollistaa nk. *Vennin kaavioiden* avulla. Esimerkiksi kahden joukon ja kolmen joukon tapauksiin liittyvät Vennin kaaviot voimme piirtää seuraavan näköisiksi.





Jos $\mathcal{A}$ on *joukkoperhe*, eli sellainen joukko, jonka jokainen alkio on joukko, niin määrittelemme *perheen $\mathcal{A}$ yhdistyksen* ja *leikkauksen* kaavoilla

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x : x \in A \text{ jollain } A \in \mathcal{A}\} \quad ; \quad \bigcap \mathcal{A} = \{x : x \in A \text{ jokaisella } A \in \mathcal{A}\}\,.$$

Jos I on jokin joukko ("indeksijoukko") ja A_i on jokin joukko jokaisella $i \in I$, niin määrittelemme *joukkojen A_i, $i \in I$, yhdistyksen* ja *leikkauksen* joukkoperheen $\{A_i : i \in I\}$ yhdistyksenä ja leikkauksena:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \{A_i : i \in I\} \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \{A_i : i \in I\}\,.$$

Sanomme joukkojen A ja B olevan *(keskenään) erillisiä*, jos $A \cap B = \emptyset$ eli jos A:lla ja B:llä ei ole yhteisiä alkioita. Sanomme joukkojen A_i, $i \in I$, olevan *(keskenään) erillisiä*, jos A_i ja A_j ovat erillisiä aina kun $i \neq j$. Esimerkiksi kaksi eri yksiötä ovat aina keskenään erillisiä.

1. Relaatiot ja kuvaukset.

Alustava määritelmä: *Relaatio* on kahden (tai useamman, saman tai eri) joukon alkioiden välinen ominaisuus tai suhde.

Esimerkkejä Kokonaisluvut x ja y voivat olla keskenään mm. seuraavissa relaatioissa:

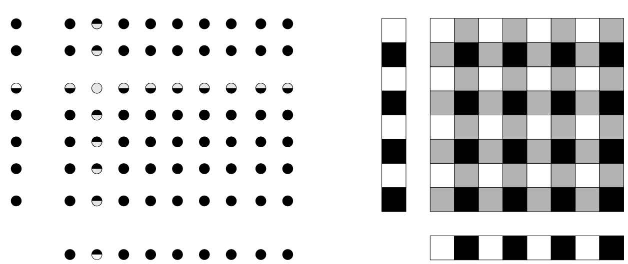
(a) $y \leq x$ (b) $y|x$ ("y jakaa x:n") (c) syt(y,x)= 1 "y:llä ja x:llä ei ole yhteisiä tekijöitä" (d) $y = 2+x$

Matematiikassa voimme määritellä relaatiot (kuten useimmat muutkin käsitteet) joukkoina. Määrittelemme aluksi järjestetyn parin ja kahden joukon karteesisen tulon käsitteet.

I 1.1 Määritelmä Olkoot X ja Y joukkoja. Kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$ merkitsemme (x,y):llä joukkoa $\{x, \{x,y\}\}$; tästä joukosta käytämme nimitystä x:n ja y:n *järjestetty pari.* Joukkojen X ja Y *karteesinen tulo* on joukko $\{(x,y) : x \in X \text{ ja } y \in Y\}$; tälle joukolle käytämme merkintää $X \times Y$.

Järjestettyjen parien olennainen ominaisuus on seuraava: jos (x,y) ja (a,b) ovat järjestettyjä pareja, niin $(x,y) = (a,b)$ jos ja vain jos $x = a$ ja $y = b$.

Voimme havainnollistaa karteesisia tuloja vaikkapa seuraavankaltaisilla kuvioilla:



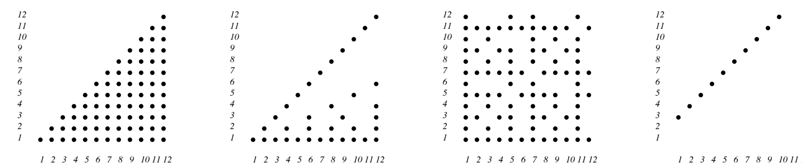
I 1.2 Määritelmä *Relaatio* on joukko, jonka jokainen alkio on järjestetty pari. Jos X ja Y ovat joukkoja ja $R \subset X \times Y$, niin R on *joukkojen X ja Y välinen relaatio.* Jos $R \subset X \times X$, niin sanomme myös, että R on *joukon X relaatio.*

Jokainen relaatio R on kahden joukon välinen relaatio: kun merkitsemme $(a,b)_1 = a$ ja $(a,b)_2 = b$ jokaisella $(a,b) \in R$, niin on voimassa $R \subset A \times B$, missä $A = \{(a,b)_1 : (a,b) \in R\}$ ja $B = \{(a,b)_2 : (a,b) \in R\}$.

Edellä määritellyt relaatiot ovat nk. *kaksipaikkaisia relaatioita.* Matematiikassa tarkastellaan toisinaan myös useampipaikkaisia relaatioita, mutta koska emme sellaisia seuraavassa tarvitse, määrittelemme relaatiot vain kaksipaikkaisina.

Esimerkkejä (a) Joukon $X \times X$ *lävistäjä* on relaatio $\Delta_X \subset X \times X$, missä $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$. Tämä on sama kuin identtisyysrelaatio X:ssä: $(x,z) \in \Delta_X \iff x = z$.

(b) Merkitään X:lla kokonaislukujen $1, 2, ..., 12$ muodostamaa joukkoa. Edellä mainitut kokonaislukujen väliset relaatiot (a) – (d) vastaavat seuraavia joukon $X \times X$ osajoukkoja:



$y \leq x$ $y|x$ $\text{syt}(y,x) = 1$ $y = 2+x$

Kun R on X:n ja Y:n välinen relaatio ja $x \in X$, $y \in Y$, niin sanotaan, että x ja *y ovat relaatiossa* R jos (ja vain jos) $(x,y) \in R$. Usein merkintä $(x,y) \in R$ korvataan merkinnällä $y\,R\,x$.

Jokaisella $A \subset X$ merkitään $R(A) = \{y \in Y : \exists a \in A \text{ siten, että } y\,R\,a\}$; tästä joukosta käytetään nimitystä *joukon A kuva relaatiossa R.* Joukon X alkiolle x käytetään joukosta $R(\{x\})$ lyhennettyä merkintää $R\{x\}$; toteamme, että $R\{x\} = \{y \in Y : y\,R\,x\}$.

Yllä annettuja merkintöjä käyttäen on kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$ voimassa

$$\boxed{(x,y) \in R \iff yRx \iff y \in R\{x\}}$$

Huomautus: Yhteys $(x,y) \in R \iff yRx$ on valitettavasti monissa tilanteissa nurinkurinen ja tästä syystä esimerkiksi yllä olevissa kuvissa kaksi vasemmanpuolista relaatiota on annettu "väärässä" järjestyksessä. Tämä nurinkurisuus periytyy vanhoista funktioihin liittyvistä merkinnöistä ja sopimuksista. On luontevaa samaistaa funktiot niiden "kuvaajien" kanssa ja tällöin xy-koordinaatiston perinteisen kuvan mukaisesti esim. $y = \sin(x) \iff (x, y) \in \sin$. Koska funktioita koskevia vanhoja merkintöjä ei kannata yrittää muuttaa ja koska haluamme esittää myös funktiot relaatioina, on meidän otettava myös yleisemmille relaatioille käyttöön kuvaajat, jotka valitettavan usein ovat "väärinpäin"; samasta syystä alla annettava relaatioiden "yhdistelemisen" määritelmä on epäluonnollinen joillekin yleisille relaatioille vaikka se kuvauksille antaakin "oikean" yhdistetyn kuvauksen määritelmän. Onneksi tästä kaikesta ei aiheudu niin paljon harmia kuin voisi kuvitella. Relaatioita ei nimittäin tarvitse käsitellä kuin muodollisesti karteesisten tulojen osajoukkoina, sillä relaatio $R \subset X \times Y$ on täysin määrätty kun joukot $R\{x\}$, $x \in X$, tunnetaan: R voidaan esittää muodossa $R = \bigcup_{x\in X}(\{x\} \times R\{x\})$. Seuraavassa ei relaatioita yleensä annetakaan karteesisten tulojen osajoukkoina vaan antamalla niihin liittyvät kuvajoukot. Lisäksi annamme myöhemmin äärellisille relaatioille havainnollisia ja "oikein päin olevia" esityksiä "suhteikkoina".

Jos R ja S ovat joukkojen X ja Y välisiä relaatioita, niin samoin ovat $R \cup S$, $R \cap S$ ja $(X \times Y) \setminus R$. Määrittelemme eräitä muitakin operaatioita relaatioille.

I 1.3 Määritelmä Relaation $R \subset X \times Y$ *käänteisrelaatio* on se relaatio $R^{-1} \subset Y \times X$, joka määräytyy ehdosta

$$\boxed{xR^{-1}y \iff yRx}$$

Relaatioiden $R \subset X \times Y$ ja $S \subset Y \times V$ *yhdistelmä* on se relaatio $S \circ R \subset X \times V$, joka määräytyy ehdosta

$$v\, S \circ R\, x \iff \exists \text{ sellainen } y \in Y\text{, että } v\, S\, y \text{ ja } y\, R\, x\,.$$

Nähdään helposti, että jokaiselle relaatiolle R on voimassa $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$. Seuraava tulos osoittaa, miten yllä määritellyt operaatiot suhtautuvat toisiinsa.

I 1.4 Lause *Olkoot $R \subset X \times Y$ ja $S \subset Y \times V$ relaatioita. Tällöin*

$$\boxed{(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}}$$

Todistus. Kaikilla $x \in X$ ja $v \in V$ on voimassa

$$\begin{aligned} x\,(S \circ R)^{-1}\, v &\iff v\,(S \circ R)\, x \\ &\iff \exists \text{ sellainen } y \in Y\text{, että } v\, S\, y \text{ ja } y\, R\, x \\ &\iff \exists \text{ sellainen } y \in Y\text{, että } x\, R^{-1}\, y \text{ ja } y\, S^{-1}\, v \\ &\iff x\,(R^{-1} \circ S^{-1})\, v\,. \quad \square \end{aligned}$$

Näytämme, että relaatioiden yhdisteleminen on liitännäinen eli assosiatiivinen toimenpide; todistamme ensin seuraavan apulauseen.

I 1.5 Lemma *Olkoot $R \subset X \times Y$ ja $S \subset Y \times V$ relaatioita. Tällöin jokaisella $A \subset X$ on voimassa*

$$\boxed{(S \circ R)(A) = S\,(R(A))}$$

Todistus. Jokaisella $v \in V$ on voimassa

$$\begin{aligned} v \in (S \circ R)(A) &\iff \exists \text{ sellainen } a \in A\text{, että } v\,(S \circ R)\, a \\ &\iff \exists \text{ sellainen } a \in A\text{, että } \exists \text{ sellainen } y \in Y\text{, että } v\, S\, y \text{ ja } y\, R\, a \\ &\iff \exists \text{ sellainen } y \in Y\text{, että } \exists \text{ sellainen } a \in A\text{, että } y\, R\, a \text{ ja } v\, S\, y \\ &\iff \exists \text{ sellainen } y \in R(A)\text{, että } v\, S\, y \\ &\iff v \in S\,(R(A))\,. \quad \square \end{aligned}$$

I 1.6 Lause *Olkoot $R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times V$ ja $T \subset V \times U$ relaatioita. Tällöin*

$$\boxed{T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R}$$

Todistus. Lauseen yhtälö pätee, koska jokaisella $x \in X$ on Lemman I 1.5 nojalla voimassa

$$\begin{aligned} (T \circ (S \circ R))\,\{x\} &= T\,((S \circ R)\,\{x\}) = T\,(S\,(R\{x\})) \\ &= (T \circ S)(R\{x\}) = ((T \circ S) \circ R)\,\{x\}. \quad \square \end{aligned}$$

Edellisen tuloksen nojalla voidaan merkitä $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R) = T \circ S \circ R$.

Kuvaukset esitetään relaatioiden avulla seuraavasti.

I 1.7 Määritelmä Olkoot X ja Y joukkoja. Joukkojen X ja Y välinen relaatio $f \subset X \times Y$ on *kuvaus*, mikäli jokaisella $x \in X$, joukossa $f\{x\}$ on korkeintaan yksi alkio. Relaatio $f \subset X \times Y$ on *kuvaus joukolta X joukolle Y*:lle, mikäli jokaisella $x \in X$, joukossa $f\{x\}$ on täsmälleen yksi alkio.

Mikäli relaatio f on kuvaus joukolta X joukolle Y, niin merkitsemme $f : X \to Y$; lisäksi määrittelemme jokaisella $x \in X$ joukon Y alkion $f(x)$ kaavan $\{f(x)\} = f\{x\}$ avulla. Panemme merkille, että kuvaus $f : X \to Y$ voidaan esittää muodossa $f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$.

Jos f on kuvaus $X \to Y$, niin joukkoa X kutsutaan kuvauksen f *määritysjoukoksi* tai *lähtöjoukoksi* ja joukkoa Y kutsutaan f:n *maalijoukoksi*.

Lemman I 1.5 tuloksesta seuraa, että jos f on kuvaus $X \to Y$ ja g on kuvaus $Y \to V$, niin yllä määritelty relaatio $g \circ f$ on kuvaus $X \to V$ ja kyseessä on f:n ja g:n *yhdistetty kuvaus*: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ jokaisella $x \in X$.

Panemme merkille, että kuvauksille $f : X \to Y$ ja $g : Z \to V$ on voimassa $f \subset g$ jos ja vain jos $X \subset Z$ ja $f(x) = g(x)$ jokaisella $x \in X$. Jos on voimassa $f \subset g$, niin tällöin sanotaan, että g on kuvauksen f *jatke* ja f on kuvauksen g *rajoittuma*.

Olkoon f kuvaus $X \to Y$ ja olkoon A joukon X osajoukko. Kuvauksen f *rajoittuma joukkoon* A on relaatio $f \cap (A \times Y)$; tätä relaatiota merkitään symbolilla $f|A$. Selvästi $f|A$ on kuvaus $A \to Y$. Lisäksi on voimassa $f = (f|A) \cup (f|X \setminus A)$.

Määrittelemme eräitä tärkeitä kuvausten ominaisuuksia.

I 1.8 Määritelmä Olkoot X ja Y joukkoja. Kuvaus $f : X \to Y$ on

(i) *injektio*, mikäli kaikilla $x, z \in X$ ehdosta $f(x) = f(z)$ seuraa, että $x = z$.
(ii) *surjektio*, mikäli jokaisella $y \in Y$ on olemassa sellainen $x \in X$, että $f(x) = y$.
(iii) *bijektio*, mikäli f on sekä injektio että surjektio.

Määritelmän nojalla kuvaus $f : X \to Y$ on injektio jos ja vain jos f on bijektio $X \to f(X)$. Injektioita voidaan myös luonnehtia seuraavasti.

I 1.9 Lause *Kuvaus $f : X \to Y$ on injektio jos ja vain jos f:n käänteisrelaatio f^{-1} on kuvaus $f(X) \to X$.*

Todistus. Koska $f \subset X \times Y$, on voimassa $f \subset X \times f(X)$ ja täten edelleen $f^{-1} \subset f(X) \times X$. Näin ollen f^{-1} on kuvaus $f(X) \to X$, jos ja vain jos jokaisella $y \in f(X)$ joukossa $f^{-1}\{y\}$ on täsmälleen yksi alkio. Täten on voimassa:

$$\begin{aligned} f \text{ on injektio } &\iff x \neq z \Longrightarrow f(x) \neq f(z) \\ &\iff \forall y \in f(X)\ \exists \text{ täsmälleen yksi sellainen } x \in X, \text{ että } f(x) = y \\ &\iff \forall y \in f(X) \text{ joukossa } f^{-1}\{y\} \text{ on täsmälleen yksi alkio} \\ &\iff f^{-1} \text{ on kuvaus } f(X) \to X. \quad \square \end{aligned}$$

I 1.10 Korollaari *Kuvaus $f : X \to Y$ on bijektio jos ja vain jos f:n käänteisrelaatio f^{-1} on kuvaus $Y \to X$.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Jos f on bijektio, niin $f(X) = Y$ ja relaatio f^{-1} on Lauseen I 1.9 nojalla kuvaus $Y \to X$.
Riittävyys. Oletamme, että relaatio f^{-1} on kuvaus $Y \to X$. Tällöin kuvaus f on Lauseen I 1.9 nojalla injektio. Lisäksi kuvaus f on surjektio, sillä jos y on Y:n alkio, niin voimme merkitä $x = f^{-1}(y)$, jolloin on voimassa $x \in X$ ja $x\, f^{-1}\, y$ eli $y\, f\, x$ eli $y = f(x)$. $\square$

Seuraavan tuloksen avulla nähdään, että bijektion käänteisrelaatio on bijektion *käänteiskuvaus*.

I 1.11 Lemma *Olkoon f surjektio $X \to Y$. Tällöin $f \circ f^{-1} = \Delta_Y$.*

Todistus. Koska f on kuvaus, niin jokaisella $x \in X$ on olemassa korkeintaan yksi sellainen $y \in Y$, että $y\, f\, x$. Koska f on surjektio, niin jokaisella $y \in Y$ on olemassa sellainen $x \in X$, että $y\, f\, x$; tästä seuraa, että kaikilla $y, u \in Y$ on voimassa

$$\begin{aligned} u\,(f \circ f^{-1})\,y &\iff \exists \text{ sellainen } x \in X, \text{ että } u\, f\, x \text{ ja } x\, f^{-1}\, y \\ &\iff \exists \text{ sellainen } x \in X, \text{ että } u\, f\, x \text{ ja } y\, f\, x \\ &\iff \exists \text{ sellainen } x \in X, \text{ että } u = f(x) \text{ ja } y = f(x) \\ &\iff y = u \\ &\iff u\, \Delta_Y\, y\ . \quad \square \end{aligned}$$

Joukon Y identtisyysrelaatio Δ_Y on kuvaus $Y \to Y$ ja sitä kutsutaan myös joukon Y *identtiseksi kuvaukseksi*. Jos nyt g on bijektio $X \to Y$, niin tällöin g on surjektio $X \to Y$ ja g^{-1} on surjektio $Y \to X$, joten Lemman I 1.11 tuloksesta seuraa, että $g \circ g^{-1} = \Delta_Y$ ja $g^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = \Delta_X$; koska $(g^{-1})^{-1} = g$, edellisestä seuraa, että $g^{-1} \circ g$ on X:n ja $g \circ g^{-1}$ on Y:n identtinen kuvaus eli että g ja g^{-1} ovat toistensa käänteiskuvauksia.

Osoitamme lopuksi, että yllä tarkastellut kuvausten ominaisuudet säilyvät kuvauksia yhdistettäessä.

I 1.12 Lause *Olkoon f kuvaus $X \to Y$ ja olkoon g kuvaus $Y \to Z$. Jos f ja g ovat bijektioita (injektioita, surjektioita), niin tällöin kuvaus $g \circ f$ on bijektio (injektio, surjektio).*

Todistus. Oletetaan, että f ja g ovat surjektioita. Tällöin on voimassa $f(X) = Y$ ja $g(Y) = Z$. Lemman I 1.5 nojalla on voimassa $(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$; täten kuvaus $g \circ f$ on surjektio.

Oletetaan, että f ja g ovat injektioita. Osoitetaan, että yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on injektio. Olkoon joukon X alkioille x ja z voimassa $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(z)$ eli $g(f(x)) = g(f(z))$. Koska g on injektio, niin on voimassa $f(x) = f(z)$; tästä puolestaan seuraa, koska myös f on injektio, että $x = z$. Olemme osoittaneet, että $g \circ f$ on injektio.

Jos f ja g ovat bijektioita, niin edellä esitetystä seuraa, että kuvaus $g \circ f$ on sekä surjektio että injektio ja näin ollen se on bijektio. □

Kuvaukset määräytyvät usein jonkun säännön nojalla, joka määrää kuva–alkion kuvattavan alkion avulla. Esityksen yksinkertaistamiseksi jätämme seuraavassa usein kuvauksen nimeämättä ja viittaamme siihen esittämällä sen säännön, josta kuvaus määräytyy. Voimme esimerkiksi puhua luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N}$ määritellystä kuvauksesta $n \mapsto n+1$ kun tarkoitamme sitä kuvausta $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolle $f(n) = n+1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

2. Luonnolliset luvut. Induktio.

Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ ja sen alkioiden välinen järjestysrelaatio $\leq$ voidaan määritellä muutamasta ominaisuudesta lähtien. Otamme aluksi käyttöön eräitä (järjestys)relaatioihin liittyviä nimityksiä ja merkintöjä.

Olkoon A joukko ja olkoon $\preceq$ joukon A relaatio. Joukon A osajoukon B *pienin alkio* on sellainen alkio $p \in B$, että jokaisella $b \in B$ on voimassa $p \preceq b$ ja millään $b \in B \setminus \{p\}$ ei ole voimassa $b \preceq p$. Jos pienin alkio on olemassa, niin se on yksikäsitteinen ja siitä käytetään merkintää $\min B$. Osajoukon B *suurin alkio* on sellainen alkio $s \in B$, että jokaisella $b \in B$ on voimassa $b \preceq s$ ja millään $b \in B \setminus \{s\}$ ei ole voimassa $s \preceq b$. Jos suurin alkio on olemassa, niin se on yksikäsitteinen ja siitä käytetään merkintää $\max B$.

Seuraava lause voidaan johtaa joukko–opin aksioomista; tässä esityksessä tyydymme "naiviin" joukko–oppiin, joten sivuutamme lauseen todistuksen ja otamme lauseen tuloksen käyttöön aksioomana.

I 2.1 Lause *(Luonnollisten lukujen joukon olemassaololause) On olemassa sellainen epätyhjä joukko $\mathbb{N}$ ja sellainen joukon $\mathbb{N}$ relaatio $\leq$, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

A. *Jokaisessa $\mathbb{N}$:n epätyhjässä osajoukossa on pienin alkio.*

B. *Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ jokaisessa joukon $\{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$ epätyhjässä osajoukossa on suurin alkio.*

C. *Joukossa $\mathbb{N}$ ei ole suurinta alkiota.*

Kutsumme siis edellisen lauseen antamaa joukkoa $\mathbb{N}$ *luonnollisten lukujen joukoksi* ja sen alkioita (luonnollisesti!) *luonnollisiksi luvuiksi* tai (milloin sekaannuksen vaaraa ei ole) vain *luvuiksi*.

Luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ osajoukon A sanotaan olevan *rajoitettu*, mikäli on olemassa sellainen luonnollinen luku n, että jokaisella $k \in A$ on voimassa $k \leq n$. Edellisen lauseen ehto B voidaan nyt ilmaista seuraavasti: jokaisessa joukon $\mathbb{N}$ epätyhjässä rajoitetussa osajoukossa on suurin luku.

Huomaamme, että esimerkiksi tavallisella järjestysrelaatiolla varustettu lukujoukko $\{1, 2, 3\}$ toteuttaa edellisen lauseen muut vaatimukset paitsi ehtoa C. Ehdon C voimassaolo takaa luonnollisten lukujen joukon *äärettömyyden*.

Merkitsemme 0:lla joukon $\mathbb{N}$ pienintä lukua $\min \mathbb{N}$ ja merkitsemme edelleen $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$ merkitsemme n^-:lla joukon $\{k \in \mathbb{N} : k \leq n \text{ ja } k \neq n\}$ suurinta lukua ja kutsumme sitä alkion n *edeltäjäksi*.

Koska joukossa $\mathbb{N}$ ei ole suurinta lukua, niin joukko $\{k \in \mathbb{N} : k \not\leq n\}$ on epätyhjä jokaisella $n \in \mathbb{N}$; merkitsemme kyseisen joukon pienintä lukua n^+:llä ja kutsumme sitä luvun n *seuraajaksi*. Merkitsemme edelleen $0^+ = 1$, $1^+ = 2$, $2^+ = 3$ jne.

I 2.2 Lemma *Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $(n^+)^- = n$ ja jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$ on voimassa $(n^-)^+ = n$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Johdamme nyt eräitä luonnollisia lukuja koskevia perustuloksia, jotta lukija voisi vakuuttua siitä, että edellisen lauseen ehdot tosiaan määrittävät joukon, jolla on luonnollisten lukujen joukon intuitiivisesti "tutut" ominaisuudet.

Osoitamme aluksi, että joukon $\mathbb{N}$ relaatio $\leq$ on järjestysrelaatio.

I 2.3 Lause *Joukon $\mathbb{N}$ relaatiolla $\leq$ on seuraavat ominaisuudet:*

(i) Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $n \leq n$. *Refleksiivisyys*

(ii) Kaikilla $n, k \in \mathbb{N}$, jos $n \leq k$ ja $k \leq n$, niin $n = k$. *Antisymmetrisyys*

(iii) Kaikilla $n, k, l \in \mathbb{N}$, jos $n \leq k$ ja $k \leq l$, niin $n \leq l$. *Transitiivisuus*

(iv) Kaikilla $n, k \in \mathbb{N}$ on voimassa joko $n \leq k$ tai $k \leq n$.

Todistus. (i) Epätyhjän joukon $\{n\}$ ainoana lukuna n on kyseisen joukon pienin luku, joten $n \leq n$.

(ii) Olkoon luonnollisille luvuille n ja k voimassa $n \leq k$ ja $k \leq n$. Jos olisi voimassa $n \neq k$, niin pienimmän alkion määritelmästä seuraisi, ettei joukossa $\{n, k\}$ olisi pienintä lukua. Täten on oltava voimassa $n = k$.

(iii) Olkoon luonnollisille luvuille n, k ja l voimassa $n \leq k$ ja $k \leq l$. Osoitetaan, että on voimassa $n \leq l$. Merkitään $m = \min\{n, k, l\}$. Jos $m = n$, niin $n \leq l$. Jos $m = k$, niin $k \leq n$ ja tästä seuraa antisymmetrisyyden nojalla, koska $n \leq k$, että $n = k$; tästä seuraa edelleen, koska $k \leq l$, että $n \leq l$. Jos $m = l$, niin $l \leq k$ ja antisymmetrisyyden nojalla saadaan yhtälö $l = k$, mistä seuraa, koska $n \leq k$, että $n \leq l$.

(iv) Kun $n, k \in \mathbb{N}$, niin joko n tai k on joukon $\{n, k\}$ pienin luku, joten on voimassa joko $n \leq k$ tai $k \leq n$. □

Sanomme joukon A relaation $\preceq$ olevan *osittainen järjestys* ja parin $(A, \preceq)$ olevan *osittain järjestetty joukko*, mikäli relaatio $\preceq$ on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen. Sanomme edelleen relaation $\preceq$ olevan *järjestys* ja parin $(A, \preceq)$ olevan *järjestetty joukko*, mikäli $\preceq$ on sellainen osittainen järjestys, että kaikki A:n alkiot ovat *keskenään vertailtavissa* eli kaikilla $a, b \in A$ on voimassa joko $a \preceq b$ tai $b \preceq a$.

Edellä käyttöönottamiemme nimitysten mukaisesti Lauseen I 2.3 sisältö voidaan ilmaista sanomalla, että pari $(\mathbb{N}, \leq)$ on järjestetty joukko. Otamme vielä käyttöön seuraavat nimitykset ja merkinnät luonnollisten lukujen n ja k yhteydessä. Jos on voimassa $n \leq k$, niin sanomme, että n on *pienempi tai yhtäsuuri* kuin k tai että k on *suurempi tai yhtäsuuri* kuin n ja käytämme merkinnän $n \leq k$ ohella merkintää $k \geq n$. Jos on voimassa $n \leq k$ ja $n \neq k$, niin merkitsemme $n < k$ tai $k > n$ ja sanomme, että n on *pienempi* kuin k tai että k on *suurempi* kuin n.

Seuraavaksi johdamme eräitä muotoja induktioperiaatteelle.

I 2.4 Lause *Olkoon A joukon $\mathbb{N}$ osajoukko ja olkoon P sellainen luonnollisten lukujen ominaisuus, että jokaiselle luvulle $a \in A$ pätee, että luvulla a on ominaisuus P, mikäli jokaisella lukua a pienemmällä joukon A luvulla on ominaisuus P. Tällöin jokaisella A:n alkiolla on ominaisuus P.*

Todistus. Merkitsemme $B = \{n \in A : n$:llä ei ole ominaisuutta $P\}$. On osoitettava, että $B = \emptyset$. Teemme vastaväitteen: $B \neq \emptyset$. Merkitsemme $a = \min B$. Koska joukossa B ei ole a:ta pienempiä lukuja, joukon B määritelmästä seuraa, että jokaisella a:ta pienemmällä A:n alkiolla on ominaisuus P. Edellisestä seuraa ominaisuutta P koskevan oletuksen nojalla, että luvulla a on ominaisuus P; tämä on kuitenkin ristiriidassa sen kanssa, että $a \in B$. Koska vastaväite johti ristiriitaan, se on väärä. Näin ollen on voimassa $B = \emptyset$. □

Olkoon P luonnollisten lukujen ominaisuus ja n luonnollinen luku. Otamme käyttöön merkinnän $P(n)$ osoittamaan, että luvulla n on ominaisuus P. Tällöin voimme kirjoittaa edellisen lauseen ominaisuutta P koskevan oletuksen muotoon

$$(\forall a \in A)\,[((\forall b \in A)\,(b < a \Rightarrow P(b))) \Rightarrow P(a)]\,.$$

Toteamme, että jos a on joukon A pienin luku, niin $\{b \in A : b < a\} = \emptyset$, joten yllä hakasuluissa oleva lauseke pätee luvulle a jos ja vain jos $P(a)$.

Lause I 2.4 on *induktioperiaatteen* yleinen muoto ja siitä voidaan johtaa tämän periaatteen eri muunnelmia; yksi käyttökelpoisimmista on alla oleva tulos, jota seuraavassa kutsutaan induktioperiaatteeksi.

I 2.5 Korollaari *(Induktioperiaate) Olkoon P sellainen luonnollisten lukujen ominaisuus, että on voimassa:*

1^o $P(0)$.

2^o $(\forall n \in \mathbb{N})\,(P(n) \Rightarrow P(n^+))$.

Tällöin on voimassa $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$.

Todistus. Kun valitaan joukoksi A joukko $\mathbb{N}$, niin ominaisuus P toteuttaa Lauseessa I 2.4 tehdyn oletuksen, koska ehdon 1^o nojalla on voimassa $P(0)$ ja koska ehdosta 2^o seuraa Lemman I 2.2 nojalla, että jokaisella $a > 0$ on voimassa $P(a^-) \Rightarrow P(a)$. Lauseen I 2.4 nojalla on voimassa $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$. □

Huomattakoon, että yllä ehto 2^o voidaan ilmaista myös seuraavasti:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(P(n^-) \Rightarrow P(n)\right).$$

"*Todistus induktiolla n:n suhteen*" suoritetaan seuraavasti:

1^o Todistetaan (tai todetaan), että luvulla 0 on ominaisuus P.

2^o Mielivaltaiselle $n \in \mathbb{N}$ oletetaan, että luvulla n on ominaisuus P ("*Induktio–oletus*") ja todistetaan tämän oletuksen avulla, että luvulla n^+ on ominaisuus P. ("*Induktioaskel*").

3^o Johtopäätöksenä (induktioperiaatteen nojalla) on, että jokaisella luonnollisella luvulla on ominaisuus P.

Lauseen I 2.5 avulla voidaan todistaa induktioperiaatteelle monia muunnelmia, joita voi käyttää tilanteesta riippuen. Induktio-oletus $P(n)$ voidaan korvata vahvemmalla oletuksella $\forall k \le n\ P(k)$, jolloin saadaan ehdon 2^o asemasta ehto

$$2^*\ (\forall n \in \mathbb{N})\left((\forall k \le n\ P(k)) \Rightarrow P(n^+)\right).$$

Induktio voidaan myös aloittaa luvun 0 asemasta jostakin luvusta $m > 0$: tällöin ehto 1^o korvataan ehdolla $1^\#\ P(m)$ ja saatavaksi johtopäätökseksi tulee $(\forall n \ge m)P(n)$.

Induktioperiaatteen avulla voimme osoittaa ns. *rekursiivisten määritelmien* oikeellisuuden. Esimerkkinä määrittelemme järjestettyjen parien yleistyksenä (äärelliset) *jonot*. Määrittelemme nollan ja yhden alkion jonot asettamalla $() = \emptyset$ ja, jokaisella x, $(x) = x$. Kahden alkion jono on järjestetty pari. Jos n:n alkion jonot on jo määritelty, niin n^+:n alkion jono $(x_1, ..., x_{n^+})$ määräytyy rekursiivisesti *palautuskaavasta* eli *rekursioyhtälöstä*

$$(x_1, ..., x_{n^+}) = ((x_1, ..., x_n), x_{n^+}).$$

Induktiolla voimme osoittaa, että k:n alkion jonot tulevat edellä esitetyllä tavalla määritellyiksi jokaiselle $k \in \mathbb{N}$. Voimme myös osoittaa, että kahdelle k:n alkion jonolle $(x_1, ..., x_k)$ ja $(y_1, ..., y_k)$ on voimassa

$$(x_1, ..., x_k) = (y_1, ..., y_k) \text{ jos ja vain jos } x_i = y_i \text{ jokaisella } i = 1, ..., k. \qquad (*)$$

Todistamme edelliset kaksi väitettä samanaikaisesti soveltamalla induktioperiaatetta seuraavaan luonnollisten lukujen ominaisuuteen P:

$$P(n) \iff \text{kaikilla } x_1, ..., x_n \text{ ja } y_1, ..., y_n \text{ jonot } (x_1, ..., x_n) \text{ ja } (y_1, ..., y_n)$$
$$\text{on määritelty ja ehto } (*) \text{ on voimassa.}$$

Näemme helposti, että luvuilla 0, 1 ja 2 on ominaisuus P; täten induktio voi alkaa luvusta 2. Jos nyt luvulla $n \ge 2$ on ominaisuus P, niin edellä annettu palautuskaava määrittelee kaikki n^+:n alkion jonot. Lisäksi ehto (*) toteutuu (k:n arvolla n^+), sillä jos $(x_1, ..., x_{n^+}) = (y_1, ..., y_{n^+})$, niin tällöin $((x_1, ..., x_n), x_{n^+}) = ((y_1, ..., y_n), y_{n^+})$ ja tästä seuraa järjestettyjen parien perusominaisuuden nojalla, että on voimassa $(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)$ ja $x_{n^+} = y_{n^+}$. Koska ehto (*) on voimassa k:n arvolla n, toiseksi viimeisestä yhtälöstä seuraa, että on voimassa $x_i = y_i$ jokaisella $i = 1, ..., n$. Edellisen nojalla $x_i = y_i$ jokaisella $i = 1, ..., n^+$. Täten olemme suorittaneet induktio–askelen ja päättelemme induktioperiaatteen nojalla, että jokaisella luvulla $n \ge 2$ on ominaisuus P. Näin ollen jokaisella luonnollisella luvulla on ominaisuus P.

Voimme määritellä myös yksittäisiä joukkoja rekursiivisesti. Esimerkiksi parillisten luonnollisten lukujen joukon E voisimme määritellä seuraavasti: $0 \in E$ ja $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n \in E \iff n^- \notin E)$. Tämän ja myöhemmin annettavien rekursiivisten määritelmien oikeellisuuden voimme osoittaa vastaavasti kuten edellisessä esimerkkitapauksessa.

3 Äärelliset joukot.

Määrittelemme nyt joukkojen äärellisyyden käsitteen. Merkitsemme jokaisella $n \in \mathbb{N}$ joukkoa $\{k \in \mathbb{N}^* : k \le n\} = \{1, ..., n\}$ symbolilla $[n]$. Pannaan merkille, että $[0] = \emptyset$.

I 3.1 Määritelmä Joukko X on *äärellinen*, mikäli jollain $n \in \mathbb{N}$ on olemassa bijektio $[n] \to X$. Jos X ei ole äärellinen, niin sanomme, että X on *ääretön*.

Koska bijektion käänteiskuvaus on bijektio, joukko X on äärellinen jos ja vain jos jollain $n \in \mathbb{N}$ on olemassa bijektio $X \to [n]$. Koska kahden bijektion yhdistetty kuvaus on bijektio, nähdään, että joukko on äärellinen, mikäli se on jonkun äärellisen joukon kuva bijektiivisessä kuvauksessa.

Antamamme määritelmän nojalla tyhjä joukko on äärellinen, sillä $[0] = \emptyset$ ja tyhjä joukko on bijektio tyhjältä joukolta tyhjälle joukolle. Myös jokainen yksiö $\{a\}$ on äärellinen, sillä ehto $1 \mapsto a$ määrittelee bijektion $[1] \to \{a\}$.

Voimme luonnehtia joukon äärellisyyttä havainnollisesti jonojen avulla.

Jono $(x_1, ..., x_n)$ on *yksinkertainen*, mikäli $x_i \neq x_j$ aina kun $i \neq j$. Luvun n arvoilla 0 ja 1 saatavat "triviaalit" jonot $(x_1, ..., x_0) = ()$ ja $(x_1, ..., x_1) = (x_1)$ ovat aina yksinkertaisia, mutta esimerkiksi jono $(1, 1)$ ei ole yksinkertainen. Joukon X *yksinkertainen esitys* on sellainen joukon X esitys $X = \{x_1, ..., x_n\}$, että jono $(x_1, ..., x_n)$ on yksinkertainen.

Jonot vastaavat kuvauksia seuraavasti: jonoa $(x_1, .., x_n)$ vastaa kuvaus $i \mapsto x_i$ joukolta $[n]$ joukolle $\{x_1, ..., x_n\}$ ja kääntäen, kuvausta f joukolta $[n]$ vastaa jono $(f(1), ..., f(n))$. Tässä vastaavuudessa yksinkertaiset jonot ja bijektiiviset kuvaukset vastaavat toisiaan. Täten joukko X on äärellinen jos ja vain jos sillä on yksinkertainen esitys.

Todistamme nyt induktioperiaatteen sovellutuksena eräitä äärellisiä joukkoja koskevia alkeistuloksia.

I 3.2 Lemma *Olkoon n luonnollinen luku. Tällöin millään $k < n$ ei ole olemassa surjektiota $[k] \to [n]$.*

Todistus. Merkitsemme $P(n)$:llä luonnollisen luvun n ominaisuutta: "millään $k < n$ ei ole olemassa surjektiota $[k] \to [n]$".

1^o $P(0)$ pätee koska millään $k \in \mathbb{N}$ ei ole voimassa $k < 0$.

2^o Oletamme, että $P(n)$ pätee. Todistamme, että $P(n^+)$ on voimassa. Teemme vastaväitteen: on olemassa $k < n^+$ ja surjektio $f : [k] \to [n^+]$. Panemme merkille, että on voimassa $[n^+] \neq \emptyset$ ja näin ollen $k > 0$. Osoitamme, että on olemassa surjektio $g : [k^-] \to [n]$. Jos $f(k) = n^+$, niin kuvaus $g : [k^-] \to [n]$, missä $g(i) = \min(f(i), n)$ jokaisella $i < k$, on surjektio. Oletamme, että $f(k) \neq n^+$. Nyt määrittelemme kuvauksen g asettamalla, jokaisella $i < k$, $g(i) = f(i)$ jos $f(i) \neq n^+$ ja $g(i) = f(k)$ jos $f(i) = n^+$. Jälleen g on surjektio $[k^-] \to [n]$. Vastaväite johti ristiriitaan induktio–oletuksen kanssa. Täten $P(n^+)$ pätee. □

I 3.3 Lause *Olkoon A äärellinen joukko. Tällöin vain yhdellä $n \in \mathbb{N}$ on olemassa bijektio $[n] \to A$.*

Todistus. Olkoot n ja k sellaisia luonnollisia lukuja, että on olemassa bijektiot $f : [n] \to A$ ja $g : [k] \to A$. Osoitamme, että $n = k$. Bijektioiden yhdistettyinä kuvauksina kuvaukset $g^{-1} \circ f : [n] \to [k]$ ja $f^{-1} \circ g : [k] \to [n]$ ovat bijektioita ja täten surjektioita. Lemman I 3.2 tuloksesta seuraa, että on voimassa $n \geq k$ ja $k \geq n$. Täten $n = k$. □

Olkoon A äärellinen joukko. Käytämme Lauseen I 3.3 yksikäsitteiseksi todistamasta luvusta n merkintää $|A|$ ("A:n *alkioiden lukumäärä*" tai "A:n *koko*"). Kun $|A| = n > 0$, niin voimme esittää joukon A muodossa $A = \{a_1, ..., a_n\}$: asetamme $a_i = \varphi(i)$ jokaisella $i \in [n]$, kun φ on bijektio $[n] \to A$.

Kun A on äärellinen joukko ja $|A| = n$, niin sanomme, että A on *n-joukko* tai *n-alkioinen joukko*. Käytämme seuraavassa sekä merkintää "$|B| = n$" että sanontoja "B on n–joukko" ja "B on n-alkioinen joukko" lyhennyksenä ilmaisulle "B on äärellinen joukko ja n on luonnollinen luku, jolle on voimassa $|B| = n$".

Tyhjä joukko on ainoa 0–joukko. Yksiö on sama asia kuin 1-joukko. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $|[n]| = n$, koska joukon identtinen kuvaus on aina bijektio joukolta itselleen.

Huomautus Kun myöhemmin puhumme (ilman eri määritelmää) "n-osajoukoista", "n-osituksista", "n-renkaista", jne., tarkoitamme samaa kuin edellä: B on n-osajoukko (n-ositus, n-rengas, jne.), mikäli B on osajoukko (ositus, rengas, jne.) ja $|B| = n$.

Osoitamme nyt, että joukkojen välinen bijektio "säilyttää" joukkojen äärellisyyden ja niiden koon.

I 3.4 Lause *Olkoot A ja B sellaisia joukkoja, että on olemassa bijektio $A \to B$. Jos joko A tai B on äärellinen, niin tällöin sekä A että B ovat äärellisiä ja on voimassa $|A| = |B|$.*

Todistus. Olkoon f bijektio $A \to B$.

Oletamme, että joukko A on äärellinen. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja bijektio $\varphi : [n] \to A$. Yhdistetty kuvaus $f \circ \varphi$ on Lauseen I 1.11 nojalla bijektio $[n] \to B$. Täten B on äärellinen ja on voimassa $|B| = n = |A|$.

Koska kuvaus f^{-1} on bijektio $B \to A$, edellä esitetystä seuraa, että jos B on äärellinen, niin tällöin A on äärellinen ja $|A| = |B|$. □

Seuraavaksi osoitamme, että äärellisten joukkojen osajoukot ovat äärellisiä. Todistamme tämän ensin joukkojen $[n]$, $n \in \mathbb{N}$, osajoukoille.

I 3.5 Lemma *Olkoon n luonnollinen luku ja olkoon A joukon $[n]$ aito osajoukko. Tällöin jollain $k < n$ on olemassa bijektio $A \to [k]$.*

Todistus. Suoritamme todistuksen induktiolla luvun n suhteen.

Väite on tosi arvolla $n = 0$, koska joukolla $[0]$ ei ole aitoja osajoukkoja.

Oletamme, että väite pätee luvulle $n \in \mathbb{N}$ ja todistamme sen luvulle n^+. Olkoon A joukon $[n^+]$ aito osajoukko. Merkitsemme $B = A \cap [n]$. Jos $B = [n]$, niin välttämättä $A = B$ ja väite pätee A:lle ja n^+:lle kun valitsemme $k = n$. Oletamme, että B on $[n]$:n aito osajoukko. Induktio–oletuksen nojalla on olemassa $k < n$ ja bijektio $f : B \to [k]$. Jos $A = B$, niin olemme todistaneet väitteen joukolle A. Oletamme, että $B \neq A$. Tällöin $A = B \cup \{n^+\}$. Näemme helposti, että kuvaus $g : A \to [k^+]$, missä $g(i) = f(i)$ jokaisella $i \neq n^+$ ja $g(n^+) = k^+$, on bijektio. Koska $k < n$, on voimassa $k^+ < n^+$. Olemme osoittaneet, että väite pätee luvulle n^+. □

I 3.6 Lause *Olkoon A äärellinen joukko ja olkoon B A:n aito osajoukko. Tällöin B on äärellinen ja $|B| < |A|$.*

Todistus. Koska A on äärellinen, on olemassa $n = |A|$ ja bijektio $f : A \to [n]$. Merkitään $C = f(B) = \{f(b) : b \in B\}$. Koska f on bijektio ja $B \subsetneqq A$, on voimassa $C \subsetneqq [n]$. Lemman I 3.5 nojalla on olemassa $k < n$ ja bijektio $g : C \to [k]$. Kuvaus $\varphi : B \to [k]$, missä $\varphi(b) = g(f(b))$ jokaisella $b \in B$, on bijektio. Täten B on äärellinen ja $|B| = k < n = |A|$. □

Edellisten tulosten avulla voimme luonnehtia $\mathbb{N}$:n osajoukkojen äärellisyyttä.

I 3.7 Lemma *Olkoon $A \subset \mathbb{N}$ epätyhjä äärellinen joukko, $|A| = m$. Tällöin joukolla A on sellainen esitys $A = \{a_i : i \in [m]\}$, että jokaisella $i \in [m^-]$ on voimassa $a_i < a_{i^+}$.*

Todistus. Määrittelemme alkiot $a_1, ..., a_m$ rekursiivisesti valitsemalla aina a_i:ksi joukon $A \setminus \{a_j : j \in [i^-]\}$ pienimmän alkion; tämä määritelmä on pätevä, koska $j \mapsto a_j$ on bijektio $[i^-] \to \{a_j : 1 \leq j < i\}$, joten $|\{a_j : 1 \leq j < i\}| = i^- < |A|$ ja näin ollen $A \setminus \{a_j : 1 \leq j < i\} \neq \emptyset$. Toisaalta $|\{a_1, ..., a_m\}| = m = |A|$, joten $\{a_1, ..., a_m\} = |A|$ Lauseen I 3.6 nojalla. Määritelmästä seuraa suoraan, että jokaisella $i \in [m^-]$ on voimassa $a_i < a_{i^+}$. □

I 3.8 Lause *Joukon $\mathbb{N}$ osajoukko on äärellinen jos ja vain jos osajoukko on rajoitettu.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Olkoon $A \subset \mathbb{N}$ äärellinen joukko. Jos $A = \emptyset$, niin A on rajoitettu. Oletamme, että $A \neq \emptyset$. Lemman I 3.7 nojalla joukolla A on sellainen esitys $A = \{a_1, ..., a_m\}$, että jokaisella $i \in [m^-]$ on voimassa $a_i < a_{i^+}$. Nyt a_m on joukon A suurin luku, joten joukko A on rajoitettu.
Riittävyys. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ kuvaus $k \mapsto k^+$ on bijektio joukolta $\{0, ..., n\}$ joukolle $[n^+]$; näinollen joukko $\{0, ..., n\}$ on äärellinen; Lauseen I 3.6 nojalla myös jokainen joukon $\{0, ..., n\}$ osajoukko on äärellinen. Rajoitettujen joukkojen äärellisyys seuraa edellisestä, sillä joukko $E \subset \mathbb{N}$ on rajoitettu jos ja vain jos on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $E \subset \{0, ..., n\}$. □

Lauseesta I 3.8 seuraa erityisesti, että joukko $\mathbb{N}$ on ääretön.

Seuraavassa todistamme äärellisiä joukkoja koskevia väitteitä usein *induktiolla joukkojen koon suhteen.* Tällaiset induktiotodistukset ovat seuraavaa muotoa. Olkoon $\mathcal{A}$ jokin joukko, jonka alkiot ovat äärellisiä joukkoja ja olkoon P joukon $\mathcal{A}$ alkioiden ominaisuus. Nyt voimme tarkastella seuraavaa luonnollisten lukujen ominaisuutta Q:

$$Q(n) \iff (\forall A \in \mathcal{A})\,(|A| = n \implies P(A))\,.$$

Jos saamme todistettua induktiolla, että jokaisella luonnollisella luvulla on ominaisuus Q, niin voimme päätellä, että jokaisella joukkoon $\mathcal{A}$ kuuluvalla joukolla on ominaisuus P.

Esimerkkinä induktiosta joukon koon suhteen osoitamme, että äärellisen monen äärellisen joukon yhdistys on äärellinen (huomaa, että joukon $\mathbb{N}$ äärellisille osajoukoille tämä tulos seuraa helposti edellisen lauseen tuloksesta).

I 3.9 Lause *Äärellisen monen äärellisen joukon muodostama yhdistysjoukko on äärellinen.*

Todistus. Todistamme lauseen tuloksen kahden äärellisen joukon tapauksessa: yleinen tulos seuraa tästä helposti induktiolla joukkojen lukumäärän suhteen.

Olkoot siis X ja Y äärellisiä joukkoja. Joukko $Z = Y \setminus X$ on Lauseen I 3.6 nojalla äärellinen ja lisäksi pätee, että $X \cup Y = X \cup Z$. Merkitään $\mathcal{A} = \{A : A \subset X\}$. Lauseen I 3.6 nojalla jokainen joukon $\mathcal{A}$ alkio on äärellinen joukko. Merkitsemme Q:lla seuraavaa luonnollisten lukujen ominaisuutta:

$$Q(n) \iff (\forall A \in \mathcal{A})\,(|A| = n \implies \text{ joukko } A \cup Z \text{ on äärellinen})\,.$$

Osoitamme induktiolla, että jokaisella luonnollisella luvulla on ominaisuus Q. Luvulla 0 on ominaisuus Q, sillä jos $|A| = 0$, niin $A = \emptyset$ ja $A \cup Z = Z$, joten joukko $A \cup Z$ on äärellinen. Olkoon nyt n sellainen luonnollinen luku, että jokaisella luonnollisella luvulla $k \leq n$ on ominaisuus Q. Osoitamme, että myös luvulla n^+ on ominaisuus Q. Olkoon $A \in \mathcal{A}$ sellainen joukko, että $|A| = n^+$. Osoitamme, että joukko $A \cup Z$ on äärellinen. Koska $|A| = n^+ > 0$, niin $A \neq \emptyset$ ja täten on olemassa alkio $a \in A$. Joukolle $B = A \smallsetminus \{a\}$ on voimassa $B \in \mathcal{A}$ ja, Lauseen 3.5 nojalla, $|B| < |A|$. Induktio–oletuksen nojalla joukko $B \cup Z$ on äärellinen. Täten on olemassa $m \in \mathbb{N}$ ja bijektio $\varphi : [m] \to B \cup Z$. Määritellään kuvaus $\psi : [m^+] \to A \cup Z$ asettamalla $\psi(k) = \varphi(k)$ jos $k \leq m$ ja $\psi(m^+) = a$. Nähdään helposti, että kuvaus ψ on bijektio. Täten joukko $A \cup Z$ on äärellinen. Olemme osoittaneet, että luvulla n^+ on ominaisuus Q. Edellä esitetystä seuraa induktioperiaatteen nojalla, että jokaisella luonnollisella luvulla on ominaisuus Q. Erityisesti, luvulla $|X|$ on ominaisuus Q, joten joukko $X \cup Z = X \cup Y$ on äärellinen. □

I 3.10 Korollaari *Kahden äärellisen joukon karteesinen tulo on äärellinen.*

Todistus. Jos X ja Y ovat äärellisiä joukkoja, niin voimme esittää tulojoukon $X \times Y$ äärellisenä yhdisteenä $\bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$, jonka tekijät $X \times \{y\}$ ovat äärellisiä (koska kuvaus $x \mapsto (x, y)$ on bijektio $X \to X \times \{y\}$). □

Mainitsemme vielä yhden induktioperiaatteen, *induktion äärellisen joukon osajoukkojen suhteen.* Olkoon X äärellinen joukko. Kuten näimme edellisen lauseen todistuksessa, joukon X:n osajoukkoja koskevia väitteitä voidaan todistaa induktiolla osajoukkojen koon suhteen. Tässä yhteydessä meidän ei kuitenkaan välttämättä tarvitse tarkastella lainkaan X:n osajoukkojen kokoja, sillä jos P on joku X:n osajoukkojen ominaisuus, niin voimme käyttää seuraavaa tulosta:

$$[(\forall A \subset X)\,(((\forall B \subsetneqq A)P(B)) \Longrightarrow P(A))] \Longrightarrow (\forall A \subset X)P(A). \qquad (*)$$

Toisinsanoen, joukon X jokaisella osajoukolla (ja siis myös joukolla X itsellään) on ominaisuus P, mikäli tämä ominaisuus on jokaisella sellaisella X:n osajoukolla, jonka jokaisella aidolla osajoukolla on kyseinen ominaisuus. Induktioperiaate $(*)$ todistetaan osoittamalla seuraavan lemman avulla, että joukko $\mathcal{B} = \{A \subset X : A$:lla ei ole ominaisuutta $P\}$ on tyhjä.

I 3.11 Lemma *Olkoon $\mathcal{B}$ epätyhjä joukko, jonka jokainen alkio on äärellinen joukko. Tällöin on olemassa sellainen $B \in \mathcal{B}$, että mikään joukon B aito osajoukko ei kuulu joukkoon $\mathcal{B}$.*

Todistus. Koska $\mathcal{B} \neq \emptyset$, joukko $\{|B| : B \in \mathcal{B}\}$ on epätyhjä ja Lauseen I 2.1 tuloksesta seuraa näin ollen, että on olemassa sellainen $B \in \mathcal{B}$, että jokaisella $C \in \mathcal{B}$ on voimassa $|B| \leq |C|$. Koska jokaiselle $C \subsetneqq B$ on Lauseen I 3.6 nojalla voimassa $|B| > |C|$, nähdään ettei mikään B:n aito osajoukko kuulu joukkoon $\mathcal{B}$. □

Eräs käyttökelpoinen muoto edellisestä induktioperiaatteesta on seuraava:

$$P(\emptyset)\&\,[(\forall A \subset X)\,((\forall x \in X \smallsetminus A)(P(A) \Longrightarrow P(A \cup \{x\})] \Longrightarrow P(X). \qquad (**)$$

Luonnollisten lukujen joukossa määritellyt aritmeettiset operaatiot ja niiden perusominaisuudet oletamme seuraavassa tunnetuiksi. Osoitamme tässä kuitenkin, miten edellä esitetyn aksiomaattisen lähestymistavan puitteissa voimme helposti ja luonnollisella tavalla määritellä kyseiset aritmeettiset operaatiot, kun joukon koko on määritelty.

Määrittelemme aluksi kahden luvun summan. Kun $n \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{N}$, niin asetamme

$$n + k = |\,([n] \times \{0\}) \cup ([k] \times \{1\})\,|.$$

Toisin sanoen joukot $[n]$ ja $[k]$ “tehdään erillisiksi” ja $n + k$:ksi asetetaan yhdistysjoukon koko.

Koska kuvaus

$$\phi : ([k] \times \{0\}) \cup ([n] \times \{1\}) \to ([n] \times \{0\}) \cup ([k] \times \{1\}),$$

missä $\phi(l, i) = (l, 1 - i)$, on bijektio, niin on voimassa $k + n = n + k$.

Panemme merkille, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$, joukon

$$([n] \times \{0\}) \cup ([1] \times \{1\}) = ([n] \times \{0\}) \cup \{(1, 1)\}$$

koko $n + 1$ on Lauseen I 3.6 nojalla suurempi kuin joukon $[n] \times \{0\}$ koko eli n; tästä seuraa, että on voimassa $n + 1 \geq n^+$. Toisaalta näemme helposti, että kuvaus $\psi : ([n] \times \{0\}) \cup \{(1, 1)\} \to [n^+]$, missä $\psi(k, 0) = k$, jokaisella $k \in [n]$ ja $\psi(1, 1) = n^+$, on bijektio joukolta $([n] \times \{0\}) \cup \{(1, 1)\} \to [n^+]$ eräälle joukon $[n^+]$ osajoukolle;

tästä seuraa Lauseen I 3.6 nojalla, että on voimassa $|([n] \times \{0\}) \cup \{(1,1)\}| \leq |[n^+]|$ eli $n+1 \leq n^+$. Edellä esitetystä seuraa, että on voimassa $n^+ = n+1$; tästä eteenpäin käytämmekin tutumpaa merkintää $n+1$ luonnollisen luvun n seuraajalle n^+. Koska luvuille $n > 0$ on Lemman I 2.2 nojalla voimassa $(n^-)^+ = n$ eli $n^- + 1 = n$, niin n:n edeltäjälle n^- voidaan käyttää merkintää $n - 1$.

Seuraavassa tarvitsemme usein myös yleisempää summan käsitettä. Olkoon I äärellinen joukko ("*indeksijoukko*") ja olkoon k_i luonnollinen luku jokaisella $i \in I$. *Lukujen* k_i, $i \in I$, *summa* $\sum_{i\in I} k_i$ määritellään seuraavasti:

$$\sum_{i\in I} k_i = \Big|\bigcup_{i\in I}[k_i] \times \{i\}\Big|.$$

Näemme helposti, että jos edellä $I = \emptyset$, niin $\sum_{i\in I} k_i = 0$, jos $I = \{j\}$, niin $\sum_{i\in I} k_i = k_j$ ja jos $I = \{j, l\}$, niin $\sum_{i\in I} k_i = k_j + k_l$.

Jos indeksijoukko I on muotoa $\{i \in \mathbb{N} : l \leq i \leq n\}$, niin käytämme merkinnän $\sum_{i\in I} k_i$ asemasta usein merkintää $\sum_{i=l}^{n} k_i$.

Jos A on jokin äärellinen joukko luonnollisia lukuja, niin määrittelemme *lukujoukon A summan* $\sum A$ asettamalla $\sum A = \sum_{k\in A} k$.

Voisimme määritellä myös yleisen summan rekursiolla indeksijoukon koon suhteen, mutta edellä annetusta määritelmästä käsin on helpompi todistaa summan ominaisuuksia. Monet näistä ominaisuuksista seuraavat helposti alla mainitusta tuloksesta.

Harjoitustehtäviä. 1^o Osoita, että edellä määritellyllä summalla $\sum_{i\in I} k_i$ on seuraava ominaisuus ("*täydellinen ryhmiteltävyys*"): jos P on äärellinen joukko ja jos A_p, $p \in P$, ovat sellaisia joukkoja, että $\bigcup_{p\in P} A_p = I$ ja $A_p \cap A_q = \emptyset$ aina kun $p \neq q$, niin tällöin on voimassa

$$\sum_{i\in I} k_i = \sum_{p\in P} \Big(\sum_{i\in A_p} k_i\Big).$$

Edellistä muotoa olevasta summasta voidaan usein selvyyden kärsimättä jättää pois sulkumerkit ja siis kirjoittaa

$$\sum_{p\in P} \Big(\sum_{i\in A_p} k_i\Big) = \sum_{p\in P}\sum_{i\in A_p} k_i.$$

2^o Osoita täydellisen ryhmiteltävyyden avulla *summausjärjestyksen vaihtomahdollisuus*: Jos $k_{ij} \in \mathbb{N}$ jokaisella $(i,j) \in I \times J$, niin

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} k_{ij} = \sum_{(i,j)\in I\times J} k_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} k_{ij}.$$

Yleisen summamerkinnän avulla voimme ilmaista äärellisen monen erillisen äärellisen joukon yhdisteen alkioiden lukumäärän.

I 3.12 Lause *Olkoon I äärellinen joukko ja olkoot A_i, $i \in I$, keskenään erillisiä äärellisiä joukkoja. Tällöin*

$$\boxed{\Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big| = \sum_{i\in I} |A_i|}$$

Todistus. Olkoon jokaisella $i \in I$, ϕ_i bijektio $[k_i] \to A_i$, missä on siis merkitty $k_i = |A_i|$. Merkitään $X = \bigcup_{i\in I}[k_i] \times \{i\}$, jolloin $|X| = |\bigcup_{i\in I}[k_i] \times \{i\}| = \sum_{i\in I} k_i$. Määritellään kuvaus $\phi : X \to \bigcup_{i\in I} A_i$ kaavalla $\phi(n,i) = \phi_i(n)$. Tällöin ϕ on surjektio, sillä jokaisella $i \in I$ on voimassa $A_i = \phi_i([k_i]) = \phi([k_i] \times \{i\}) \subset \phi(X)$. Lisäksi ϕ on injektio, sillä jos $(n,i), (m,j) \in X$ ja $(n,i) \neq (m,j)$, niin $\phi(n,i) \in A_i$ ja $\phi(m,j) \in A_j$, joten tapauksessa $i \neq j$ on voimassa $\phi(n,i) \neq \phi(m,j)$ joukkojen A_i ja A_j erillisyyden nojalla; tapauksessa $i = j$ on voimassa $n \neq m$ ja $\phi_i = \phi_j$, joten $\phi(n,i) = \phi_i(n) = \phi_j(n) \neq \phi_j(m) = \phi(m,j)$ kuvauksen ϕ_j bijektiivisyyden nojalla. Olemme osoittaneet, että ϕ on bijektio. Lauseen I 3.4 nojalla on voimassa $|\bigcup_{i\in I} A_i| = |X| = \sum_{i\in I} k_i$. $\square$

Merkinnällä $\sum_{i\in I} k$ tarkoitamme seuraavassa summaa $\sum_{i\in I} k_i$, missä $k_i = k$ jokaisella $i \in I$. Koska voimme esittää äärellisen joukon A keskenään erillisten joukkojen $\{a\}$, $a \in A$, yhdisteenä ja koska $|\{a\}| = 1$ jokaisella $a \in A$, niin voimme ilmaista A:n koon tämän merkinnän mukaisesti seuraavasti:

I 3.13 Korollaari *Äärelliselle joukolle A on voimassa*

$$\boxed{|A| = \sum_{a\in A} 1}$$

Yllä olevan yhtälön oikeanpuoleinen lauseke vastaa intuitiivista ajatusta siitä, että joukon koko saadaan "laskemalla" joukon alkioiden lukumäärä.

Kahden erillisen joukon tapauksessa voimme ilmaista edellisen lauseen tuloksen seuraavasti.

I 3.14 Korollaari *Kun A ja B ovat keskenään erillisiä äärellisiä joukkoja, niin* $|A \cup B| = |A| + |B|$.

I 3.15 Korollaari *Olkoon A äärellinen joukko ja olkoon B A:n osajoukko. Tällöin* $|A \smallsetminus B| = |A| - |B|$.

Todistus. Joukot B ja $A \smallsetminus B$ ovat Lauseen I 3.6 nojalla äärellisiä. Koska $B \cup (A \smallsetminus B) = A$ ja $B \cap (A \smallsetminus B) = \emptyset$, on edellisen korollaarin nojalla voimassa $|B| + |A \smallsetminus B| = |A|$. Näin ollen $|A \smallsetminus B| = |A| - |B|$. □

Korollaarin I 3.15 tuloksesta seuraa muun muassa, että kun H on äärellinen joukko ja $h \in H$, niin $|H \smallsetminus \{h\}| = |H| - 1$.

Myös seuraava tulos seuraa Lauseesta I 3.12.

I 3.16 Korollaari *Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja ja olkoon f kuvaus $X \to Y$. Tällöin* $|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}\{y\}|$.

Todistus. Jokaisella $x \in X$ voimassa $x \in f^{-1}\{f(x)\}$; täten $\bigcup_{y \in Y} f^{-1}\{y\} = X$. Lisäksi kaikilla $y, v \in Y$, jos $y \neq v$, niin $f^{-1}\{y\} \cap f^{-1}\{v\} = \emptyset$. Joukot $f^{-1}\{y\}$, $y \in Y$, ovat Lauseen I 3.6 nojalla äärellisiä. Täten korollaarin tulos seuraa Lauseesta I 3.12. □

Voimme määritellä luonnollisten lukujen tulon seuraavasti summan avulla:

$$n \cdot m = \sum_{i \in [m]} n \ .$$

Panemme merkille, että on voimassa

$$(*) \qquad \sum_{i \in [m]} n = \left| \bigcup_{i \in [m]} [n] \times \{i\} \right| = |[n] \times [m]| \ ;$$

näin ollen lukujen n ja m tulo $n \cdot m$ ilmaisee joukkojen $[n]$ ja $[m]$ karteesisen tulon $[n] \times [m]$ koon. Jätämme lukijan tarkastettavaksi, että näin määritellyllä tulolla tosiaan on luonnollisten lukujen tulon tutut ominaisuudet.

I 3.17 Lause *Äärellisille joukoille A ja B on voimassa*

$$\boxed{|A \times B| = |A| \cdot |B|}$$

Todistus. Merkitään $n = |A|$ ja $m = |B|$. Olkoot $\phi : [n] \to A$ ja $\psi : [m] \to B$ bijektioita. Tällöin kuvaus $(i, j) \mapsto (\phi(i), \psi(j))$ on bijektio $[n] \times [m] \to A \times B$ ja lauseen tulos seuraa Lauseen I 3.4 ja yllä olevan yhtälöketjun $*$ nojalla. □

Tässä yhteydessä emme käsittele luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ laajennusta kokonaislukujen joukoksi $\mathbb{Z}$, vaan oletamme, että lukija on jo tutustunut tähän laajennukseen (esimerkiksi algebran opintojen yhteydessä); huomautamme vain, että yleistetty summa $\sum$ ja yleistetty tulo Π voidaan määritellä myös kokonaislukuvuille (tai jopa reaaliluvuille) sillä tavoin, että täydellinen ryhmiteltävyys ja järjestyksen vaihdettavuus ovat voimassa.

4. Joukon ositukset. Ekvivalenssirelaatiot.

Kutsumme usein *(joukko)perheeksi* sellaista joukkoa, jonka alkiotkin ovat joukkoja. Perheen alkioiden asemesta puhumme *perheen joukoista*. Jos perheen joukot ovat jonkun annetun joukon ("perusjoukon") A osajoukkoja, niin puhumme A:n *osajoukkoperheistä*. Joukon A osajoukkoperheistä suurin on A:n kaikkien osajoukkojen muodostama joukko $\{B : B \subset A\}$; tätä joukkoperhettä kutsutaan usein *joukon A potenssijoukoksi* ja siitä käytetään merkintää $\mathcal{P}(A)$. Esimerkiksi $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$. Joukon A osajoukkoperheet ovat täten perheen $\mathcal{P}(A)$ osaperheitä. Joukkoperheitä merkitään yleensä symbolein $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$. Joukkoperheen $\mathcal{B}$ leikkaus ja yhdiste määriteltiin edellä kaavoilla $\bigcap \mathcal{B} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ ja $\bigcup \mathcal{B} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Tehdään vielä seuraavat sopimukset: jos $\mathcal{B}$ on tyhjä perhe A:n osajoukkoja (eli $\mathcal{B} = \emptyset$), niin $\bigcap \mathcal{B} = A$ ja $\bigcup \mathcal{B} = \emptyset$ (motivaatio: $\bigcap \emptyset = \{a \in A : a \in B$ jokaisella $B \in \emptyset\} = A$ ja $\bigcup \emptyset = \{a \in A : \exists B \in \emptyset$ siten, että $a \in B\} = \emptyset$).

I 4.1 Määritelmä Olkoon A joukko ja olkoon $\mathcal{B}$ joukkoperhe.
Perhe $\mathcal{B}$ on joukon A *peite*, mikäli on voimassa $\bigcup \mathcal{B} = A$.
Perhe $\mathcal{B}$ on *erillinen*, jos kaikki $\mathcal{B}$:n eri joukot ovat keskenään erillisiä.
Perhe $\mathcal{B}$ on A:n *ositus*, mikäli $\mathcal{B}$ on epätyhjistä joukoista koostuva A:n erillinen peite.

Huomattakoon, että joukon A epätyhjien osajoukkojen muodostama perhe $\mathcal{B}$ on A:n ositus jos ja vain jos jokainen A:n alkio kuuluu täsmälleen yhteen perheen $\mathcal{B}$ joukkoon.

I 4.2 Esimerkkejä epätyhjän joukon A osituksista:
(a) $\mathcal{B} = \{A\}$.
(b) $\mathcal{B} = \{\{a\} : a \in A\}$.
(c) $\mathcal{B} = \{B, A \smallsetminus B\}$ kun $\emptyset \neq B \subsetneq A$.
(d) $\mathcal{B} = \{B \smallsetminus C, C \smallsetminus B, B \cap C, A \smallsetminus (B \cup C)\} \smallsetminus \{\emptyset\}$ kun $B, C \subset A$.

Yllä olevassa esimerkissä (d) voimme esittää joukon A osajoukot B ja C yhdistyksinä esimerkissä muodostetun osituksen $\mathcal{B}$ joukoista: $B = (B \setminus C) \cup (B \cap C)$ ja $C = (C \setminus B) \cup (B \cap C)$. Seuraavassa lauseessa konstruoimme "pienimmän" sellaisen osituksen, jonka joukkojen yhdistyksinä voimme esittää kaikki annetun osajoukkoperheen joukot.

I 4.3 Lause *Olkoon $\mathcal{B}$ joukon A osajoukkoperhe. Merkitään*

$$X_{\mathcal{C}} = \bigcap \mathcal{C} \setminus \bigcup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}) \qquad \text{jokaisella } \mathcal{C} \subset \mathcal{B}.$$

Tällöin perhe $\mathcal{X} = \{X_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \subset \mathcal{B}\} \setminus \{\emptyset\}$ on A:n ositus ja jokaisella $B \in \mathcal{B}$ on voimassa $B = \bigcup \{X \in \mathcal{X} : X \subset B\}$.

Todistus. Sen osoittamiseksi, että $\mathcal{X}$ on A:n ositus, riittää näyttää, että jokainen A:n alkio kuuluu täsmälleen yhteen perheen $\mathcal{B}$ joukkoon. Olkoon a A:n alkio. Merkitään $\mathcal{B}_a = \{B \in \mathcal{B} : a \in B\}$. Tällöin $a \in \bigcap \mathcal{B}_a$ ja $a \notin \bigcup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_a)$, joten $a \in X_{\mathcal{B}_a}$. Olkoon nyt $\mathcal{C}$ sellainen $\mathcal{B}$:n osaperhe, että $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}_a$. Tällöin on olemassa sellainen joukko $B \in \mathcal{B}$, että joko $B \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_a$ tai $B \in \mathcal{B}_a \setminus \mathcal{C}$. Jos $B \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_a$, niin $a \notin B$ ja $X_{\mathcal{C}} \subset B$, joten tässä tapauksessa $a \notin X_{\mathcal{C}}$. Jos taas $B \in \mathcal{B}_a \setminus \mathcal{C}$, niin $a \in B$ ja $X_{\mathcal{C}} \subset A \setminus \bigcup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}) \subset A \setminus B$, joten tässäkään tapauksessa a ei kuulu joukkoon $X_{\mathcal{C}}$. Olemme näyttäneet, että jokaiselle $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ pätee, että jos $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}_a$, niin $a \notin X_{\mathcal{C}}$. Täten a kuuluu täsmälleen yhteen perheen $\mathcal{X}$ joukkoon.

Osoitamme vielä, että jokaiselle $B \in \mathcal{B}$ on voimassa $B = \bigcup \{X \in \mathcal{X} : X \subset B\}$. Olkoon B perheen $\mathcal{B}$ joukko. Yllä esitetyn nojalla on jokaisella $a \in A$ voimassa $a \in X_{\mathcal{B}_a}$. Jos $a \in B$, niin $B \in \mathcal{B}_a$ ja näin ollen $X_{\mathcal{B}_a} \subset \bigcap \mathcal{B}_a \subset B$. Edellä esitetyn nojalla on voimassa $B = \bigcup \{X_{\mathcal{B}_a} : a \in B\}$; tästä seuraa, koska $\{X_{\mathcal{B}_a} : a \in B\} \subset \mathcal{X}$, että $B = \bigcup \{X \in \mathcal{X} : X \subset B\}$. □

Jos yllä olevan todistuksen merkintöjä käyttäen määrittelemme kuvauksen $f : A \to \mathcal{P}(\mathcal{B})$ asettamalla $f(a) = \mathcal{B}_a$ jokaisella $a \in A$, niin on voimassa

$$f^{-1}\{\mathcal{C}\} = \{a \in A : \mathcal{B}_a = \mathcal{C}\} = X_{\mathcal{C}} \qquad \text{jokaisella } \mathcal{C} \subset \mathcal{B}.$$

Yleisesti saamme seuraavan tuloksen.

I 4.4 Lause *Jos $f : A \to E$ on kuvaus, niin perhe*

$$\mathcal{O}_f = \{f^{-1}\{e\} : e \in f(A)\}$$

on A:n ositus.

Kääntäen, jokainen A:n ositus voidaan muodostaa tällä tavalla.

Todistus. Selvästi $f^{-1}\{e\} \neq \emptyset$ jokaisella $e \in f(A)$. Jokainen $a \in A$ kuuluu täsmälleen yhteen perheen $\mathcal{O}_f$ joukkoon, nimittäin joukkoon $f^{-1}\{f(x)\}$. Täten $\mathcal{O}_f$ on A:n ositus.

Kääntäen, olkoon $\mathcal{O}$ A:n ositus. Tällöin voidaan määritellä kuvaus $g : A \to \mathcal{O}$ asettamalla $g(a) = O$ kun $a \in O \in \mathcal{O}$. Kuvaus g on surjektio ja jokaisella $O \in \mathcal{O}$ on voimassa $O = g^{-1}\{O\}$; näin ollen $\mathcal{O} = \mathcal{O}_g$. □

Yllä olevan todistuksen lopussa määriteltyä kuvausta g kutsutaan *kanooniseksi surjektioksi* $A \to \mathcal{O}$.

Voimme tarkastella joukon osituksia myös ns. ekvivalenssirelaatioiden avulla. Ekvivalenssilla tarkoitamme samanarvoisuutta (jonkun tarkastelun suhteen).

Esimerkki. Atomien ytimet ovat ekvivalentit

(1) kemiassa, kun niillä on sama ytimen varaus (järjestysluku) Z

(2) fysiikassa, kun niillä on sama Z ja sama massaluku A

(3) ydinfysiikassa, kun niillä on samat Z ja A ja sama viritystila.

Ekvivalenssi on siis eri asia eri tilanteissa. Siihen liittyy kuitenkin aina luokittelu. Esimerkissä

(1) alkuaineet (2) isotoopit (3) ytimen isomeerit.

Ekvivalenssirelaatiot voidaan määritellä luokittelujen kautta. Joukon alkioiden luokittelu jakaa alkiot erillisiin luokkiin, joten luokittelu määrää joukon osituksen. Kääntäen, jokainen joukon ositus luokittelee joukon alkiot sen mukaan, mihin osituksen joukkoon ne kuuluvat. Joukon kaksi alkiota ovat ositukseen liittyvän luokittelun mielessä ekvivalentit, mikäli ne kuuluvat samaan osituksen joukkoon. Tarkastelemme nyt osituksen määräämän ekvivalenssin ominaisuuksia.

I 4.5 Lause *Jos $\mathcal{O}$ on joukon X ositus, niin relaatiolla*

$$E_{\mathcal{O}} = \{(x,y) \in X \times X : \exists O \in \mathcal{O} \text{ siten, että } x \in O \text{ ja } y \in O\}$$

on seuraavat ominaisuudet:

(i) *(refleksiivisyys)* $(x,x) \in E_{\mathcal{O}}$ *jokaisella* $x \in X$.

(ii) *(symmetrisyys)* $(x,y) \in E_{\mathcal{O}} \Rightarrow (y,x) \in E_{\mathcal{O}}$ *kaikilla* $x, y \in X$.

(iii) *(transitiivisuus)* $(x,y) \in E_{\mathcal{O}}$ *ja* $(y,z) \in E_{\mathcal{O}} \Rightarrow (x,z) \in E_{\mathcal{O}}$ *kaikilla* $x, y, z \in X$.

Todistus. Merkitsemme f:llä kanoonista surjektiota $X \to \mathcal{O}$. Tällöin kaikilla $x \in X$ ja $O \in \mathcal{O}$ on voimassa $f(x) = O \iff x \in O$. Näin ollen kaikilla $x \in X$ ja $y \in X$ on voimassa $(x,y) \in E_{\mathcal{O}} \iff f(x) = f(y)$. Lauseen ehtojen voimassaolo on nyt selvää, sillä kaikilla $x \in X, y \in X$ ja $z \in X$ on voimassa:

(i) $f(x) = f(x)$.

(ii) $f(x) = f(y) \iff f(y) = f(x)$.

(iii) $f(x) = f(y)$ ja $f(y) = f(z) \Longrightarrow f(x) = f(z)$. □

Joukon X relaation R refleksiivisyys, symmetrisyys ja transitiivisuus voidaan ilmaista myös seuraavasti:

(refleksiivisyys)	xRx jokaisella $x \in X$.
(symmetrisyys)	$xRy \Rightarrow yRx$ kaikilla $x, y \in X$.
(transitiivisuus)	xRy & $yRz \;\Rightarrow\; xRz$ kaikilla $x, y, z \in X$.

I 4.6 Määritelmä Joukon X relaatio R on X:n *ekvivalenssirelaatio*, jos R on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

Merkitsemme usein ekvivalenssirelaatioita muotoa $\sim$ ja $\equiv$ olevilla symboleilla ja kirjoitamme esimerkiksi $x \sim y$ emmekä $(x,y) \in \sim$.

I 4.7 Esimerkkejä **(a)**Identtisyysrelaatio id_X on joukon X ekvivalenssirelaatio.
(b) Määrittelemme kokonaislukujen joukossa Z relaation R asettamalla $(x,y) \in R \iff x - y$ on parillinen. Tällöin R on

(i) refleksiivinen: $x - x = 0$ on parillinen.

(ii) symmetrinen: $x - y$ on parillinen $\Rightarrow y - x = -(x-y)$ on parillinen.

(iii) transitiivinen: $x - y$ ja $y - z$ parillisia $\Rightarrow x - z = (x-y) + (y-z)$ on parillinen.

Täten R on ekvivalenssirelaatio. Tavallisesti merkitsemme sitä $x \equiv y$ (mod2)

Liitimme Lauseessa I 4.5 jokaiseen joukon X ositukseen $\mathcal{O}$ X:n ekvivalenssirelaation $E_{\mathcal{O}}$. Osoitamme nyt, että saamme tällä tavalla kaikki X:n ekvivalenssirelaatiot. Todistamme aluksi eräitä aputuloksia.

I 4.8 Lemma *Joukon X relaatio R on transitiivinen jos ja vain jos kaikilla $x, y \in X$ on voimassa $y \in R\{x\} \Rightarrow R\{y\} \subset R\{x\}$.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Oletetaan, että relaatio R on transitiivinen. Olkoon X:n alkioille x ja y voimassa $y \in R\{x\}$ eli $(x,y) \in R$. Olkoon z joukon $R\{y\}$ alkio. Tällöin $(y,z) \in R$. Koska R on transitiivinen ja koska on voimassa $(x,y) \in R$ ja $(y,z) \in R$, on voimassa $(x,z) \in R$ eli $z \in R\{x\}$. Olemme osoittaneet, että $R\{y\} \subset R\{x\}$.
Riittävyys. Oletetaan, että relaatio R toteuttaa lemmassa mainitun ehdon. Näytetään, että R on transitiivinen. Olkoon X:n alkioille x, y ja z voimassa $(x,y) \in R$ ja $(y,z) \in R$. Tällöin $y \in R\{x\}$, joten oletuksen nojalla on voimassa $R\{y\} \subset R\{x\}$. On myös voimassa $z \in R\{y\}$ ja täten edelleen $z \in R\{x\}$ eli $(x,z) \in R$. Olemme näyttäneet, että R on transitiivinen. □

Voimme lausua edellisen tuloksen myös seuraavasti: relaatio R on transitiivinen jos ja vain jos $R \circ R \subset R$.

I 4.9 Lause *Olkoon R joukon X ekvivalenssirelaatio. Tällöin kaikilla $x, y \in X$ on voimassa*

$$\boxed{xRy \iff R\{x\} = R\{y\} \iff R\{x\} \cap R\{y\} \neq \emptyset}$$

Todistus. Jos alkioille x ja y on voimassa xRy, niin R:n symmetrisyyden nojalla on voimassa yRx; tällöin $y \in R\{x\}$ ja $x \in R\{y\}$, ja Lemman I 4.8 tuloksesta seuraa R:n transitiivisuuden nojalla, että $R\{x\} = R\{y\}$.

Koska R on refleksiivinen, on jokaisella $y \in X$ voimassa yRy eli $y \in R\{y\}$ ja näin ollen $R\{y\} \neq \emptyset$. Täten jos alkioille x ja y on voimassa $R\{x\} = R\{y\}$, niin on voimassa $R\{x\} \cap R\{y\} \neq \emptyset$.

Todistuksen loppuunsaattamiseksi osoitamme vielä, että $R\{x\} \cap R\{y\} \neq \emptyset \Rightarrow xRy$. Oletamme siis, että on voimassa $R\{x\} \cap R\{y\} \neq \emptyset$. Olkoon z joukon $R\{x\} \cap R\{y\}$ alkio. Tällöin on voimassa xRz ja yRz. Koska R on symmetrinen, on voimassa zRy. Koska R on transitiivinen ja koska on voimassa xRz ja zRy, on siis voimassa xRy. □

Kun R on joukon X ekvivalenssirelaatio ja $x \in X$, niin kutsumme joukkoa $R\{x\}$ alkion x *ekvivalenssiluokaksi* relaatiossa R.

I 4.10 Korollaari *Olkoon R joukon X ekvivalenssirelaatio. Tällöin joukkoperhe $\{R\{x\} : x \in X\}$ on X:n ositus.*

Todistus. Lauseen I 4.9 tuloksesta seuraa, että joukot $R\{x\}, x \in X$ ovat epätyhjiä ja että jokaisella $y \in X$ alkio y kuuluu täsmälleen yhteen perheen $\{R\{x\} : x \in X\}$ joukkoon, nimittäin joukkoon $R\{y\}$. □

Kutsumme ekvivalenssirelaatiota R vastaavaa joukon X ositusta $\{R\{x\} : x \in X\}$ joukon X *tekijäjoukoksi* ekvivalenssirelaation R suhteen ja merkitsemme sitä usein symbolilla X/R. Kanooninen surjektio $X \to X/R$ on kuvaus $x \mapsto R\{x\}$, $x \in X$.

Näytämme nyt, että ekvivalenssirelaation R tekijäjoukkoon Lauseen I 4.5 mielessä liittyvä ekvivalenssirelaatio on R.

I 4.11 Lause *Olkoon R joukon X ekvivalenssirelaatio. Merkitään $\mathcal{O}$:lla X:n ositusta $\{R\{x\} : x \in X\}$. Tällöin $R = E_{\mathcal{O}}$.*

Todistus. Käyttäen hyväksi perheen $\mathcal{O}$ ja relaation $E_{\mathcal{O}}$ määritelmiä, relaation R symmetrisyyttä sekä Lauseen I 4.9 tulosta, nähdään olevan voimassa

$$\begin{aligned}
(x,y) \in E_{\mathcal{O}} &\iff (\exists z \in X)(x \in R\{z\} \ \&\ y \in R\{z\}) \\
&\iff (\exists z \in X)(z \in R\{x\} \ \&\ z \in R\{y\}) \\
&\iff R\{x\} \cap R\{y\} \neq \emptyset \\
&\iff xRy \\
&\iff (x,y) \in R\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Toisaalta näemme helposti, että jos $\mathcal{O}$ on joukon X ositus, niin X:n ekvivalenssirelaation $E_{\mathcal{O}}$ tekijäjoukko $X/E_{\mathcal{O}}$ on sama kuin ositus $\mathcal{O}$. Näin ollen joukon X ositukset ja ekvivalenssirelaatiot ovat bijektiivisessä vastaavuudessa keskenään edellä tarkasteltujen operaatioiden ($\mathcal{O} \longmapsto E_{\mathcal{O}}$ ja $R \longmapsto X/R$) välityksellä.

Esitämme lopuksi lausekkeen annetun X:n relaation S "virittämälle" ekvivalenssirelaatiolle. Ekvivalenssirelaatio E on *pienin* S:n sisältävä ekvivalenssirelaatio, mikäli $S \subset E$ ja jokaiselle ekvivalenssirelaatiolle E' on voimassa: jos $S \subset E'$, niin $E \subset E'$. Vastaavasti määrittelemme pienimmän S:n sisältävän symmetrisen relaation, refleksiivisen relaation jne.

Näemme helposti, että joukon X relaatio R on refleksiivinen jos ja vain jos $\mathrm{id}_X \subset R$ ja R on symmetrinen jos ja vain jos $R^{-1} = R$; täten saamme seuraavan tuloksen.

I 4.12 Lemma *Olkoon S joukon X relaatio. Tällöin on voimassa:*

(a) $S \cup \mathrm{id}_X$ on pienin S:n sisältävä refleksiivinen relaatio.

(b) $S \cup S^{-1}$ on pienin S:n sisältävä symmetrinen relaatio.

Pienin relaation S sisältävä transitiivinen ja refleksiivinen relaatio konstruoidaan seuraavasti. Merkitään $S^0 = \mathrm{id}_X$ ja luvuille $n > 0$ määritellään S^n rekursiivisesti kaavan $S^n = S \circ S^{n-1}$ avulla. Merkitään lopuksi $S^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n$.

I 4.13 Lemma *Olkoon S joukon X relaatio. Tällöin on voimassa:*

(a) S^∞ on pienin S:n sisältävä transitiivinen ja refleksiivinen relaatio.

(b) Jos S on symmetrinen, niin S^∞ on ekvivalenssirelaatio.

Todistus. (a) Koska $\mathrm{id}_X = S^0 \subset S^\infty$, relaatio S^∞ on refleksiivinen. Osoitamme, että S^∞ on transitiivinen. Käyttämällä induktiota luvun n suhteen näytämme, että kaikilla $n, k \in \mathbb{N}$ on voimassa $S^n \circ S^k = S^{n+k}$: väite pätee n:n arvolla 0, koska $S^0 = \mathrm{id}_X$ ja jos on voimassa $S^n \circ S^k = S^{n+k}$, niin tällöin on myös voimassa

$$S^{n+1} \circ S^k = (S \circ S^n) \circ S^k = S \circ (S^n \circ S^k) = S \circ S^{n+k} = S^{n+k+1}.$$

Olkoot nyt x, y ja z sellaisia X:n alkioita, että on voimassa $(x,y) \in S^\infty$ ja $(y,z) \in S^\infty$. Tällöin on olemassa sellaiset luonnolliset luvut k ja n, että $(x,y) \in S^k$ ja $(y,z) \in S^n$. Koska nyt $(x,z) \in S^n \circ S^k$, niin edellä esitetyn nojalla on voimassa $(x,z) \in S^{n+k} \subset S^\infty$. Olemme osoittaneet, että relaatio S^∞ on transitiivinen.

Olkoon T joku toinen S:n sisältävä transitiivinen ja refleksiivinen relaatio. Koska T on transitiivinen, on voimassa $T \circ T \subset T$. Relaation T refleksiivisuudesta seuraa, että $S^0 \subset T$. Jos luvulle $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $S^n \subset T$, niin tällöin on voimassa $S^{n+1} = S \circ S^n \subset T \circ T \subset T$. Edellisestä seuraa induktioperiaatteen nojalla, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $S^n \subset T$. Täten $S^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n \subset T$. Olemme näyttäneet, että S^∞ on pienin S:n sisältävä transitiivinen ja refleksiivinen relaatio.

(b) Oletamme, että S on symmetrinen. Tällöin $S^0 = \mathrm{id}_X$ ja $S^1 = S$ ovat symmetrisiä ja induktiota käyttäen näemme helposti, että S^n on symmetrinen myös jokaisella $n > 1$: jos nimittäin S^{n-1} on symmetrinen eli $(S^{n-1})^{-1} = S^{n-1}$, niin (a)-kohdan todistuksessa esitetyn mukaan on voimassa $S^n = S^{n-1} \circ S$ ja tästä seuraa Lauseen I 1.4 avulla, että S^n on symmetrinen:

$$(S^n)^{-1} = (S^{n-1} \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ (S^{n-1})^{-1} = S \circ S^{n-1} = S^n \ .$$

Näemme helposti, että on voimassa $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n)^{-1} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S^n)^{-1}$; tästä seuraa edellä esitetyn nojalla, että S^∞ on symmetrinen:

$$(S^\infty)^{-1} = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n)^{-1} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S^n)^{-1} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n = S^\infty \ . \qquad \square$$

I 4.14 Korollaari *Olkoon S joukon X relaatio. Tällöin $(S \cup S^{-1})^\infty$ on pienin S:n sisältävä X:n ekvivalenssirelaatio.*

5. Joukkojen symmetrinen erotus.

Seuraavassa määrittelemme laskutoimituksen käsitteen ja tarkastelemme eräitä laskutoimituksella varustettuja joukkoja, nk. "ryhmiä". Lopuksi määrittelemme annetun joukon potenssijoukossa laskutoimituksen, joukkojen "symmetrisen erotuksen", jolla varustettuna potenssijoukosta tulee ryhmä.

I 5.1 Määritelmä Olkoon A joukko. *Binäärioperaatio* eli *(kaksipaikkainen) laskutoimitus* joukossa A on kuvaus $A \times A \to A$.

Seuraavassa tarkoitamme termillä "laskutoimitus" aina kaksipaikkaista laskutoimitusta. Toisinaan puhumme "joukon A laskutoimituksista" kun tarkoitamme laskutoimituksia joukossa A.

Kun $\otimes$ on laskutoimitus joukossa A, käytämme joukon $A \times A$ alkion (a, b) kuva–alkiolle $\otimes((a, b))$ yleensä lyhennettyä merkintää $a \otimes b$.

Joukon A laskutoimituksen $\otimes$ *rajoittuma* joukkoon $B \subset A$ on kuvaus $\otimes|B \times B$; tämä kuvaus on joukon B laskutoimitus jos ja vain jos $\otimes(B \times B) \subset B$, toisin sanoen, jos ja vain jos kaikilla $b, b' \in B$ on voimassa $b \otimes b' \in B$.

I 5.2 Esimerkkejä **(a)** Merkitsemme Rel_A:lla kaikkien joukon A relaatioiden muodostamaa joukkoa, ts., $\mathrm{Rel}_A = \mathcal{P}(A \times A)$. Relaatioiden yhdisteleminen $\circ : (R, Q) \mapsto R \circ Q$ on laskutoimitus joukossa Rel_A. Koska kahden kuvauksen $A \to A$ yhdistelmä on kuvaus $A \to A$, näemme, että laskutoimituksen $\circ$ rajoittuma kaikkien kuvausten $A \to A$ muodostamaan joukkoon on kyseisen joukon laskutoimitus. Lauseen I 1.12 tuloksesta seuraa, että myös laskutoimituksen $\circ$ rajoittuma kaikkien injektioiden (tai kaikkien surjektioiden tai kaikkien bijektioiden) muodostamaan joukkoon on kyseisen joukon laskutoimitus.
(b) Kuvaukset $(B, C) \mapsto B \cup C$, $(B, C) \mapsto B \cap C$ ja $(B, C) \mapsto B \setminus C$ ovat joukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimituksia jokaisella joukolla A. $\square$

Tarkastelemme nyt eräitä laskutoimitusten ominaisuuksia.

I 5.3 Määritelmä Olkoon $\otimes$ joukon A laskutoimitus.
Laskutoimitus $\otimes$ on *assosiatiivinen* eli *liitännäinen*, mikäli kaikilla $a, b, c \in A$ on voimassa $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
Laskutoimitus $\otimes$ on *kommutatiivinen* eli *vaihdannainen*, mikäli kaikilla $a, b \in A$ on voimassa $a \otimes b = b \otimes a$.

Määritelmistä seuraa suoraan, että laskutoimitus on assosiatiivinen (kommutatiivinen), mikäli se on jonkun assosiatiivisen (kommutatiivisen) laskutoimituksen rajoittuma.

I 5.4 Esimerkkejä **(a)** Relaatioiden yhdisteleminen $\circ$ on Lauseen I 1.6 nojalla assosiatiivinen laskutoimitus joukossa Rel_A. Tämä laskutoimitus ei yleensä ole kommutatiivinen: esimerkiksi kuvauksille $f, g : [3] \to [3]$, missä $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$ ja $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$, on voimassa $f \circ g \neq g \circ f$.
(b) Joukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimitukset $\cup$ ja $\cap$ ovat assosiatiivisia ja kommutatiivisia; sen sijaan laskutoimituksella $\setminus$ ei ole kumpaakaan ominaisuutta, mikäli $A \neq \emptyset$. $\square$

Laskutoimituksella varustettu joukko on pari $(A, \otimes)$, missä A on joukko ja $\otimes$ on laskutoimitus joukossa A.

I 5.5 Määritelmä (a) Olkoon $(A, \otimes)$ laskutoimituksella varustettu joukko. Joukon A alkio e on $(A, \otimes)$:n *neutraalialkio*, mikäli jokaisella $a \in A$ on voimassa $a \otimes e = e \otimes a = a$.
(b) Olkoon $(A, \otimes)$ laskutoimituksella varustettu joukko, jolla on neutraalialkio e. Joukon A alkio b on A:n alkion a *käänteisalkio*, mikäli on voimassa $a \otimes b = b \otimes a = e$.

Jos laskutoimituksella varustetulla joukolla $(A, \otimes)$ on neutraalialkio, niin se on yksikäsitteinen: jos e ja e' ovat neutraalialkioita, niin $e = e \otimes e' = e'$. Mikäli laskutoimitus $\otimes$ on assosiatiivinen, niin myös käänteisalkiot ovat yksikäsitteisiä: jos A:n alkiot b ja b' ovat alkion a käänteisalkioita, niin $b = b \otimes e = b \otimes (a \otimes b') = (b \otimes a) \otimes b' = e \otimes b' = b'$.

I 5.6 Esimerkkejä **(a)** Joukon A identtisyysrelaatio Δ_A on laskutoimituksella varustetun joukon $(\mathrm{Rel}_A, \circ)$ neutraalialkio. Jos f on bijektio $A \to A$, niin tällöin f:n käänteiskuvaus f^{-1} on f:n käänteisalkio $(\mathrm{Rel}_A, \circ)$:ssa.
(b) Tyhjä joukko on $(A, \cup)$:n neutraalialkio ja A on $(A, \cap)$:n neutraalialkio. □

Algebrassa tarkastellaan yhdellä tai useammalla laskutoimituksella varustettuja joukkoja; määrittelemme nyt tällaisista "algebrallisista struktuureista" kaikkein perustavanlaatuisimman.

I 5.7 Määritelmä *Ryhmä* on assosiatiivisella laskutoimituksella varustettu joukko, jolla on neutraalialkio ja jonka jokaisella alkiolla on käänteisalkio.
Kommutatiivinen ryhmä eli *Abelin ryhmä* on ryhmä, jonka laskutoimitus on kommutatiivinen.

Eräitä kaikkein tärkeimmistä diskreetissä matematiikassa esiintyvistä ryhmistä ovat ns. *symmetriset ryhmät*:

I 5.8 Lause *Olkoon X joukko. Merkitään S_X:llä kaikkien bijektioiden $X \to X$ muodostamaa joukkoa. Tällöin pari $(S_X, \circ)$ on ryhmä. Ryhmän neutraalialkio on X:n identtinen kuvaus ja jokaisella $\varphi \in S_X$, alkion φ käänteisalkio on φ:n käänteiskuvaus φ^{-1}.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Joukon X symmetristä ryhmää $(S_X, \circ)$ merkitään yleensä vain lyhyesti S_X:llä. Jos $X = [n]$, niin ryhmästä käytetään merkintää S_n.

Esimerkki I 5.4(a) osoittaa, että symmetriset ryhmät ovat (nimestään huolimatta) yleensä epäkommutatiivisia.

Aikaisemmissa esimerkeissä kohtasimme eräitä potenssijoukon laskutoimituksia; tarkastelemme vielä erästä tällaista laskutoimitusta.

Olkoot D ja E joukkoja. Joukkojen D ja E *symmetrinen erotus* on joukko $(D \smallsetminus E) \cup (E \smallsetminus D)$; tästä joukosta käytetään merkintää $D \Delta E$. Joukko $D \Delta E$ koostuu niistä alkioista, jotka kuuluvat joko joukkoon D tai joukkoon E, mutta eivät molempiin; täten on voimassa $D \Delta E = (D \cup E) \smallsetminus (D \cap E)$.

I 5.9 Lemma *Olkoot C, D ja E joukon A osajoukkoja. Tällöin on voimassa:*
(a). $C \Delta \emptyset = C$ ja $C \Delta C = \emptyset$
(b). $C \Delta A = A \smallsetminus C$ ja $C \Delta (A \smallsetminus C) = A$.
(c). $C \Delta D = D \Delta C$.
(d). $(C \Delta D) \cap E = (C \cap E) \Delta (D \cap E)$.

Todistus. Kohtien (a),(b) ja (c) tulokset seuraavat suoraan operaation Δ määritelmän nojalla. Todistetaan kohta (d):

$$\begin{aligned}(C \Delta D) \cap E &= [(C \smallsetminus D) \cup (D \smallsetminus C)] \cap E \\ &= [(C \smallsetminus D) \cap E] \cup [(D \smallsetminus C) \cap E] \\ &= [(C \cap E) \smallsetminus (D \cap E)] \cup [(D \cap E) \smallsetminus (C \cap E)] \\ &= (C \cap E) \Delta (D \cap E)\ . \qquad \square\end{aligned}$$

Joukko–operaatiot $\cup$ ja $\cap$ liittyvät loogisiin operaatioihin $\vee$ ("tai") ja $\wedge$ ("ja") seuraavasti: jos E ja F ovat joukkoja, niin alkiolle x pätee, että $x \in E \cup F \iff x \in E \vee x \in F$ ja $x \in E \cap F \iff x \in E \wedge x \in F$. Joukko–operaatio Δ puolestaan liittyy loogiseen operaatioon XOR ("exclusive or" eli "tai muttei ja"). Merkitään operaatiota XOR symbolilla $\sqcup$; tällöin lauseille P ja Q, lause $P \sqcup Q$ on tosi jos ja vain jos jompikumpi, mutta ei kumpikin, lauseista P ja Q on tosi. Toisin sanoen, $P \sqcup Q \iff (P \vee Q) \wedge [\neg(P \wedge Q)]$.

I 5.10 Lemma *Olkoot D ja E joukon A osajoukkoja. Tällöin jokaisella $a \in A$ on voimassa $a \in D \Delta E \iff a \in D \sqcup a \in E$.*

Todistus.

$$\begin{aligned}a \in D \Delta E &\iff a \in (D \cup E) \smallsetminus (D \cap E) \\ &\iff (a \in D \vee a \in E) \wedge [\neg(a \in D \wedge a \in E)] \qquad \square \\ &\iff a \in D \sqcup a \in E.\end{aligned}$$

Edellinen tulos tarjoaa meille mahdollisuuden käyttää hyväksi loogisen operaation $\sqcup$ ominaisuuksia tutkiessamme joukko–operaatiota Δ.

I 5.11 Lemma *Olkoot P, Q ja S lausemuuttujia. Tällöin*

$$(P \sqcup Q) \sqcup S \iff P \sqcup (Q \sqcup S).$$

Todistus. Väitetyn ekvivalenssin voimassaolo seuraa totuustaulukosta (jossa T=“tosi” ja F=“epätosi”):

P	Q	S	$P \sqcup Q$	$(P \sqcup Q) \sqcup S$	$Q \sqcup S$	$P \sqcup (Q \sqcup S)$
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

Edellisten tulosten avulla voimme nyt helposti todistaa seuraavan tuloksen, joka osoittaa, että joukko–operaatio Δ on assosiatiivinen.

I 5.12 Lause *Olkoot C, D ja E joukkoja. Tällöin on voimassa*

$$(C\Delta D)\Delta E = C\Delta(D\Delta E).$$

Todistus. Jokaiselle alkiolle x on Lemmojen I 5.10 ja I 5.11 nojalla voimassa

$$\begin{aligned} x \in (C\Delta D)\Delta E &\iff (x \in C\Delta D) \sqcup (x \in E) \\ &\iff [(x \in C) \sqcup (x \in D)] \sqcup (x \in E) \\ &\iff (x \in C) \sqcup [(x \in D) \sqcup (x \in E)] \\ &\iff x \in C\Delta(D\Delta E)\,. \qquad \square \end{aligned}$$

Lemman I 5.9 kohdan (a) nojalla saamme Lauseelle I 5.12 seuraavan korollaarin.

I 5.13 Korollaari *Olkoon A joukko. Tällöin pari $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ on ryhmä. Ryhmän neutraalialkio on $\emptyset$ ja jokaisella $C \in \mathcal{P}(A)$, alkion C käänteisalkio on C.*

Operaation Δ assosiatiivisuuden nojalla voidaan muotoa $(C\Delta D)\Delta E$ ja $C\Delta(D\Delta E)$ olevat lausekkeet kirjoittaa muotoon $C\Delta D\Delta E$. Yleisemmin, jos $B_1, ..., B_n$ ovat joukkoja ja $n \geq 2$, niin määritellään joukko $B_1\Delta\cdots\Delta B_n$ rekursiivisesti asettamalla $B_1\Delta\cdots B_2 = B_1\Delta B_2$ ja jokaisella $1 < k < n$, $B_1\Delta\cdots\Delta B_{k+1} = (B_1\Delta\cdots\Delta B_k)\Delta B_{k+1}$.

Seuraava tulos antaa yksinkertaisen luonnehdinnan edellä määritellyille joukoille.

I 5.14 Lemma *Olkoot $B_1, ..., B_n$ joukkoja ja $n > 1$. Tällöin $x \in B_1\Delta\cdots\Delta B_n$ jos ja vain jos joukossa $\{i \in [n] : x \in B_i\}$ on pariton määrä alkioita.*

Todistus. Suoritamme todistuksen induktiolla luvun n suhteen.

$$n = 2: \; x \in B_1\Delta B_2 \iff |\{i \in [2] : x \in B_i\}| = 1$$

$$\iff \text{luku } |\{i \in [2] : x \in B_i\}| \text{ on pariton}\,.$$

$n > 2$: Oletamme, että väite pätee n:ää pienemmille luvuille. Nyt on voimassa

$$x \in B_1\Delta\cdots\Delta B_n \iff x \in (B_1\Delta\cdots\Delta B_{n-1})\Delta B_n \iff$$

$$\text{joko } |\{i \in [n-1] : x \in B_i\}| \text{ pariton ja } x \notin B_n$$

$$\text{tai } |\{i \in [n-1] : x \in B_i\}| \text{ parillinen ja } x \in B_n$$

$$\iff |\{i \in [n] : x \in B_i\}| \text{ pariton}\,. \qquad \square$$

Annamme lopuksi kaavan kahden äärellisen joukon symmetrisen erotuksen alkioiden lukumäärälle.

I 5.15 Lemma *Olkoot C ja D äärellisiä joukkoja. Tällöin*

$$|C\Delta D| = |C| + |D| - 2 \cdot |C \cap D|\,.$$

Todistus. On voimassa $C\Delta D = (C \setminus D) \cup (D \setminus C)$. Joukot $C \setminus D$ ja $D \setminus C$ ovat erillisiä, joten Korollaarin I 3.14 nojalla on voimassa $|(C \setminus D) \cup (D \setminus C)| = |C \setminus D| + |D \setminus C|$. Edelleen on voimassa $C \setminus D = C \setminus (C \cap D)$ ja tästä seuraa Korollaarin I 3.15 nojalla, että $|C \setminus D| = |C| - |C \cap D|$. Vastaavasti on voimassa yhtälö $|D \setminus C| = |D| - |C \cap D|$. Edellä esitetyn nojalla pätee, että

$$\begin{aligned} |C\Delta D| &= |C \setminus D| + |D \setminus C| \\ &= |C| - |C \cap D| + |D| - |D \cap C|\,. \qquad \square \\ &= |C| + |D| - 2 \cdot |C \cap D| \end{aligned}$$

I 5.16 Korollaari *Olkoot C ja D äärellisiä joukkoja, joissa kummassakin on parillinen määrä alkioita. Tällöin joukossa $C\Delta D$ on parillinen määrä alkioita.*

6. Relaation sisältämät kuvaukset

Tarkastelemme nyt äärellisten joukkojen X ja Y välistä relaatiota $R \subset X \times Y$ ja etsimme ehtoja, joiden vallitessa R sisältää erityyppisiä kuvauksia $X \to Y$.

Jos relaatio $f \subset R$ on kuvaus $X \to Y$, niin jokaisella $x \in X$ on voimassa $f(x) \in R\{x\}$ ja täten $R\{x\} \neq \emptyset$. Jos kääntäen tiedämme, että $R\{x\} \neq \emptyset$ jokaisella $x \in X$, niin on intuitiivisesti selvää, että voimme määritellä kuvauksen $f : X \to Y$ "valitsemalla" jokaisella $x \in X$ kuva-alkioksi $f(x)$ jonkun alkion joukon Y epätyhjästä osajoukosta $R\{x\}$. Tämä intuitiivisesti itsestäänselvä tulos, kyseisenlaisen yht'aikaisen "valinnan" mahdollisuus, vaatii kuitenkin täsmällisen todistuksen, jonka voimme suorittaa luonnollisten lukujen ominaisuuksien avulla.

I 6.1 Lause *(Äärellinen valinta–aksiooma) Olkoon Y äärellinen joukko ja $R \subset X \times Y$ sellainen relaatio, että $R\{x\} \neq \emptyset$ jokaisella $x \in X$. Tällöin R sisältää kuvauksen $X \to Y$.*

Todistus. Koska Y on äärellinen, niin on olemassa luku $n \in \mathbb{N}$ ja bijektio $\phi : [n] \to Y$. Määritellään $f : X \to Y$ seuraavasti: jokaisella $x \in X$ merkitään $E_x = \phi^{-1}(R\{x\})$, merkitään k_x:llä epätyhjän joukon E_x pienintä lukua ja merkitään $f(x)$:llä joukon $R\{x\}$ alkiota $\phi(k_x)$. Tällöin f on kuvaus $X \to Y$ ja $f \subset R$. □

Jos R sisältää injektion $f : X \to Y$, niin f on bijektio $X \to f(X)$ ja Lauseen I 3.4 nojalla on jokaisella $A \subset X$ voimassa $|f(A)| = |A|$ ja, koska $f(A) \subset R(A)$, niin on edelleen voimassa $|R(A)| \geq |A|$. Osoitamme, että näin saatu välttämätön ehto injektion olemassaololle on myös riittävä.

I 6.2 Lause *(Hallin Lause) Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja ja olkoon $R \subset X \times Y$ sellainen relaatio, että jokaisella $A \subset X$ on voimassa $|R(A)| \geq |A|$. Tällöin R sisältää injektion $X \to Y$.*

Todistus. Todistetaan lauseen väite induktiolla luvun $|X|$ suhteen. Jos $|X| = 0$, niin tyhjä joukko on injektio $X \to Y$ ja väite on triviaalisti voimassa. Oletetaan, että $|X| > 0$ ja väite on todistettu relaatioille $R' \subset X' \times Y'$, missä $|X'| < |X|$.

Tarkastelemme kahta eri tapausta.

Oletamme aluksi, että jokaisella $\emptyset \neq A \subsetneq X$ on voimassa $|R(A)| > |A|$. Olkoon x_0 joku X:n alkio. Koska on voimassa $|R\{x_0\}| \geq |\{x_0\}|$, niin $R\{x_0\} \neq \emptyset$. Olkoon y_0 joku joukon $R\{x_0\}$ alkio eli olkoon voimassa $(x_0, y_0) \in R$. Merkitään $X' = X \setminus \{x_0\}$, $Y' = Y \setminus \{y_0\}$ ja $R' = R \cap (X' \times Y')$. Osoitetaan, että R' toteuttaa lauseen ehdon. On voimassa $R'(\emptyset) = \emptyset$ ja täten $|R'(\emptyset)| = |\emptyset|$. Jokaisella $\emptyset \neq A \subset X'$ on voimassa $A \neq X$ ja täten $|R(A)| > |A|$; tästä seuraa, koska $R(A) \subset R'(A) \cup \{y_0\}$, että $|R'(A)| \geq |R(A)| - 1 \geq |A|$. On osoitettu, että R' toteuttaa lauseen ehdon. Koska on voimassa $|X'| < |X|$, niin induktio–oletuksesta seuraa, että on olemassa sellainen injektio $g : X' \to Y'$, että $g \subset R'$. Merkitään $f = g \cup \{(x_0, y_0)\}$ ja pannaan merkille, että koska g on injektio ja koska pätee, että $x_0 \notin X'$ ja $y_0 \notin Y'$, niin f on injektio $X' \cup \{x_0\} \to Y' \cup \{y_0\}$ eli $X \to Y$. Lisäksi on voimassa $f \subset R$, koska $g \subset R' \subset R$ ja $(x_0, y_0) \in R$.

Oletamme seuraavaksi, että on olemassa sellainen joukko $A \subset X$, että $\emptyset \neq A \neq X$ ja $|R(A)| = |A|$. Merkitään

$$S = R \cap (A \times R(A)) \quad \text{ja} \quad T = R \cap ((X \setminus A) \times (Y \setminus R(A))).$$

Jokaisella $E \subset A$ on voimassa $S(E) = R(E)$ ja täten edelleen $|S(E)| \geq |E|$. Koska $|A| < |X|$, niin relaatio S sisältää induktio–oletuksen nojalla injektion $f : A \to R(A)$. Osoitetaan, että relaatio T sisältää injektion $X \setminus A \to Y \setminus R(A)$; koska $A \neq \emptyset$, niin $|X \setminus A| < |X|$ ja induktio–oletuksesta seuraa, että väitteen todistamiseksi riittää näyttää, että jokaisella $E \subset X \setminus A$ on voimassa $|T(E)| \geq |E|$. Olkoon siis E joukon $X \setminus A$ osajoukko. Lauseen oletuksen nojalla pätee, että $|R(E \cup A)| \geq |E \cup A|$. Lisäksi on voimassa $R(E \cup A) = R(E) \cup R(A)$ ja täten edelleen $|R(E \cup A)| = |R(E) \cup R(A)| = |R(E) \setminus R(A)| + |R(A)|$. Koska $E \subset X \setminus A$, on voimassa $|E \cup A| = |E| + |A|$. Edellä esitetystä seuraa, että on voimassa $|R(E) \setminus R(A)| + |R(A)| \geq |E| + |A|$ ja tästä seuraa yhtälön $|R(A)| = |A|$ nojalla, että $|R(E) \setminus R(A)| \geq |E|$. Koska $E \subset X \setminus A$ ja $T = R \cap ((X \setminus A) \times (Y \setminus R(A)))$, on voimassa yhtälö $T(E) = R(E) \setminus R(A)$ ja täten edelleen epäyhtälö $|T(E)| \geq |E|$. Edelläesitetyn nojalla on olemassa injektio $g : X \setminus A \to Y \setminus R(A)$. Nyt nähdään helposti, että $f \cup g$ on injektio $X \to Y$ ja $f \cup g \subset S \cup T \subset R$. □

Tietyissä tilanteissa saamme hyvin havainnollisen tulkinnan sille ehdolle, että relaatio $R \subset X \times Y$ sisältää injektion $X \to Y$. Jos esimerkiksi X on jokin ihmisjoukko ja Y on joukko työtehtäviä ja jos määrittelemme relaation $R \subset X \times Y$ asettamalla $(x, y) \in R$, mikäli henkilö x voi suorittaa työn y, niin tähän tilanteeseen liittyvällä *työllistämisongelmalla* on ratkaisu jos ja vain jos on olemassa sellainen injektio $f : X \to Y$, että $f \subset R$; kutsumme tällaista injektiota ihmisten X *sovittamiseksi* työpaikkoihin Y. Joissakin muissa tilanteissa annetun relaation sisältämän injektion olemassaolo saa erilaisia tulkintoja; niinpä Hallin lause tunnetaan englanninkielisessä kirjallisuudessa usein nimellä “Hall’s marriage theorem”.

Hallin lause antaa siis teoreettisen luonnehdinnan sille, että annetulle sovittamisongelmalle löytyy ratkaisu. Lauseen ehdon voimassaolon tarkistaminen ei kuitenkaan usein ole käytännössä mahdollista; lauseessa on myös se käytännön puute, että se takaa vain “sovituksen” olemassaolon, mutta ei anna mitään menetelmää eli algoritmia sovituksen konstruoimiseksi.

Esitämme nyt eräitä seurauslauseita Hallin lauseelle. Ensimmäinen tulos liittyy nk. *erillisten edustajien ongelmaan*. Annetussa ihmisjoukossa A on erilaisia ryhmiä, jotka yhdessä muodostavat joukon A osajoukkoperheen $\mathcal{A}$. Tutkimme, millä ehdoilla on mahdollista löytää ryhmille $\mathcal{A}$ *erilliset edustajat* eli valita kustakin ryhmästä $B \in \mathcal{A}$ edustaja a_B siten, että $a_B \neq a_C$ aina kun $B \neq C$. Toisin sanoen tutkimme, millä ehdoilla on mahdollista muodostaa sellainen edustajisto $T \subset A$, että kaikki ryhmät $B \in \mathcal{A}$ ovat edustettuina T:ssä ja kukin T:n jäsen edustaa vain yhtä ryhmää $B \in \mathcal{A}$. Mikäli tässä tilanteessa määritellään relaatio $R \subset \mathcal{A} \times A$ asettamalla $(B, a) \in R \iff a \in B$, niin erillisten edustajien olemassaolo on yhtäpitävää sen kanssa, että relaatio R sisältää injektion $\mathcal{A} \to A$; koska lisäksi jokaiselle $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ pätee, että $R(\mathcal{A}') = \bigcup \mathcal{A}'$, niin Hallin lause antaa seuraavan tuloksen.

I 6.3 Korollaari *Olkoon $\mathcal{A}$ perhe äärellisen joukon A osajoukkoja. Perheen $\mathcal{A}$ joukoilla on erilliset edustajat jos ja vain jos jokaisella $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ on voimassa $|\bigcup \mathcal{A}'| \geq |\mathcal{A}'|$.*

Mainitsimme edellä, että Hallin lauseen ehdon voimassaoloa voi olla käytännössä hankala tarkistaa. Seuraavassa korollaarissa esiintyvä (riittävä, muttei välttämätön) ehto on paljon yksinkertaisempi ja helpommin tarkistettavissa:

I 6.4 Korollaari *Olkoon $R \subset X \times Y$ äärellisten joukkojen X ja Y välinen epätyhjä relaatio. Oletamme, että on olemassa sellainen luonnollinen luku k, että jokaisella $x \in X$ on voimassa $|R\{x\}| \geq k$ ja jokaisella $y \in Y$ on voimassa $|R^{-1}\{y\}| \leq k$. Tällöin R sisältää injektion $X \to Y$.*

Todistus. Riittää näyttää, että Hallin lauseen ehto on voimassa. Olkoon A joukon X osajoukko. Merkitsemme $S = R \cap (A \times R(A))$. Tällöin on voimassa $S = \{(x, y) \in R : x \in A\} = \bigcup_{x \in A} \{x\} \times R\{x\}$, joten

$$|S| = \Sigma_{x \in A} |\{x\} \times R\{x\}| = \Sigma_{x \in A} |R\{x\}| \geq \Sigma_{x \in A} k = k|A|.$$

Toisaalta voimme kirjoittaa $S = \bigcup_{y \in R(A)} (R^{-1}\{y\} \cap A) \times \{y\}$ ja täten on voimassa

$$|S| = \Sigma_{y \in R(A)} |(R^{-1}\{y\} \cap A) \times \{y\}| = \Sigma_{y \in R(A)} |R^{-1}\{y\} \cap A| \leq \Sigma_{y \in R(A)} k = k|R(A)|.$$

Yhdistämällä edelliset lukua $|S|$ koskevat epäyhtälöt (ja ottamalla huomioon, että $k > 0$ koska $R \neq \emptyset$), saamme epäyhtälön $|R(A)| \geq |A|$. □

Harjoitustehtävä: Osoita, että jos yllä $|X| = |Y|$, niin R sisältää k erillistä injektiota $X \to Y$.

Esimerkki Olkoon X n–joukko. Merkitsemme jokaisella $k \leq n$ $\mathcal{P}_k(X) = \{A \subset X : |A| = k\}$. Olkoon luonnolliselle luvulle l voimassa epäyhtälö $l < \frac{n}{2}$. Tällöin on olemassa sellainen injektio $f : \mathcal{P}_l(X) \to \mathcal{P}_{l+1}(X)$, että $A \subset f(A)$ jokaisella $A \in \mathcal{P}_l(X)$. Tämä seuraa Korollaarin I 6.4 tuloksesta, sillä jokainen perheen $\mathcal{P}_l(X)$ joukko A sisältyy täsmälleen $n-l$:ään perheen $\mathcal{P}_{l+1}$ joukkoon (joukkoihin $A \cup \{x\}$, $x \in X \setminus A$) ja jokainen perheen $\mathcal{P}_{l+1}(X)$ joukko B sisältää täsmälleen $l + 1$ perheen $\mathcal{P}_l$ joukkoa (joukot $B \setminus \{x\}$, $x \in B$). Koska $l < \frac{n}{2}$, niin $n - l > l$ ja täten $n - l \geq l + 1$; edellisen korollaarin tulosta voidaan siis soveltaa valitsemalla $k = l + 1$ ja $R = \{(A; B) \in \mathcal{P}_l(X) \times \mathcal{P}_{l+1}(X) : A \subset B\}$. □

Harjoitustehtävä: Osoita, että jos edellä $l > \frac{n}{2}$, niin on olemassa sellainen injektio $f : \mathcal{P}_l(X) \to \mathcal{P}_{l-1}(X)$, että jokaisella $A \in \mathcal{P}_l(X)$ on voimassa $f(A) \subset A$.

Mikäli emme löytäisikään annetulle sovittamisongelmalle (esim. annetulle työllistämisongelmalle) täydellistä ratkaisua, niin haluaisimme kuitenkin usein löytää “mahdollisimman hyvän” osittaisen ratkaisun (haluamme esimerkiksi löytää työtä mahdollisimman monelle työnhakijalle). Seuraava tulos antaa lausekkeen mahdollisimman suuren “osittaisen sovituksen” olemassaololle.

I 6.5 Lause *Olkoon $R \subset X \times Y$ äärellisten joukkojen X ja Y välinen relaatio. Merkitsemme δ:lla suurinta luvuista $|A| - |R(A)|$, missä $A \subset X$. Tällöin R sisältää sellaisen injektion f, että $|f| = |X| - \delta$.*

Todistus. Valitsemalla $A = \emptyset$ näemme, että $\delta \geq 0$. Olkoon Z sellainen joukko, että $|Z| = \delta$ ja $Z \cap Y = \emptyset$. Määrittelemme relaation $Q \subset X \times (Y \cup Z)$ asettamalla $Q = R \cup (X \times Z)$ ja osoitamme, että Q toteuttaa Hallin lauseen ehdon. Panemme aluksi merkille, että jokaisella $A \subset X$ on voimassa $Q(A) = R(A) \cup Z$. Koska $R(A) \subset Y$, on voimassa $R(A) \cap Z = \emptyset$ ja täten edelleen $|Q(A)| = |R(A)| + |Z| = |R(A)| + \delta$. Koska luvun δ määrittelyn nojalla pätee, että $|R(A)| + \delta \geq |A|$, niin edellisen nojalla on voimassa $|Q(A)| \geq |A|$. Olemme osoittaneet, että Q toteuttaa Hallin lauseen ehdon. Kyseisen lauseen nojalla on olemassa sellainen injektio $g : X \to Y \cup Z$, että $g \subset Q$. Merkitsemme $f = g \cap R$. Tällöin f on relaation R sisältämä injektio.

Osoitamme, että f toteuttaa epäyhtälön $|f| \geq |X| - \delta$. Koska $g \subset Q = R \cup (X \times Z)$, on voimassa $f = g \setminus \{(x, u) \in g : u \in Z\}$. Koska g on injektio, on lisäksi $|\{(x, u) \in g : u \in Z\}| \leq |Z| = \delta$. Edellisen nojalla $|f| = |g| - |\{(x, u) \in g : u \in Z\}| \geq |g| - \delta$. Koska g on kuvaus $X \to Y$, on voimassa $|g| = |X|$. Tästä seuraa yhdessä aikaisemman kanssa, että $|f| \geq |X| - \delta$.

Osoitamme lopuksi, että $|f| \leq |X| - \delta$. Kun merkitsemme $A = f^{-1}(Y)$, niin f on kuvaus $A \to Y$, joten $|f| = |A|$. Riittää siis näyttää, että on voimassa $|A| \leq |X| - \delta$ eli $\delta \leq |X \setminus A|$. Olkoon B sellainen X:n osajoukko, että $|B| - |R(B)| = \delta$. Koska f on injektio, on voimassa $|f(B \cap A)| = |B \cap A|$ ja tästä seuraa, koska $f(B \cap A) \subset R(B \cap A)$, että on voimassa $|R(B \cap A)| \geq |B \cap A|$ ja täten edelleen $|R(B)| \geq |B \cap A|$. Edellisen nojalla pätee, että $\delta = |B| - |R(B)| \leq |B| - |B \cap A| = |B \setminus A|$; tästä seuraa, että on voimassa $\delta \leq |X \setminus A|$. □

Harjoitustehtäviä Lukuun I

1. Olkoot $R, S \subseteq Y \times Z$ ja $T \subseteq X \times Y$ relaatioita. Osoita, että

$$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$$
$$(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$$

2. Merkitään X:llä joukon A kaikkien epätyhjien osajoukkojen muodostamaa perhettä (ts. $X = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$). Määritellään relaatiot $S \subset X \times X$ ja $R \subset X \times X$ asettamalla kaikilla $B, C \in X$:

$$(B, C) \in S \iff B \subset C \quad \text{ja} \quad (B, C) \in R \iff B \cap C \neq \emptyset\ .$$

Osoita, että $E = S \circ S^{-1}$

Olkoon $X = \{x_i : i \in I\}$ ja $Y = \{y_j : j \in J\}$. *Relaation* $R \subset X \times Y$ *matriisi* on $M(R) = (a_{ji})$, missä $a_{ji} = 1$ kun $(x_i, y_j) \in R$ ja $a_{ji} = 0$ kun $(x_i, y_j) \notin R$.

3. Olkoot $R, S \subset X \times Y$ relaatioita, $M(R) = (a_{ji})$ ja $M(S) = (b_{ji})$. Osoita, että $M(R \cup S) = M(R) \vee M(S) = (\sup\ (a_{ji}, b_{ji}))$, $M(R \cap S) = M(R) \wedge M(S) = (\inf\ (a_{ji}, b_{ji}))$ ja että lisäksi $R \subset S \Leftrightarrow M(R) \leq M(S)$ eli $a_{ji} \leq b_{ji}$ kaikilla i, j.

4. Olkoot $R \subset X \times Y$ ja $S \subset Y \times Z$ relaatioita, $M(R) = (a_{ji})$ ja $M(S) = (b_{kj})$. Osoitettava, että $M(S \circ R)$ on ns. *Boolen matriisitulo* $M(S)M(R) = (c_{ki})$, missä $c_{ki} = \sup_j b_{kj} a_{ji}$.

5. Todista induktiolla luvun n suhteen: jos $k_1, ..., k_n$ ovat luonnollisia lukuja, niin $\sum_{i=1}^{n} k_i \leq n \cdot \max(k_1, ..., k_n)$.

6. Esitä rekursiivinen määritelmä eksponenttifunktiolle $n \mapsto m^n$.

7. Mitkä seuraavista joukon $\mathbb{N}^*$ alkioiden x ja y välisistä relaatioista ovat refleksiivisiä, symmetrisiä tai transitiivisia:
(a) “$x + y$ on parillinen”,
(b) “$x - y < 10$”,
(c) “x—y”,
(d) “xy on pariton”.

8. Olkoon S joukon X relaatio. Asetamme $S^0 = \mathrm{id}_X$ ja määrittelemme relaatiot $S^{\pm n}$ rekursiivisesti kaavoilla $S^{n+1} = S \circ S^n$ ja $S^{-n-1} = S^{-n} \circ S^{-1}$. Näytä, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $(S^n)^{-1} = S^{-n}$.

9. Osoita, että kun R on X:n transitiivinen relaatio, niin myös refleksiivinen relaatio $R \cup \Delta_X$ on transitiivinen.

10. Lemmassa 4.13 osoitettiin, että kun S on joukon X relaatio, niin relaatio $S^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$ on pienin X:n transitiivinen ja refleksiivinen relaatio, joka sisältää S:n. Osoita, että $S^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$ on pienin S:n sisältävä transitiivinen relaatio; relaatiota S^+ kutsutaan relaation S *transitiiviseksi sulkeumaksi*.

11. Olkoon $n > 1$. Määritellään kuvaus $f : [n] \to [n]$ asettamalla $f(i) = i + 1$ kaikille $i \in [n-1]$ ja $f(n) = 1$. Laske relaation f transitiivinen sulkeuma.

12. Osoita, että n-joukon X relaatiolle R pätee yhtälö $R^+ = R \cup \ldots \cup R^n$.

13. Olkoon R n-joukon X relaatio. Osoita, että jos R on refleksiivinen, niin $R^+ = R \cup \ldots \cup R^{n-1}$. Näytä esimerkillä, että yleisessä tapauksessa kaavasta $R^+ = R \cup \ldots \cup R^n$ ei voi jättää pois termiä R^n.

14. Olkoon R refleksiivinen relaatio joukossa X. Osoita, että $R \subset R \circ R$.

15. Olkoon $R \subset X \times Y$ relaatio. Osoita, että $R^{-1} \circ R$ on symmetrinen. Milloin se on refleksiivinen?

16. Osoita, että $R \subset X \times X$ on ekvivalenssirelaatio, jos ja vain jos
i) $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset R$,
ii) $R^{-1} = R$,
iii) $R \circ R \subset R$.

17. Olkoon $\mathcal{A}$ joukon X osajoukkoperhe. Merkitsemme $(\mathcal{A})_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ jokaisella $x \in X$ ja määrittelemme joukon X relaation $\sim$ asettamalla $x \sim y$ jos ja vain jos $(\mathcal{A})_x = (\mathcal{A})_y$.
i) Näytä, että $\sim$ on ekvivalenssi.
ii) Näytä, että alkion $x \in X$ ekvivalenssiluokka on $\bigcap(\mathcal{A})_x \setminus \bigcup(\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A})_x)$.
iii) Näytä, että jos $\mathcal{A}$ on X:n ositus, niin $X/\!\sim\, = \mathcal{A}$.

18. Olkoon relaatiolla R matriisi (katso tehtävä 3)

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Etsi R:n transitiivisen sulkeuman $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ matriisi.

19. Olkoon $R \subset X \times X$ relaatio ja $M(R) = (a_{ji})$. Osoita, että R on
i) refleksiivinen $\Leftrightarrow a_{ii} = 1 \ \forall i \in I$,
ii) symmetrinen $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j \in I$,
iii) antisymmetrinen $\Leftrightarrow a_{ij}a_{ji} = 0$ kun $i \neq j$,
iv) transitiivinen $\Leftrightarrow M(R)^2 = M(R)M(R) \leq M(R)$.

20. Olkoon S äärellisen joukon X symmetrinen ja refleksiivinen relaatio. Osoita, että joukossa X on parillinen määrä alkioita jos ja vain jos joukossa S on parillinen määrä alkioita.

21. Luettele joukon $\{a,b,c,d\}$ kaikki ositukset.

22. Todista Lause 1.5.8.

23. Osoita, että symmetrinen ryhmä $(S_X, \circ)$ on kommutatiivinen silloin ja vain silloin kun joukossa X on korkeintaan kaksi alkiota.

24. Joukon X *metriikka* on sellainen kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{N}$, että seuraavat ehdot toteutuvat kaikilla $x,y,z \in X$:
1^o $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2^o $d(x,y) = d(y,x)$ *Symmetrisyysehto*
3^o $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *Kolmioepäyhtälö*

Osoita, että jos A on äärellinen joukko, niin kaava $d_\Delta(B,C) = |B \Delta C|$ määrittelee metriikan d_Δ joukossa $X = \{B : B \subset A\}$.

25. Näytä, että kaikille joukoille A,B ja C pätee yhtälö

$$(A \cap B)\Delta(B \cap C)\Delta(C \cap A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)\ .$$

26. Erään matematiikan laitoksen assistenteista A tutkii algebraa ja joukko–oppia, B analyysiä ja geometriaa, C analyysiä ja topologiaa, D analyysiä ja topologiaa, E algebraa ja geometriaa, F geometriaa ja topologiaa, H analyysiä ja joukko–oppia ja I geometriaa ja joukko–oppia. Valitse assistenttien A,B,..., I keskuudesta viiden henkilön toimikunta edustamaan algebran, analyysin, geometrian, joukko–opin ja topologian tutkijoita siten, että kukin toimikunnan jäsen edustaa vain yhtä tutkimusaloistansa.

Joukon X osajoukkoperheille $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ löytyy *yhteiset edustajat*, jos voidaan valita $x_A \in A$ ja $y_B \in B$ kaikilla $a \in \mathcal{A}$ ja $B \in \mathcal{B}$ siten, että $\{x_A : A \in \mathcal{A}\} = \{y_B : B \in \mathcal{B}\}$.

27. Osoita, että äärellisen joukon X osituksilla $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on yhteiset edustajat jos ja vain jos on voimassa $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ ja perheellä $\mathcal{A}$ on sellainen esitys $\mathcal{A} = \{A_B : B \in \mathcal{B}\}$, että $B \cap A_B \neq \emptyset$ jokaisella $B \in \mathcal{B}$.

28. Osoita, että jos $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat äärellisen joukon X osituksia ja $|A| = |B|$ kaikilla $A \in \mathcal{A}$ ja $B \in \mathcal{B}$, niin $\mathcal{A}$:lla ja $\mathcal{B}$:llä on yhteiset edustajat. [Ohje: Hallin lause]

29. Etsi yhteiset edustajat perheille $\mathcal{A} = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{10,11,12\},\{13,14,15\}\}$ ja $\mathcal{B} = \{\{2,4,8\},\ \{3,6,9\},\{5,10,15\},\{7,13,14\},\{1,11,12\}\}$.

30. Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ sellaisia äärellisen joukon X n-osituksia, että jokaisella $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ on voimassa

$$|\{B \in \mathcal{B} : B \subset \bigcup \mathcal{E}\}| \leq |\mathcal{E}|\,.$$

Osoita, että $\mathcal{A}$:lla ja $\mathcal{B}$:llä on yhteiset edustajat.

31. Pystytkö viittaamaan 14 sanaan MAANANTAI, TIISTAI, KESKIVIIKKO, TORSTAI, LAUANTAI, SUNNUNTAI, TAMMIKUU, MAALISKUU, HUHTIKUU, TOUKOKUU, ELOKUU, SYYSKUU, LOKAKUU, MARRASKUU 14 eri kirjaimella siten, että kussakin sanassa esiintyy siihen viittaava kirjain? Esitä viittausjärjestelmä, jos sellainen on olemassa tai perustele, miksi sellaista ei voi olla olemassa.

32. Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja. Osoita, että relaatio $R \subset X \times Y$ sisältää surjektion $X \to Y$ jos ja vain jos R sisältää kuvauksen $X \to Y$ ja relaatio R^{-1} sisältää injektion $Y \to X$.

33. Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja. Osoita, että seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä:
A. Relaatio $R \subset X \times Y$ sisältää surjektion joltakin X:n osajoukolta joukolle Y.
B. Jokaisella $B \subset Y$ on voimassa $|R^{-1}(B)| \geq |B|$.
C. Jokaisella $A \subset X$ on voimassa $|R(A)| \geq |A| + |Y| - |X|$.

[Ohje: Hallin Lause ja Lause I 6.5]

LUKU II

Joukkojen koko

1. Koon vertailu. Laatikkoperiaate.

Ryhdymme nyt tarkastelemaan kahden joukon välisten kuvausten olemassaolon vaikutusta joukkojen äärellisyyteen ja niiden kokoihin. Lähtökohtana on Lauseen I 3.4 tulos: jos joukkojen A ja B välillä on bijektio ja jos toinen joukoista on äärellinen, niin tällöin molemmat ovat äärellisiä ja niille pätee yhtälö $|A| = |B|$.

Jos f on injektio joukolta A joukolle B, niin tällöin f on bijektio joukolta A joukon B osajoukolle $f(B)$. Osoitamme nyt, että joukkojen A ja B ollessa äärellisiä, jokaisella surjektiolla $f : A \to B$ on rajoittuma, joka on bijektio joukolle B.

II 1.1 Lemma *Olkoon A äärellinen joukko ja olkoon f surjektio joukolta A joukolle B. Tällöin on olemassa sellainen A:n osajoukko C, että kuvaus $f|C$ on bijektio $C \to B$.*

Todistus. Relaatiolle $f^{-1} \subset B \times A$ pätee kuvauksen f surjektiivisyyden nojalla, että $f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$ jokaisella $y \in B$. Lauseen I 6.1 nojalla relaatio f^{-1} sisältää kuvauksen $g : B \to A$. Koska $g^{-1} \subset (f^{-1})^{-1} = f$, niin g^{-1} on kuvaus ja täten g on Lauseen I 1.9 nojalla injektio. Kuvaus g on siis bijektio $B \to g(B)$ ja f sisältää bijektion $g^{-1} : g(B) \to B$; toisin sanoen, kuvaus $f|g(B)$ on bijektio $g(B) \to B$. □

II 1.2 Lause *Olkoot A ja B joukkoja ja olkoon f kuvaus $A \to B$.*

(a) *Jos A on äärellinen ja f on surjektio, niin tällöin B on äärellinen ja $|A| \geq |B|$.*

(b) *Jos B on äärellinen ja f on injektio, niin tällöin A on äärellinen ja $|A| \leq |B|$.*

Todistus. (a) Oletetaan, että A on äärellinen ja f on surjektio. Lemman II 1.1 nojalla on olemassa sellainen joukko $C \subset A$, että kuvaus $f|C$ on bijektio $C \to B$. Lauseen I 3.6 nojalla joukko C on äärellinen ja on voimassa $|C| \leq |A|$. Lauseesta I 3.4 seuraa nyt, että joukko B on äärellinen ja $|B| = |C| \leq |A|$.

(b) Oletetaan, että B on äärellinen ja f on injektio. Lauseen I 3.6 nojalla joukon B osajoukko $f(A)$ on äärellinen ja $|f(A)| \leq |B|$. Injektio f on bijektio $A \to f(A)$ ja Lauseesta I 3.4 seuraa, että joukko A on äärellinen ja $|A| = |f(A)| \leq |B|$. □

Osoitamme seuraavaksi, että edellisen lauseen epäyhtälöissä pätee yhtäsuuruus ainoastaan siinä tapauksessa, että kuvaus f on bijektio.

II 1.3 Lause *Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja ja f kuvaus $A \to B$. Oletetaan, että on voimassa $|A| = |B|$. Tällöin seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät:*

(a). *f on surjektio.*

(b). *f on injektio.*

(c). *f on bijektio.*

Todistus. Koska f on bijektio jos ja vain jos f on sekä surjektio että injektio, niin riittää näyttää, että (a)⇒(c) ja (b)⇒(c).

(a)⇒(c): Oletetaan, että f on surjektio. Osoitetaan, että tällöin f on injektio. Lemman II 1.1 nojalla on olemassa sellainen joukko $C \subset A$, että kuvaus $f|C$ on bijektio $C \to B$. Lauseen I 3.4 nojalla joukko C on äärellinen ja $|C| = |B|$. Koska $C \subset A$ ja $|C| = |B| = |A|$, Lauseen I 3.6 tuloksesta seuraa, että $C = A$. Edellä esitetyn nojalla kuvaus $f|A$, eli kuvaus f, on bijektio.

(b)⇒(c): Oletetaan, että f on injektio. Tällöin f on bijektio $A \to f(A)$ ja Lauseiden I 3.4 ja I 3.6 tuloksista seuraa, kuten todistuksen edellisessä osassa, että tässä tapauksessa on voimassa $f(A) = B$; jälleen f on bijektio. □

Seuraava tulos osoittaa, että kahden äärellisen joukon kokoja voidaan vertailla kuvausten avulla.

II 1.4 Lause *Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja. Tällöin on voimassa:*

(a) *$|X| \leq |Y|$ jos ja vain jos on olemassa injektio $X \to Y$.*

(b) *$|X| \geq |Y|$ jos ja vain jos on olemassa surjektio $X \to Y$.*

(c) *$|X| = |Y|$ jos ja vain jos on olemassa bijektio $X \to Y$.*

Todistus. Merkitään $n = |X|$ ja $m = |Y|$. Olkoot kuvaukset $f : X \to [n]$ ja $g : Y \to [m]$ bijektioita.

(a) Jos $n \leq m$, niin $g^{-1} \circ f$ on injektio $X \to Y$.

Jos on olemassa injektio $X \to Y$, niin tällöin $n \leq m$ Lauseen II 1.2 nojalla.

(b) Jos $n \geq m$, niin kuvaus $h : X \to Y$, missä $h(x) = g^{-1}(f(x))$ jos $f(x) \in [m]$ ja $h(x) = g^{-1}(m)$ jos $f(x) \notin [m]$, on surjektio.

Jos on olemassa surjektio $X \to Y$, niin tällöin $n \geq m$ Lauseen II 1.2 nojalla.

(c) Jos $n = m$, niin kuvaus $g^{-1} \circ f$ on bijektio $X \to Y$.

Jos on olemassa bijektio $X \to Y$, niin $n = m$ Lauseen I 3.4 nojalla. □

Edellisen lauseen (a)-kohdan tulokselle saadaan seuraus, jonka matemaattinen sisältö on hyvin vaatimaton, mutta joka sisältää niin käyttökelpoisen "kombinatorisen periaatteen", että sille on jopa annettu oma nimi.

II 1.5 Korollaari (Laatikkoperiaate) *Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja, $|X| > |Y|$ ja f kuvaus $X \to Y$. Tällöin on olemassa sellaiset $x, z \in X$, että $x \neq z$ ja $f(x) = f(z)$.*

Todistus. Muussa tapauksessa f olisi injektio ja olisi voimassa $|X| \leq |Y|$. □

Tulkinta: X:n alkiot ovat "palloja", Y:n alkiot "laatikoita" ja f on "pallojen pano laatikoihin".

II 1.6 Esimerkkejä (a) Väite. Jokaisessa kahden tai useamman ihmisen muodostamassa joukossa X on kaksi henkilöä, joilla on sama määrä tuttavia joukossa X (oletamme "tuttavuuden" olevan aina molemminpuolista).

Todistus. Merkitään $|X| = n$. Määritellään kuvaus $f : X \to \{0, 1, ..., n-1\}$ asettamalla $f(x) = |\{y \in X : y \; x\text{:n tuttava}\}|$ jokaisella $x \in X$. Nyt on voimassa joko $0 \notin f(X)$ tai $n - 1 \notin f(X)$ ("jos joku on kaikkien tuttava, niin jokaisella on joku tuttava"). Täten $|f(X)| \leq n - 1 < |X|$. Laatikkoperiaatteen nojalla on joillakin $x \neq y$ voimassa $f(x) = f(y)$.

(b) Olkoon $A \subset \mathbb{N}$ äärellinen joukko ja olkoon luvulle $n \in \mathbb{N}^*$ voimassa $n < |A|$. Tällöin on olemassa $a, b \in A$ siten, että $a \neq b$ ja $a - b$ on jaollinen n:llä.

Todistus. Kokonaislukujen jakoyhtälön nojalla jokaisella $a \in A$ on olemassa sellainen $q_a, r_a \in \mathbb{N}$, että $a = q_a \cdot n + r_a$ ja $0 \leq r_a < n$. Koska $|\{0, 1, ..., n-1\}| = n < |A|$,

niin laatikkoperiaatteen nojalla on olemassa sellaiset $a, b \in A$, että $a \neq b$ ja $r_a = r_b$. Nyt

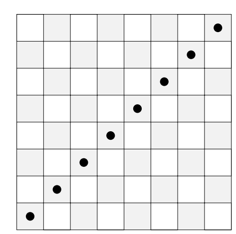
$$a - b = q_a \cdot n + r_a - q_b \cdot n - r_b = (q_a - q_b) \cdot n,$$

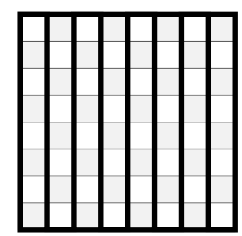
joten $a - b$ on jaollinen n:llä. □

(c) Ongelma. Mikä on suurin määrä torneja, jotka voidaan sijoittaa yht'aikaa shakkilaudan eri ruuduille ilman, että mitkään kaksi niistä uhkaavat toisiaan?

Ratkaisu. Jos kaksi laudalle asetettua tornia uhkaa toisiaan, niin ne ovat joko samalla ruutujen muodostamalla "vaakarivillä" tai samalla "pystyrivillä". Sijoittamalla tornin jommankumman "lävistäjän" jokaiseen ruutuun, kuten alla vasemmanpuoleisessa kuvassa, saamme sijoitettua vaaditulla tavalla kahdeksan tornia.

Osoitamme, ettei yhdeksää tornia voida sijoittaa shakkilaudalle vaaditulla tavalla. Jaamme laudan ruudukon alla oikeanpuoleisen kuvan mukaisesti kahdeksaan "laatikkoon". Jos yhteen laatikkoon tulee useampi kuin yksi torni, niin laatikossa on kaksi tornia, joiden "välissä" ei ole kolmatta ja tällöin nämä kaksi uhkaavat toisiaan. Täten jokaiseen laatikkoon voidaan sijoittaa korkeintaan yksi torni; laatikkoperiaatteen nojalla torneja voidaan sijoittaa yhteensä korkeintaan kahdeksan kappaletta.

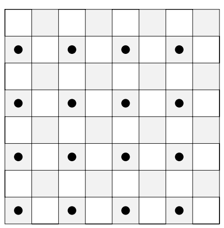


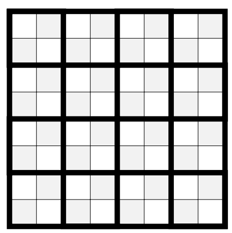


(d) Ongelma. Mikä on suurin määrä kuninkaita, jotka voidaan sijoittaa yht'aikaa shakkilaudan eri ruuduille ilman, että mitkään kaksi niistä uhkaavat toisiaan?

Ratkaisu. Jos kahdessa eri ruudussa olevat kuninkaat uhkaavat toisiaan, niin ruudut "koskettavat" toisiaan (joko reunoiltaan tai kulmiltaan). Sijoittamalla alla vasemmanpuoleisen kuvan mukaisesti kuninkaan joka toisen vaakarivin joka toiseen ruutuun, saamme sijoitettua kuusitoista kuningasta niin, etteivät mitkään kaksi uhkaa toisiaan.

Osoitamme seuraavaksi, ettemme voi sijoittaa seitsemäätoista kuningasta shakkilaudan eri ruutuihin niin, etteivät mitkään kaksi uhkaisi toisiaan. Jaamme laudan ruudukon alla oikenpuoleisen kuvan mukaisesti kuuteentoista neljän ruudun "neliöön". Jos sijoitamme yhteen neliöön kaksi kuningasta, niin ne uhkaavat toisiaan. Laatikkoperiaatteesta seuraa, että "sallitussa" sijoittelussa voi olla korkeintaan kuusitoista kuningasta.





Laatikkoperiaatteelle voidaan esittää vahvempi muoto.

II 1.7 Lause (Yleistetty laatikkoperiaate) *Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja, f kuvaus $X \to Y$ ja n luonnollinen luku. Jos $|X| > n \cdot |Y|$, niin on olemassa sellainen $y \in Y$, että $\left|f^{-1}\{y\}\right| > n$.*

Todistus. Teemme vastaväitteen: jokaisella $y \in Y$ on voimassa $\left|f^{-1}\{y\}\right| \leq n$. Merkitsemme $k = |Y|$ ja esitämme joukon Y muodossa $Y = \{y_i : i \in [k]\}$. Merkitsemme edelleen $l_i = \left|f^{-1}\{y_i\}\right|$ jokaisella $i \in [k]$ ja esitämme joukon $f^{-1}\{y_i\}$ muodossa $f^{-1}\{y_i\} = \{x_{ij} : j \in [l_i]\}$. Koska jokaisella $i \in [k]$ on voimassa $l_i \leq n$, voimme määritellä kuvauksen $\varphi : X \to [k] \times [n]$ asettamalla $\varphi(x_{ij}) = (i, j)$ jokaisella $i \in [k]$ ja jokaisella $j \in [l_i]$. Kuvaus φ on selvästikin injektio ja Lauseen II 1.4 nojalla on voimassa $|X| \leq |[k] \times [n]| = k \cdot n$. Edellisen nojalla pätee, että $|X| \leq k \cdot n = n \cdot |Y|$; tämä on kuitenkin ristiriidassa lauseen oletusten kanssa. Koska vastaväite johti ristiriitaan, se on väärä ja näinollen on olemassa sellainen $y \in Y$, että $\left|f^{-1}\{y\}\right| > n$. □

II 1.10 Esimerkkejä (a) Tehtävä Kahdessa sisäkkäisessä piirissä on kummassakin 20 lasta. Ulommassa piirissä on 10 tyttöä ja 10 poikaa. Osoita, että piirit voivat

pyörähtää sellaiseen asentoon, että eri piireissä vastaavissa kohdissa olevat lapset muodostavat vähintään 10 tyttö–poika paria.

Ratkaisu. Oletetaan, että uloin piiri pysyy paikallaan. Sisempi piiri voi pyörähtää 20:een eri asentoon suhteessa ulompaan piiriin; merkitään asentoja symbolein $a_1, ..., a_{20}$. Merkitään n_i:llä asentoa a_i vastaavien tyttö–poika parien lukumäärää. Osoitetaan, että $\sum_{i=1}^{20} n_i = 200$. Merkitään sisemmän piirin lapsia $l_1, ..., l_{20}$. Luvuille $i, j \in [20]$ asetetaan $k_{i,j} = 1$ jos l_j kuuluu tyttö–poika pariin asennossa a_i ja muussa tapauksessa asetetaan $k_{i,j} = 0$. Pannaan merkille, että $n_i = \sum_{j=1}^{20} k_{i,j}$ jokaisella i. Täten

$$\sum_{i=1}^{20} n_i = \sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{20} k_{i,j} = \sum_{j=1}^{20}\sum_{i=1}^{20} k_{i,j}.$$

Koska ulommassa piirissä on 10 tyttöä ja 10 poikaa, on jokaisella $j \in [20]$ voimassa $\sum_{i=1}^{20} k_{i,j} = 10$. Täten $\sum_{i=1}^{20} n_i = \sum_{i=1}^{20} 10 = 200$. Koska $\sum_{i=1}^{20} n_i \leq 20 \cdot \max(n_1, ..., n_{20})$, niin on voimassa $\max(n_1, ..., n_{20}) \geq 10$.

Huomautus *Edellinen päättely valaisee erästä diskreetissä matematiikassa usein käytettyä menetelmää: lasketaan jokin suure kahdella eri tavalla ja vedetään johtopäätös siitä, että laskujen tuloksen on oltava sama.*

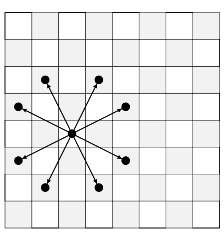
(b) Tehtävä. Tason (tai avaruuden) pistettä kutsutaan *kokonaispisteeksi*, jos pisteen kaikki koordinaatit ovat kokonaislukuja. Osoita, että jos X on äärellinen joukko tason kokonaispisteitä ja $|X| \geq 9$, niin on olemassa kolme X:n pistettä, joiden välisten yhdysjanojen keskipisteet ovat kokonaispisteitä.

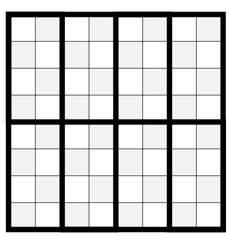
Ratkaisu. Määrittelemme kuvauksen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ asettamalla $f(n) = 0$ kun n on parillinen ja $f(n) = 1$ kun n on pariton. Lisäksi määrittelemme kuvauksen $g : X \to \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ asettamalla $g(x, y) = (f(x), f(y))$ jokaisella $(x, y) \in X$. Koska on voimassa $|\{0, 1\} \times \{0, 1\}| = 4$ ja $|X| \geq 9 > 2 \cdot 4$, yleistetyn laatikkoperiaatteen nojalla on olemassa sellainen joukon $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ alkio (i, j), että $\left|g^{-1}(i, j)\right| > 2$. Olkoon $A \subset g^{-1}(i, j)$ kolmen alkion joukko. Jos nyt (x, y) ja (a, b) ovat A:n alkioita, niin $f(x) = f(a) = i$ ja $f(y) = f(b) = j$, ja tästä seuraa, että luvut $x + a$ ja $y + b$ ovat parillisia. Täten $(x + a)/2$ ja $(y + b)/2$ ovat kokonaislukuja ja pisteiden (x, y) ja (a, b) välisen yhdysjanan keskipiste $((x + a)/2, (y + b)/2)$ on kokonaispiste. □

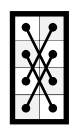
(c) Ongelma: Kuinka monta hevosta voidaan sijoittaa yht'aikaa shakkilaudan eri ruuduille ilman, että mitkään kaksi niistä uhkaavat toisiaan.

Ratkaisu: Sovimme, että "ruutu (i,j)" tarkoittaa ruutujen muodostaman i:nnen "vaakarivin" ja j:nnen "pystyrivin" leikkausruutua. Tällöin ruutuihin (i,j) ja (k,l) sijoitetut hevoset uhkaavat toisiaan jos ja vain jos on voimassa $|i-k|\cdot|j-l|=2$, toisin sanoen, jos ja vain jos yhdestä ruudusta voi siirtyä toiseen kulkemalla ensin kaksi "askelta" vaakasuoraan ja sen jälkeen yhden "askeleen" pystysuoraan tai kulkemalla ensin kaksi "askelta" pystysuoraan ja sen jälkeen yhden "askeleen" vaakasuoraan. Alla vasemmanpuoleisessa kuvassa näkyy, miten yhteen shakkilaudan "sisäruutuun" sijoitettu hevonen voi "hypätä".

Jos kahteen eri ruutuun sijoitetut hevoset uhkaavat toisiaan, niin ne ovat eri värisissä ruuduissa (katso kuvaa). Täten, sijoittamalla jokaiseen valkoiseen ruutuun hevonen, saadaan laudalle sijoitettua 32 hevosta niin, etteivät mitkään kaksi uhkaa toisiaan; osoitetaan, ettei tällä tavalla voida sijoittaa 33 hevosta. Jaetaan laudan ruudukko alla keskimmäisen kuvan mukaisesti kahdeksaan laatikkoon ja pannaan merkille, ettei mihinkään laatikkoon voi sijoittaa viittä hevosta ilman, että jotkut kaksi niistä uhkaisivat toisiaan. Tämä seuraa siitä, että kukin laatikko jakautuu oikeanpuoleisen kuvan mukaisesti neljään pienempään "laatikkoon", joista kuhunkin mahtuu sallitussa sijoittelussa vain yksi hevonen; täten isompaan laatikkoon mahtuu tavallisen laatikkoperiaatteen nojalla korkeintaan neljä hevosta. Koska laatikoita on kahdeksan kappaletta, yleistetty laatikkoperiaate osoittaa, että shakkilaudalle mahtuu toisiaan uhkaamattomia hevosia korkeintaan 32 kappaletta.







2. Summan ja erotuksen periaate.

Lauseessa I 3.9 osoitimme, että äärellisen monen äärellisen joukon yhdistysjoukko on äärellinen ja Lauseessa I 3.12 annoimme yksinkertaisen summalausekkeen yhdistysjoukon alkioiden lukumäärälle siinä tapauksessa, että joukot ovat keskenään erillisiä. Johdamme nyt yhdistysjoukon koolle lausekkeen, joka pätee myös silloin kun joukot leikkaavat toisiaan. Kahden joukon tapauksessa saamme seuraavan tuloksen.

II 2.1 Lemma *Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja. Tällöin* $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$.

Todistus. On voimassa $A\cup B = A\cup(B\smallsetminus A)$ ja tästä seuraa Korollaarin I 3.14 nojalla, koska joukot A ja $B\smallsetminus A$ ovat äärellisiä ja $A\cap(B\smallsetminus A)=\emptyset$, että $|A\cup B| = |A|+|B\smallsetminus A|$. Koska $B\smallsetminus A = B\smallsetminus(A\cap B)$ ja $A\cap B\subset B$, niin Korollaarin I 3.15 nojalla on voimassa $|B\smallsetminus A| = |B| - |A\cap B|$. Näinollen on voimassa

$$|A\cup B| = |A| + |B\smallsetminus A| = |A| + |B| - |A\cap B|. \qquad \square$$

Yleistämme nyt edellisen lauseen tuloksen koskemaan äärellisen monen äärellisen joukon yhdistystä. Todistamme ensin seuraavan aputuloksen.

II 2.2 Lemma *Kun A äärellinen joukko, $A\neq\emptyset$, niin merkitään $\mathcal{E}(A) = \{B\subset A :$ luku $|B|$ on parillinen$\}$ ja $\mathcal{O}(A) = \{B\subset A :$ luku $|B|$ on pariton$\}$. Tällöin joukot $\mathcal{E}(A)$ ja $\mathcal{O}(A)$ ovat äärellisiä ja $|\mathcal{E}(A)| = |\mathcal{O}(A)|$.*

Todistus. Käytämme induktiota joukon alkioiden lukumäärän suhteen. Olkoon a_0 joukon A alkio.
$|A|=1$: Jos $A=\{a_0\}$, niin $\mathcal{E}(A)=\{\emptyset\}$ ja $\mathcal{O}(A)=\{A\}$, joten väite pitää paikkansa.
Oletamme, että on voimassa $|A|>1$ ja että olemme jo todistaneet väitteen joukoille, joissa on $|A|-1$ alkiota. Merkitsemme $\bar{A} = A\smallsetminus\{a_0\}$. Tällöin $|\bar{A}| = |A|-1$, joten väite pätee $\bar{A}$:lle ja joukot $\mathcal{E}(\bar{A})$ ja $\mathcal{O}(\bar{A})$ ovat äärellisiä. Määrittelemme kuvaukset $\psi_e : \mathcal{E}(\bar{A})\cup\mathcal{O}(\bar{A}) \to \mathcal{E}(A)$ ja $\psi_o : \mathcal{E}(\bar{A})\cup\mathcal{O}(\bar{A}) \to \mathcal{O}(A)$ seuraavasti.

$$\psi_e(B) = \begin{cases} B & \text{jos } |B|\in\mathcal{E}(\bar{A}) \\ B\cup\{a_0\} & \text{jos } |B|\in\mathcal{O}(\bar{A}) \end{cases} \qquad \psi_o(B) = \begin{cases} B & \text{jos } |B|\in\mathcal{O}(\bar{A}) \\ B\cup\{a_0\} & \text{jos } |B|\in\mathcal{E}(\bar{A}) \end{cases}$$

Voimme helposti tarkistaa, ψ_e on bijektio $\mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A}) \to \mathcal{E}(A)$ ja ψ_o on bijektio $\mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A}) \to \mathcal{O}(A)$. Näin ollen on voimassa

$$|\mathcal{E}(A)| = |\mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A})| = |\mathcal{O}(A)|. \qquad \square$$

Voimme panna merkille, että osa lemman tuloksesta on hyvin helppo todistaa siinä tapauksessa, että joukon A alkioiden lukumäärä on pariton: tällöin nimittäin kuvaus $\varphi : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{O}(A)$, missä $\varphi(B) = A \setminus B$, on bijektio.

Voimme ilmaista lemman tuloksen myös seuraavilla yhtälöillä:

$$\sum_{B\in\mathcal{E}(A)} 1 = \sum_{B\in\mathcal{O}(A)} 1 \ \text{ eli } \sum_{B\in\mathcal{E}(A)} 1 - \sum_{B\in\mathcal{O}(A)} 1 = 0 \ \text{ eli } \sum_{B\subset A} (-1)^{|B|} = 0.$$

Panemme vielä merkille, että oikeanpuoleinen yhtälö voidaan saattaa seuraavaan muotoon:

$$\sum_{\emptyset\neq B\subset A} (-1)^{|B|+1} = 1\,. \qquad (*)$$

Todistamme nyt viimeksi kirjoitetun yhtälön avulla tärkeän kaavan äärellisen monen äärellisen joukon yhdistysjoukon alkioiden lukumäärälle.

II 2.3 Lause *(Summa– ja erotusperiaate) Olkoon I äärellinen joukko ja olkoon A_i äärellinen joukko jokaisella $i \in I$. Tällöin joukko $\bigcup_{i\in I} A_i$ on äärellinen ja*

$$\boxed{\Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big| = \sum_{\emptyset\neq J\subset I} (-1)^{|J|+1} \Big|\bigcap_{j\in J} A_j\Big|}$$

Todistus. Merkitsemme $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Haluamme laskea joukon A koon. Jokaisella $x \in A$ merkitsemme $I_x = \{i \in I : x \in A_i\}$ ja panemme merkille, että $I_x \neq \emptyset$.

Yhtälön $(*)$ nojalla on voimassa

$$|A| = \sum_{x\in A} 1 = \sum_{x\in A} \sum_{\emptyset\neq K\subset I_x} (-1)^{|K|+1}.$$

Ryhmittelemme viimeisessä summassa termit uudelleen kokoamalla jokaisella $\emptyset \neq J \subset I$ yhteen ne termit, jotka vastaavat joukkoa J; panemme merkille, että jokaisella $x \in A$ on voimassa $J \subset I_x$ täsmälleen silloin kun on voimassa $x \in \bigcap_{i\in J} A_i$. Jokaisella $\emptyset \neq J \subset I$ merkitsemme $A_J = \bigcap_{i\in J} A_i$. Tällöin on voimassa

$$\sum_{x\in A} \sum_{\emptyset\neq K\subset I_x} (-1)^{|K|+1} = \sum_{\emptyset\neq J\subset I} \sum_{x\in A_J} (-1)^{|J|+1}.$$

Saamme nyt halutun lausekkeen joukon A koolle, sillä on voimassa

$$\sum_{\emptyset\neq J\subset I} \sum_{x\in A_J} (-1)^{|J|+1} = \sum_{\emptyset\neq J\subset I} (-1)^{|J|+1} \sum_{x\in A_J} 1 = \sum_{\emptyset\neq J\subset I} (-1)^{|J|+1} |A_J|. \qquad \square$$

Annamme nyt eräitä esimerkkejä summa– ja erotusperiaatteen käytöstä.

II 2.4 Esimerkkejä **(a)** $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

(b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

(c) Ongelma. On maalattava nelinurkkaisen huoneen seinät, kukin seinä yksiväriseksi. Kuinka monella eri tavalla tämä voidaan tehdä, kun on käytettävissä neljää eriväristä maalia ja vaaditaan, että mitään kahta vierekkäistä seinää ei saa maalata samanvärisiksi?

Ratkaisu. Olkoot maalien värit vaikkapa **p**unainen, **v**alkoinen, **k**eltainen ja **s**ininen. Olkoot seinät $s_1, ..., s_4$, missä vierekkäisiä ovat s_1 ja s_2, s_2 ja s_3, s_3 ja s_4 sekä s_4 ja s_1. Merkitään $4^* = 1$ ja jokaisella $i \in [3]$, $i^* = i + 1$. Jokaisella $i \in [4]$ merkitään $E_i = \{i, i^*\}$. Mielivaltainen väritys väreillä **p**, **v**, **k** ja **s** voidaan esittää jonona $(x_1, ..., x_4)$, missä jokaisella $i \in [4]$, $x_i \in \{\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{k}, \mathbf{s}\}$ on seinän s_i saama väri; jono $(x_1, ..., x_4)$ esittää "sallittua" väritystä, mikäli jokaisella $i \in [4]$ on voimassa $x_i \neq x_{i^*}$; muussa tapauksessa jono esittää "kiellettyä" väritystä.

Lasketaan summa– ja erotusperiaatteen avulla kiellettyjen väritysten lukumäärä. Merkitään V:llä kaikkien väritysten joukkoa ja K:lla kiellettyjen väritysten joukkoa. Jokaisella $i \in [4]$ merkitään K_i:llä joukkoa $\{(x_1, ..., x_4) \in V : x_i = x_{i^*}\}$. Tällöin $K = \bigcup_{i=1}^4 K_i$. Summa– ja erotusperiaatteen nojalla on voimassa

$$|K| = \sum_{\emptyset\neq J\subset[4]} (-1)^{|J|+1} \Big|\bigcap_{i\in J} K_i\Big|. \qquad (*)$$

Jokaisella $i \in [4]$ on voimassa $|K_i| = 4^3$, koska joukkoon K_i kuuluvissa värityksissä seinien s_i ja s_{i^*} yhteinen väri voidaan valita neljällä eri tavalla ja loput kaksi seinää voidaan värittää miten halutaan.

Olkoot i ja j joukon $[4]$ kaksi eri alkiota. Näytetään, että tällöin on voimassa $|K_i \cap K_j| = 4^2$. Koska pätee, että $i \neq j$, niin on voimassa $E_i \neq E_j$ ja tästä seuraa, että $|E_i \cup E_j| \geq 3$. Tarkastellaan kahta eri tapausta. Oletetaan aluksi, että $E_i \cap E_j = \emptyset$. Tällöin $E_i \cup E_j = [4]$ ja joukkoon $K_i \cap K_j$ kuuluva väritys määräytyy seinien s_i

ja s_{i^*} yhteisen värin sekä seinien s_j ja s_{j^*} yhteisen värin valinnoilla; koska valinnat ovat toisistaan riippumattomia ja kumpikin niistä voidaan suorittaa neljällä tavalla, nähdään olevan voimassa $|K_i \cap K_j| = 4^2$. Oletetaan seuraavaksi, että $E_i \cap E_j \neq \emptyset$. Pannaan merkille, että tällöin on voimassa $|E_i \cup E_j| = 3$. Olkoon h joukon $[4] \setminus (E_i \cup E_j)$ ainoa alkio. Koska $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, joukkoon $K_i \cap K_j$ kuuluvassa värityksessä kolmelle seinälle s_k, $k \in E_i \cup E_j$, tulee sama väri. Neljäs seinä s_h voidaan värittää muiden seinien väristä riippumatta ja näinollen joukkoon $K_i \cap K_j$ kuuluvia värityksiä on tässäkin tapauksessa 4^2 kappaletta.

Joukon $[4]$ 3–osajoukot ovat $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$ ja $\{2,3,4\}$. Olkoon J yksi näistä neljästä joukosta. Tällöin on voimassa $\bigcup_{j\in J} E_j = [4]$ ja joukolle J löytyy sellainen esitys $J = \{h,i,k\}$, että $E_h \cap E_i \neq \emptyset$ ja $E_i \cap E_k \neq \emptyset$; tästä seuraa, että joukkoon $\bigcap_{j\in J} K_j$ kuuluvat vain ne väritykset, joissa kaikki seinät ovat samanväriset. Edellisen nojalla jokaiselle 3–joukolle $J \subset [4]$ pätee, että $\left|\bigcap_{j\in J} K_j\right| = 4$. Koska yhdellä värillä tehdyt väritykset kuuluvat myös joukkoon $\bigcap_{i\in[4]} K_i$, on edellisen nojalla voimassa $\left|\bigcap_{i\in[4]} K_i\right| = 4$.

Edellisestä seuraa, että jokaisella $J \subset [4]$ luku $\left|\bigcap_{j\in J} K_j\right|$ riippuu vain joukon J alkioiden lukumäärästä. Koska joukolla $[4]$ on täsmälleen kuusi 2–osajoukkoa, edellä esitetystä seuraa yhtälön (*) nojalla, että on voimassa

$$|K| = 4 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 172.$$

Koska joukon V koko on 4^4, sallittujen väritysten lukumäärä on

$$|V \setminus K| = |V| - |K| = 256 - 172 = 84. \qquad \square$$

3. Jonojen, kuvausten ja osajoukkojen lukumäärät.

Tässä luvussa määritämme eräiden jonojen, kuvausten ja osajoukkojen muodostamien joukkojen alkioiden lukumäärät. Laskemme aluksi äärellisen monen äärellisen joukon karteesisen tulon koon.

Karteesisen tulon käsite yleistetään useammalle kuin kahdelle joukolle seuraavasti. Olkoon $n > 1$ luonnollinen luku ja olkoot $X_1, ..., X_n$ joukkoja. *Joukkojen $X_1, ..., X_n$ karteesinen tulo* on joukko

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in X_i \text{ jokaisella } i \in [n]\}.$$

II 3.1 Lause *Olkoon $m > 1$ luonnollinen luku ja olkoot $X_1, ..., X_m$ äärellisiä joukkoja. Tällöin joukko $X_1 \times \cdots \times X_m$ on äärellinen ja*

$$\boxed{|X_1 \times \cdots \times X_m| = |X_1| \cdots |X_m|}$$

Todistus. Jos $m = 2$, niin kyseessä on Lauseen I 3.17 tulos. Toisaalta, jokaiselle $m > 2$ ja kaikille $x_1, ..., x_m$ pätee, että $(x_1, ..., x_m) = ((x_1, ..., x_{m-1}), x_m)$ ja tästä seuraa, että jokaisella $2 < m \le n$ on voimassa

$$X_1 \times \cdots \times X_m = (X_1 \times \cdots \times X_{m-1}) \times X_m.$$

Lauseen tulos seuraa näinollen Lauseen I 3.17 tuloksesta induktiolla luvun m suhteen (todistuksen yksityiskohdat jätetään lukijan suoritettaviksi). $\square$

Jos jokaisella $i \in [n]$ on voimassa $X_i = X$, niin karteesisesta tulosta $X_1 \times \cdots \times X_n$ käytetään merkintää X^n. Pannaan merkille, että joukko X^n koostuu kaikista joukon X alkioiden muodostamista n:n pituisista jonoista. Joukko X^n voidaan vastaavasti määritellä myös n:n arvoilla 0 ja 1: tällöin on voimassa $X^0 = \{()\} = \{\emptyset\}$ ja $X^1 = \{(x) : x \in X\} = \{x : x \in X\} = X$. Sovimme myös, että $0^0 = 1$.

II 3.2 Korollaari *Olkoon X äärellinen joukko. Tällöin jokaisella $m \in \mathbb{N}$ on voimassa*

$$\boxed{|X^m| = |X|^m}$$

Todistus. $\left|X^0\right| = |\{\emptyset\}| = 1 = |X|^0$ ja $\left|X^1\right| = |X| = |X|^1$. Luvuille $m > 1$ tulos seuraa Lauseesta II 3.1. $\square$

Palautamme mieliin, että annetun joukon X potenssijoukko on joukko $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$. Jos $k \in \mathbb{N}$, niin käytämme joukosta $\mathcal{P}([k])$ lyhennettyä merkintää $\mathcal{P}[k]$.

II 3.3 Lause *Olkoon X n–joukko. Tällöin*

$$\boxed{|\mathcal{P}(X)| = 2^n}$$

Todistus. Esitetään joukko X muodossa $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Määritellään kuvaus $j : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^n$ merkitsemällä jokaisella $A \in \mathcal{P}(X)$, $j(A)$:lla sitä lukujen 0 ja 1 muodostamaa jonoa $(j_1, ..., j_n)$, jolle $j_k = 0$ jos $x_k \notin A$ ja $j_k = 1$ jos $x_k \in A$. Nähdään helposti, että kuvaus j on bijektio. Lauseen I 3.4 ja Korollaarin II 3.2 nojalla joukko $\mathcal{P}(X)$ on äärellinen ja $|\mathcal{P}(X)| = |\{0,1\}|^n = 2^n$. $\square$

Kuvaus $a \mapsto \{a\}$ on jokaisella joukolla A injektio $A \to \mathcal{P}(A)$. Sen sijaan ei ole olemassa surjektiota $A \to \mathcal{P}(A)$:

II 3.4 Lause *Olkoon A joukko. Tällöin ei ole olemassa surjektiota $A \to \mathcal{P}(A)$.*

Todistus. Olkoon f kuvaus $A \to \mathcal{P}(A)$. Merkitään $X = \{a \in A : a \notin f(a)\}$. Näytetään, että $X \notin f(A)$. Olkoon a joukon A alkio. Jos $a \in X$, niin $a \notin f(a)$, joten $f(a) \neq X$. Jos taas $a \in A \setminus X$, niin $a \in f(a)$, joten jälleen $f(a) \neq X$. □

II 3.5 Korollaari *Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $n < 2^n$.*

Todistus. Lauseet II 3.3, II 3.4 ja II 1.4. □

II 3.6 Esimerkki Jos A on joukon $[100]$ 10–osajoukko, niin on olemassa sellaiset A:n erilliset epätyhjät osajoukot B ja C, että joukon B alkioiden summa on sama kuin joukon C alkioiden summa.

Todistus. Koska $|A| = 10$, Lauseen II 3.3 nojalla on voimassa $|\mathcal{P}(A)| = 2^{10} = 1024$. Koska $A \subset [100]$, jokaisella $B \subset A$ on voimassa $\sum_{x\in B} x \le 1000$. Laatikkoperiaatteen nojalla on olemassa sellaiset $E \subset A$ ja $D \subset A$, että $E \neq D$ ja $\sum_{x\in E} x = \sum_{x\in D} x$. Merkitään $B = E \setminus (E \cap D)$ ja $C = D \setminus (E \cap D)$. Tällöin $B \cap C = \emptyset$ ja

$$\sum_{x\in B} x = \sum_{x\in E} x - \sum_{x\in E\cap D} x = \sum_{x\in D} x - \sum_{x\in E\cap D} x = \sum_{x\in C} x.$$

Koska $E \neq D$, niin joko $B \neq \emptyset$ tai $C \neq \emptyset$ ja näin ollen joko $\sum_{x\in B} x \neq 0$ tai $\sum_{x\in C} x \neq 0$; koska näillä summilla on sama arvo, on kumpikin summa arvoltaan nollasta poikkeava ja täten on voimassa $B \neq \emptyset$ ja $C \neq \emptyset$. □

Koska äärellisen joukon kaikkien osajoukkojen joukko on äärellinen, niin myös sen k-osajoukkojen joukko (missä $k \in \mathbb{N}$) on äärellinen. Joukon $[n]$ k–osajoukkojen lukumäärää merkitsemme symbolilla $\binom{n}{k}$. Annetun joukon X k-alkioisten osajoukkojen muodostamaa joukkoa merkitään symbolilla $\mathcal{P}_k(X)$ (jos $X = [m]$, niin merkitsemme lyhyemmin $\mathcal{P}_k[m]$). Siis

$$\boxed{\binom{n}{k} = |\{A \in \mathcal{P}[n] : |A| = k\}| = |\mathcal{P}_k[n]|}$$

Selvästi $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, sillä joukolla on vain yksi tyhjä ja yksi täysi osajoukko. Samoin selvästi $\binom{n}{1} = n$. Toisaalta huomaamme helposti, että luvut $\binom{n}{k}$ ovat parametrin k suhteen *symmetrisiä*: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ kaikille $k \in [n]$. Tämä seuraa yksinkertaisesti siitä, että jokaista joukon $[n]$ k-osajoukkoa A vastaa yksikäsitteisesti sen komplementti $[n] \setminus A$, joka on $(n-k)$-osajoukko. Koska luvut $\binom{n}{0}, \ldots, \binom{n}{n}$ luettelevat joukon $[n]$ *kaikkien* osajoukkojen lukumäärät, saamme Lauseen 3.3 avulla seuraavan identiteetin:

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n}$$

Pascalin identiteetin nimellä tunnettu palautuskaava ilmaisee luvut $\binom{n}{k}$ lukujen $\binom{n-1}{i}$ avulla seuraavasti.

II 3.7 Lause (Pascalin identiteetti) *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon $k \in [n]$, $0 < k < n$. Tällöin*

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

Todistus. Määritellään $\phi : \mathcal{P}_k[n] \to \mathcal{P}_{k-1}[n-1] \cup \mathcal{P}_k[n-1]$ kaavalla $\phi(A) = A \setminus \{n\}$. Lukija voi helposti tarkistaa, että kuvaus ϕ on bijektio. □

Pascalin palautuskaava antaa ns. *Pascalin kolmion*, jossa luvut $\binom{n}{k}$ on lueteltu palautuskaavan mukaisessa järjestyksessä. Seuraavassa kaaviossa luetellaan kyseisen kolmion seitsemän ensimmäistä riviä.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

(Mainittakoon, että Pascalin (1623 – 1662) kolmio julkaistiin Kiinassa v. 1303, ja se oli tunnettu jo aikaisemmin.)

Pienillä n:n arvoilla luvut $\binom{n}{k}$ voidaan etsiä täydentämällä Pascalin kolmiota, mutta suuremmille n:n arvoille tämä on liian työlästä. Teoreettisia tarkasteluja varten haluttaisiin joka tapauksessa selkeä lauseke luvuille $\binom{n}{k}$. Tällainen lauseke voidaankin antaa nk. *kertomafunktion* avulla. Palautetaan nyt mieliin kertomafunktion määritelmä. Luvun n *kertoma* $n!$ määritellään rekursiivisesti asettamalla $0! = 1$ ja $k! = ((k-1)!) \cdot k$ kun $k > 0$. Täten $1! = 1 \cdot 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 2 \cdot 3$ ja, yleisesti, jokaisella $n > 0$ on voimassa $n! = 1 \cdots n$.

II 3.8 Lause *Kaikille $n, k \in \mathbb{N}$, missä $k \leq n$, on voimassa*

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Todistus. Todistetaan lause induktiolla luvun n suhteen. Koska $\binom{0}{0} = |\mathcal{P}_0(\emptyset)| = 1 = \frac{0!}{0!0!}$, väite pätee arvolla 0. Oletetaan nyt, että $n > 0$ on sellainen luonnollinen luku, että väite pätee arvolla $n-1$. Olkoon luvulle $k \in \mathbb{N}$ voimassa $k \leq n$. Osoitetaan, että $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Jos $k = 0$ tai $k = n$, niin kaava pätee, koska $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 = \frac{n!}{0!n!}$. Oletetaan, että $0 < k < n$. Pascalin identiteetin nojalla on voimassa $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ja induktio–oletuksen nojalla pätee, että $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ ja $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$; yhdistämällä nämä yhtälöt saadaan luvulle $\binom{n}{k}$ lauseke

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,. \quad \square\end{aligned}$$

Esimerkki Olet täyttänyt lottokaavakkeesta yhden ruudukon eli valinnut seitsemän lukua joukosta [39]. Lottoarvonnassa arvotaan joukon [39] seitsemän alkiota valitsemalla umpimähkään seitsemän palloa, jotka on numeroitu 1,2,3,...,39. Mikä on todennäköisyys, että valitsemasi numerot ovat samat kuin arvonnan antamat?

Ratkaisu: Arvonta määrää yhden alkion joukosta $\mathcal{P}_7[39]$; koska joukon $\mathcal{P}_7[39]$ kaikkien alkioiden lukumäärä on $\binom{39}{7}$, niin arvonnan "umpimähkäisyyden" nojalla todennäköisyys sille, että valintasi antoi "seitsemän oikein" on

$$\frac{1}{\binom{39}{7}} = \frac{7!32!}{39!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots 7}{33 \cdot 34 \cdots 39} = \frac{1}{15380937}\,. \qquad \square$$

Lukuja $\binom{n}{k}$ kutsutaan myös *binomikertoimiksi*, sillä ne esiintyvät aukikehitetyn polynomin $(x+y)^n$ termien $x^k y^{n-k}$ kertoimina. Esitämme binomilauseen tässä yhteydessä vain luonnollisille luvuille, mutta mainitsemme kuitenkin, että kaava on voimassa kokonaisluvuille tai reaaliluvuille tai mille tahansa "luvuille", joiden yhteenlasku ja kertolasku ovat kommutatiivisia.

II 3.9 (Binomilause) Lause *Kaikilla $n, x, y \in \mathbb{N}$ on voimassa*

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}}$$

Todistus. Harjoitustehtävä [Ohje: induktio n:n suhteen ja Pascalin identiteetti]. $\square$

Esimerkki: Laske termin x^6 kerroin polynomissa $(1+x)^8$.
Ratkaisu: Binomikaavan nojalla

$$(1+x)^8 = \sum_{i=0}^{8} \binom{n}{i} 1^i x^{8-i},$$

joten termin x^6 kerroin on

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Laskemme seuraavaksi kahden äärellisen joukon välisten kuvausten lukumäärän; laskemme myös bijektioiden, injektioiden ja surjektioiden lukumäärät.

Olkoot X ja Y joukkoja. Merkitsemme

$$K(X,Y) = \{f : f \text{ on kuvaus } X \to Y\}\,,$$

$$B(X,Y) = \{f : f \text{ on bijektio } X \to Y\}\,,$$

$$I(X,Y) = \{f : f \text{ on injektio } X \to Y\} \text{ ja}$$

$$S(X,Y) = \{f : f \text{ on surjektio } X \to Y\}\,.$$

II 3.10 Lause *Olkoon X n–joukko ja Y k–joukko. Tällöin*

$$\boxed{|K(X,Y)| = k^n}$$

Todistus. Esitetään joukko X muodossa $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Määritellään kuvaus $\varphi : K(X,Y) \to Y^n$ asettamalla $\varphi(f) = (f(x_1), ..., f(x_n)) \in Y^n$ jokaisella $f \in K(X,Y)$. Kuvaus φ on injektio, koska jokaisella $f \in K(X,Y)$ alkiot $f(x_1), ..., f(x_n)$ määräävät kuvauksen f. Kuvaus φ on surjektio, sillä jokaisella $(y_1, ..., y_n) \in Y^n$, jos f on kuvaus $x_i \mapsto y_i$, niin tällöin on voimassa $\varphi(f) = (y_1, ..., y_n)$. Täten φ on bijektio ja Lauseen I 3.4 ja Korollaarin II 3.2 nojalla pätee, että $|K(X,Y)| = |Y|^n$. □

II 3.11 Lause *Jos X ja Y ovat n–joukkoja, niin*

$$\boxed{|B(X,Y)| = n!}$$

Todistus. Käytetään induktiota luvun n suhteen.

Jos $n = 0$, niin tällöin $X = Y = \emptyset$; tässä tapauksessa on voimassa $B(X,Y) = \{\emptyset\}$ ja näinollen $|B(X,Y)| = 1 = 0!$

Olkoon nyt $n > 0$ sellainen luku, että väite pätee luvulle $n-1$. Olkoon a joukon X alkio. Merkitään jokaisella $y \in Y$,

$$B_y = \{f \in B(X,Y) : f(a) = y\}.$$

Pannaan merkille, että $B(X,Y) = \bigcup_{y \in Y} B_y$. Koska joukon $B(X,Y)$ alkiot ovat kuvauksia, niin joukot B_y, $y \in Y$, ovat keskenään erillisiä. Täten on voimassa $|B(X,Y)| = \Sigma_{y \in Y} |B_y|$.

Osoitetaan, että jokaisella $y \in Y$ on voimassa $|B_y| = (n-1)!$ Olkoon y joukon Y alkio. Merkitään $Z = X \setminus \{a\}$ ja $V = Y \setminus \{y\}$. Koska $|Z| = |V| = n-1$, niin induktio–oletuksen nojalla pätee, että $|B(Z,V)| = (n-1)!$ Nähdään helposti, että kaava $\varphi(g) = g \cup \{(a,y)\}$ määrittelee kuvauksen $\varphi : B(Z,V) \to B_y$. Kuvaus φ on bijektio, koska sillä on käänteiskuvaus $\psi : B_y \to B(Z,V)$, missä $\psi(f) = f|Z$. Edellisen nojalla pätee, että $|B_y| = |B(Z,V)| = (n-1)!$

Edellä esitetyn nojalla on voimassa

$$|B(X,Y)| = \Sigma_{y \in Y} |B_y| = \Sigma_{y \in Y} (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n! \qquad \square$$

Yllä annetussa todistuksessa on esitetty täsmällisempi formulointi seuraavalle havainnolliselle “todistukselle”. Esitetään X muodossa $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Määrättäessä bijektiota $f : X \to Y$, $f(x_1)$:ksi voidaan valita mikä tahansa n:stä Y:n alkiosta, $f(x_2)$:ksi mikä tahansa joukon $Y \setminus \{f(x_1)\}$ $n-1$:stä alkiosta,..., ja viimein $f(x_n)$:ksi voidaan valita mikä tahansa joukon $Y \setminus \{f(x_1), ..., f(x_{n-1})\}$ 1:stä alkiosta. Täten bijektio voidaan muodostaa $n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$ eri tavalla.

Esimerkki Laske kuinka monella eri tavalla voidaan shakkilaudan eri ruuduille sijoittaa kahdeksan tornia kun vaaditaan, etteivät mitkään kaksi tornia uhkaa toisiaan (katso Esimerkkiä II 1.6.(c)).

Ratkaisu: Kahdeksan tornin sijoittelua voidaan kuvata kahdeksanalkioisella joukolla $S \subset [8] \times [8]$ kun sovitaan, että alkion (i,j) mukanaolo joukossa S merkitsee sitä, että i:nnen “vaakarivin” ja j:nnen “pystyrivin” leikkausruutuun on sijoitettu yksi torni. Selvästikin kahteen eri sijoitteluun liittyvät joukot eroavat toisistaan. Täten “sallittujen” sijoittelujen lukumäärän laskemiseksi voidaan määrittää niihin liittyvien joukkojen lukumäärä.

Kahdeksan tornin sijoittelu toteuttaa vaaditun ehdon, että mitkään kaksi tornia eivät uhkaa toisiaan, jos ja vain jos millään ruutujen muodostamalla vaakarivillä ei ole kahta tornia eikä millään pystyrivillä ole kahta tornia; sijoitteluun liittyvän joukon S avulla ilmaistuna kyseinen ehto voidaan ilmaista seuraavasti: jos (i,j) ja (k,l) ovat joukon S kaksi eri alkiota, niin on oltava voimassa $i \neq k$ ja $j \neq l$. Jos tarkastellaan joukkoa S joukon $[8]$ relaationa, niin ehto $(i,j) \neq (k,l) \Rightarrow i \neq j$ merkitsee sitä, että S:n on oltava kuvaus ja ehto $(i,j) \neq (k,l) \Rightarrow j \neq l$ merkitsee sitä, että kuvauksen S on oltava injektio. Vaatimus, että kuvaus S on joukon $[8] \times [8]$ kahdeksanalkioinen osajoukko merkitsee sitä, että S:n on oltava kuvaus $[8] \to [8]$; injektio $S : [8] \to [8]$ on välttämättä bijektio.

On osoitettu, että jos sijoittelu täyttää vaaditun ehdon, niin siihen liittyvä joukko on bijektio $[8] \to [8]$; toisaalta nähdään helposti, että jokaiseen bijektioon $[8] \to [8]$ liittyvä sijoittelu toteuttaa vaaditun ehdon. Näin ollen sallittujen sijoittelujen lukumäärä on sama kuin joukon $B([8],[8])$ koko eli $8! = 40320$. □

II 3.12 Lause *Olkoon X n–joukko ja Y k–joukko. Oletetaan, että $n \leq k$. Tällöin*

$$\boxed{|I(X,Y)| = \frac{k!}{(k-n)!}}$$

Todistus. Kun $f \in I(X,Y)$, niin f on bijektio $X \to f(X)$, joten on voimassa $f(X) \in \mathcal{P}_n(Y)$. Merkitään jokaisella $A \in \mathcal{P}_n(Y)$, $I_A = \{f \in I(X,Y) : f(X) = A\}$; pannaan merkille, että on voimassa $I_A = B(X,A)$, joten edellisen lauseen tuloksesta seuraa, että $|I_A| = n!$ Joukot I_A, $A \in \mathcal{P}_n(Y)$, ovat erillisiä ja on voimassa $I(X,Y) = \bigcup_{A\in\mathcal{P}_n(Y)} I_A$; tästä seuraa, että on voimassa

$$|I(X,Y)| = \sum_{A\in\mathcal{P}_n(Y)} |I_A| = \sum_{A\in\mathcal{P}_n(Y)} n! = |\mathcal{P}_n(Y)|\cdot n!$$

Koska Lauseen II 3.8 nojalla pätee, että $|\mathcal{P}_n(Y)| = \binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, luvulle $|I(X,Y)|$ saadaan haluttu lauseke

$$|I(X,Y)| = |\mathcal{P}_n(Y)|\cdot n! = \frac{k!}{n!(k-n)!}\cdot n! = \frac{k!}{(k-n)!}\,. \qquad \square$$

Lasketaan lopuksi kahden äärellisen joukon välisten surjektioiden lukumäärä.

II 3.13 Lause *Olkoon X n–joukko ja Y k–joukko. Tällöin*

$$\boxed{|S(X,Y)| = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n}$$

Todistus. Todistetaan lause summa– ja erotusperiaatteen avulla. Merkitään jokaisella $y \in Y$, $F_y = \{f \in K(X,Y) : y \notin f(X)\}$. Tällöin $S(X,Y) = K(X,Y) \smallsetminus \bigcup_{y\in Y} F_y$. Jokaisella $A \subset Y$ on voimassa $\bigcap_{y\in A} F_y = \{f \in K(X,Y) : f(X)\cap A = \emptyset\}$; tästä seuraa, että $\bigcap_{y\in A} F_y = K(X, Y\smallsetminus A)$ ja edelleen, Lauseen II 3.10 nojalla, että $\left|\bigcap_{y\in A} F_y\right| = (k-|A|)^n$. Edellä esitetystä seuraa summa– ja erotusperiaatteen nojalla, että on voimassa

$$\left|\bigcup_{y\in Y} F_y\right| = \sum_{\emptyset\neq A\subset Y}(-1)^{|A|+1}\left|\bigcap_{y\in A} F_y\right| = \sum_{\emptyset\neq A\subset Y}(-1)^{|A|+1}(k-|A|)^n\,.$$

Ryhmittelemällä termejä uudelleen, saadaan viimeinen summalauseke esitettyä muodossa $\sum_{i=1}^{k}\sum_{A\in\mathcal{P}_i(Y)}(-1)^{i+1}(k-i)^n$. Koska jokaisella $i \in [k]$ on voimassa $|\mathcal{P}_i(Y)| = \binom{k}{i}$, niin saadaan yhtälö $\sum_{i=1}^{k}\sum_{A\in\mathcal{P}_i(Y)}(-1)^{i+1}(k-i)^n = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}(k-i)^n$. Edellä esitetyn nojalla on voimassa $\left|\bigcup_{y\in Y} F_y\right| = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}(k-i)^n$. Näinollen pätee, että

$$|S(X,Y)| = |K(X,Y)| - \left|\bigcup_{y\in Y} F_y\right|$$

$$= k^n - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}(k-i)^n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n. \qquad \square$$

II 3.14 Korollaari *Jos n ja k ovat luonnollisia lukuja ja $n < k$, niin tällöin on voimassa*

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = 0 = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}i^n.$$

Todistus. Olkoon siis voimassa $n < k$. Lauseen II 1.4 nojalla pätee, että $S([n],[k]) = \emptyset$ ja tästä seuraa Lauseen II 3.13 nojalla, että on voimassa

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = 0. \qquad (*)$$

Koska jokaisella $0 \le i \le k$ on voimassa $\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i}$ ja $(-1)^{k-i} = (-1)^k(-1)^i$, niin yhtälöstä (*) seuraa yhtälö $(-1)^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{k-i}(k-i)^n = 0$. ja tästä seuraa sijoituksella $j = k-i$ yhtälö $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}j^n = 0$. $\square$

Kaikkien surjektioiden $[n] \to [k]$ lukumäärän ohella on monissa tilanteissa tarpeen tietää myös sellaisten surjektioiden $f : [n] \to [k]$ lukumäärä, joilla alkukuvien $f^{-1}(i)$, $i \in [k]$, koot on ennalta annettu. Voimme ilmaista tällaiset lukumäärät nk. *multinomikertoimien* avulla. Nämä kertoimet määritellään seuraavasti: kun n ja $j_1, ..., j_k$ ovat sellaisia luonnollisia lukuja, että $j_1 + \cdots + j_k = n$, niin asetetaan

$$\binom{n}{j_1\cdots j_k} = \frac{n!}{j_1!\cdot j_2!\cdots j_k!}\,.$$

Multinomikertoimet yleistävät binomikertoimia, sillä voimme esittää binomikertoimen $\binom{n}{j}$ multinomikertoimena muodossa $\binom{n}{j\;n-j}$. Toisaalta voimme palauttaa multinomikertoimet binomikertoimiin seuraavan palautuskaavan avulla.

II 3.15 Lemma *Kun luonnollisille luvuille n ja $j_1, ..., j_k$ on voimassa $k > 1$ ja $j_1 + \cdots + j_k = n$, niin*

$$\binom{n}{j_1\cdots j_k} = \binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2\cdots j_k} = \binom{n-j_k}{j_1\cdots j_{k-1}}\binom{n}{j_k}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Palautuskaavan avulla voimme helposti todistaa seuraavan tuloksen, jolla on paljon käyttöä kombinatoriikassa.

II 3.16 Lause *Olkoon X n-joukko ja olkoon luonnollisille luvuille $j_1, ..., j_k$ voimassa $j_1 + \cdots + j_k = n$. Tällöin*

$$\boxed{\left|\left\{f : f \text{ on kuvaus } X \to [k] \text{ ja } |f^{-1}\{i\}| = j_i \text{ jokaisella } i \in [k]\right\}\right| = \binom{n}{j_1 \cdots j_k}}$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lauseessa esiintyvään joukkoon kuuluvat kuvaukset ovat kaikki surjektioita jos ja vain jos $j_i > 0$ jokaisella $i \in [k]$.

4. Ositusten lukumäärät.

Ryhdymme nyt tarkastelemaan äärellisen joukon ositusten lukumääriä. Olkoon A n–joukko ja olkoon $\mathcal{O}$ joukon A ositus. Koska on olemassa surjektio $A \to \mathcal{O}$, niin Lauseen II 1.3 tuloksesta seuraa, että $|\mathcal{O}| \le n$.

Kun $\mathcal{O}$ on joukon A ositus, niin $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(A)$ eli $\mathcal{O} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$; täten joukolla A on Lauseen II 2.3 nojalla korkeintaan 2^{2^n} ositusta. Tarkastellaan nyt vähän lähemmin äärellisen joukon ositusten lukumäärää. Tarkastelussa voidaan rajoittua joukkoihin $[n]$, $n \in \mathbb{N}$, ja niiden osituksiin. Hyvin pienillä n:n arvoilla voidaan helposti luetella joukon $[n]$ ositukset ja laskea niiden lukumäärä:

n	$[n]$	ositukset	lkm
0	$\emptyset$	$\emptyset$	1
1	$\{1\}$	$\{\{1\}\}$	1
2	$\{1,2\}$	$\{\{1,2\}\}$ $\{\{1\},\{2\}\}$	2
3	$\{1,2,3\}$	$\{\{1,2,3\}\}$ $\{\{1,2\},\{3\}\}$ $\{\{1,3\},\{2\}\}$ $\{\{2,3\},\{1\}\}$ $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$	5

Olkoon n luonnollinen luku. Merkitsemme $\mathbb{O}_n$:llä joukon $[n]$ kaikkien ositusten muodostamaa joukkoa ja merkitsemme $S(n)$:llä lukua $|\mathbb{O}_n|$. Merkitsemme edelleen jokaisella $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{O}_{n,k} = \{\mathcal{O} \in \mathbb{O}_n : |\mathcal{O}| = k\}$ ja $S(n,k) = |\mathbb{O}_{n,k}|$. Kutsumme lukuja $S(n,k)$ *(toisen luokan) Stirlingin luvuiksi.* Jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$ on voimassa $S(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$.

II 4.1 Lause *Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{N}$ on voimassa*

$$\boxed{S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n}$$

Todistus. Merkitään jokaisella $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}$, $F(\mathcal{O}) = \{f \in S([n],[k]) : \mathcal{O}_f = \mathcal{O}\}$. Pannaan merkille, että jokaisella $f \in S([n],[k])$ on voimassa $\mathcal{O}_f \in \mathbb{O}_{n,k}$ ja $f \in F(\mathcal{O}_f)$. Edellisen nojalla pätee, että $\bigcup_{\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}} F(\mathcal{O}) = S([n],[k])$. Koska joukot $F(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}$, ovat keskenään erillisiä, on voimassa $|S([n],[k])| = \sum_{\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}} |F(\mathcal{O})|$.

Osoitetaan, että jokaisella $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}$ on voimassa $|F(\mathcal{O})| = k!$ Olkoon $\mathcal{O}$ perheen $\mathbb{O}_{n,k}$ jäsen. Merkitään g:llä kanoonista surjektiota $[n] \to \mathcal{O}$. Pannaan merkille, että kun φ on bijektio $\mathcal{O} \to [k]$, niin tällöin kuvaus $f = \varphi \circ g$ on surjektio $[n] \to [k]$ ja on voimassa

$$\mathcal{O}_f = \{f^{-1}\{i\} : i \in [k]\} = \{g^{-1}\left(\varphi^{-1}\{i\}\right) : i \in [k]\} = \{g^{-1}\{O\} : O \in \mathcal{O}\} = \mathcal{O}.$$

Edellisen nojalla muotoa $\varphi \circ g$, missä $\varphi \in B(\mathcal{O},[k])$, olevat kuvaukset kuuluvat joukkoon $F(\mathcal{O})$; osoitetaan, että kaikki joukon $F(\mathcal{O})$ kuvaukset voidaan esittää tässä muodossa. Olkoon f joukon $F(\mathcal{O})$ alkio. Merkitään ψ:llä relaatiota $f \circ g^{-1} \subset [k] \times \mathcal{O}$. Relaatio ψ on kuvaus $\mathcal{O} \to [k]$, sillä jokaisella $O \in \mathcal{O}$ on voimassa $\psi\{O\} = f\left(g^{-1}\{O\}\right) = f(O)$ ja joukossa $f(O)$ on täsmälleen yksi alkio, koska $O \in \mathcal{O} = \mathcal{O}_f$. Kuvauksen f surjektiivisuudesta seuraa, että kuvaus ψ on surjektio ja tästä seuraa Lauseen II 1.3 nojalla, että ψ on bijektio. Lisäksi on voimassa $\psi \circ g = f$, sillä jokaisella $j \in [n]$ on voimassa $\psi(g\{j\}) = f(g^{-1}(g\{j\})) \supset f\{j\}$ ja täten $\psi(g(j)) = f(j)$. On osoitettu, että $F(\mathcal{O}) = \{\varphi \circ g : \varphi \in B(\mathcal{O},[k])\}$. Kuvaus $\varphi \mapsto \varphi \circ g$ on bijektio $B(\mathcal{O},[k]) \to F(\mathcal{O})$, sillä jos φ ja ψ ovat sellaisia joukon $B(\mathcal{O},[k])$ alkioita, että $\varphi \circ g = \psi \circ g$, niin tällöin on voimassa $\varphi \circ (g \circ g^{-1}) = \psi \circ (g \circ g^{-1})$ ja tästä seuraa, että $\varphi = \psi$, koska $g \circ g^{-1}$ on joukon $\mathcal{O}$ identtinen kuvaus. Edellisen nojalla on voimassa $|F(\mathcal{O})| = |B(\mathcal{O},[k])|$ ja tästä seuraa Korollaarin II 3.9 nojalla, että $|F(\mathcal{O})| = k!$

Edellä esitetyn nojalla on voimassa

$$|S([n],[k])| = \sum_{\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}} |F(\mathcal{O})| = \sum_{\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}} k! = k!\,|\mathbb{O}_{n,k}|$$

ja tästä seuraa lauseen tulos Lauseen II 3.13 nojalla. □

Korollaari *Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa*

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\,.$$

Käytännössä lukuja $S(n,k)$ on hankala laskea Lauseen II 4.1 antaman lausekkeen avulla. Pienillä n:n arvoilla nämä luvut voidaan helposti määrätä seuraavan rekursioyhtälön avulla.

II 4.2 Lause *Jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$ on voimassa $S(n,1) = S(n,n) = 1$ ja jokaisella $1 < k < n$ on voimassa*

$$\boxed{S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\cdot S(n-1,k)\,.}$$

Todistus. Nähdään helposti, että $\mathbb{O}_{n,1} = \{\{[n]\}\}$ ja $\mathbb{O}_{n,n} = \{\{\{i\} : i \in [n]\}\}$. Täten $S(n,1) = S(n,n) = 1$.

Olkoon k luonnollinen luku $1 < k < n$. Merkitään $\mathbb{O} = \{\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k} : \{n\} \in \mathcal{O}\}$ ja $\mathbb{P} = \mathbb{O}_{n,k} \setminus \mathbb{O}$. Lauseen todistamiseksi osoitetaan, että $|\mathbb{O}| = |\mathbb{O}_{n-1,k-1}|$ ja $|\mathbb{P}| = k\cdot|\mathbb{O}_{n-1,k}|$.

Jokaisella $\mathcal{Q} \in \mathbb{O}$, perhe $\mathcal{Q} \setminus \{\{n\}\}$ on joukon $[n-1] = [n] \setminus \{n\}$ $k-1$-osainen ositus. Määritellään kuvaus $f : \mathbb{O} \to \mathbb{O}_{n-1,k-1}$ asettamalla jokaisella $\mathcal{Q} \in \mathbb{O}$, $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} \setminus \{\{n\}\}$ ja määritellään kuvaus $g : \mathbb{O}_{n-1,k-1} \to \mathbb{O}$ asettamalla jokaisella $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n-1,k-1}$ $g(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \cup \{\{n\}\}$. Tällöin jokaisella $\mathcal{Q} \in \mathbb{O}$ on voimassa $g(f(\mathcal{Q})) = \mathcal{Q}$ ja jokaisella $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n-1,k-1}$ on voimassa $f(g(\mathcal{O})) = \mathcal{O}$. Täten kuvaukset f ja g ovat toistensa käänteiskuvauksia ja näin ollen ne ovat bijektioita. Koska on olemassa bijektio $\mathbb{O} \to \mathbb{O}_{n-1,k-1}$, on voimassa $|\mathbb{O}| = |\mathbb{O}_{n-1,k-1}|$.

Määritellään kuvaus $h : \mathbb{P} \to \mathbb{O}_{n-1,k}$ asettamalla $h(\mathcal{R}) = \{R \setminus \{n\} : R \in \mathcal{R}\}$ jokaisella $\mathcal{R} \in \mathbb{P}$. Jokaisella $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n-1,k}$ on voimassa

$$h^{-1}\{\mathcal{O}\} = \{(\mathcal{O} \setminus \{O\}) \cup \{O \cup \{n\}\} : O \in \mathcal{O}\}$$

ja näin ollen $\left|h^{-1}\{\mathcal{O}\}\right| = |\mathcal{O}| = k$. Koska $\mathbb{P} = \bigcup\{h^{-1}\{\mathcal{O}\} : \mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n-1,k}\}$ ja koska $(h^{-1}\{\mathcal{O}\}) \cap (h^{-1}\{\mathcal{U}\}) = \emptyset$ kun $\mathcal{O} \neq \mathcal{U}$, on Korollaarin I 3.16 nojalla voimassa

$$|\mathbb{P}| = \sum\{\left|h^{-1}\{\mathcal{O}\}\right| : \mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k-1}\} = \sum\{k : \mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k-1}\} = k\cdot|\mathbb{O}_{n-1,k}|\,. \qquad \square$$

Laskemme nyt yllä olevan tuloksen nojalla lukuja $S(n,k)$ ja $S(n)$ eräille pienille n:n arvoille. Voimme kätevästi taulukoida luvut $S(n,k)$ nk. *Stirlingin kolmioon*, missä rivillä n kohdalla k oleva luku on edellisellä rivillä kohdalla $k-1$ olevan luvun ja k:lla kerrotun kohdalla k olevan luvun summa (kun $1 < k < n$).

n														$S(n)$
1							1							1
2						1		1						2
3					1		3		1					5
4				1		7		6		1				15
5			1		15		25		10		1			52
6		1		31		90		65		15		1		203
7	1		63		301		350		140		21		1	877

5. Valinnat ja sijoittelut.

Edellä laskimme koon eli alkioiden lukumäärän eräille äärellisille joukoille, kuten annetun äärellisen joukon kaikkien osajoukkojen muodostamalle joukolle ja kahden annetun äärellisen joukon välisten kuvausten muodostamalle joukolle. Edellä tarkastellut lukumääräongelmat ovat kaikkein yksinkertaisimpia klassillisen "kombinatoriikan" käsittelemistä ongelmista. Kombinatoriikka kehittyi paljolti yht'aikaa klassillisen todennäköisyyslaskennan kanssa ja tästä yhteydestä johtuen kombinatoriikan käsitteitä ilmaistaan usein havainnollisin termein, jotka eivät suoraan liity joukko–oppiin: puhutaan esimerkiksi "n:n alkion k–kombinaatioista" kun tarkoitetaan n–joukon k–osajoukkoja ja kuvausten asemasta puhutaan "sijoitteluista" tai vaikkapa "valinnoista takaisinpanolla" ; bijektioita $X \to X$ kutsutaan joukon X "permutaatioiksi" , jne.

Esittelemme tässä luvussa hieman klassillista kombinatorista terminologiaa, jotta voimme ilmaista tarkasteltavia lukumääräongelmia. Käytetyn havainnollisen terminologian johdosta myös "valintoja", "sijoitteluita" yms. koskevien tulosten todistukset esitetään usein havainnollisessa muodossa. Annamme seuraavassa muutamia esimerkkejä tällaisista havainnollisista "todistuksista" ja pyydämme lukijaa olemaan erityisen tarkkaavainen näiden kohdalla, sillä vaikka tällaiset "todistukset" ovatkin helppolukuisia, on niiden yhteydessä myös paljon helpompi tehdä virheitä kuin tavallisen, formaalisen todistuksen yhteydessä.

Eräitä edellä tarkasteltuja lukumääräongelmia voidaan esittää nk *valintoihin* liittyvinä ongelmina. Perusongelma on seuraava:

Ongelma. Olkoon X n–joukko. Kuinka monella tavalla voidaan joukon X alkioiden joukosta valita k alkiota?

Ongelman yhteydessä voidaan erottaa kaksi eri tapausta: jos valintajärjestys otetaan huomioon, jolloin valinta määrää X:n k:n eri alkion muodostaman jonon $(x_1, ..., x_k)$, niin puhutaan joukon X *k–permutaatiosta*. Jos taas valintajärjestyksellä ei ole merkitystä, jolloin siis valitaan X:n k–osajoukko $\{x_1, ..., x_k\}$, niin puhutaan joukon X *k–kombinaatiosta*.

Laskemme nyt n–joukon X k–permutaatioiden ja k–kombinaatioiden lukumäärät Luvun II 3 tulosten avulla.

Joukon X k–permutaatio $(x_1, ..., x_k)$ samaistuu luonnollisesti injektioon $j \mapsto x_j$ joukolta $[k]$ joukkoon X; kaikkien tällaisten injektioiden lukumäärä on Lauseen II 3.12 nojalla $\frac{n!}{(n-k)!}$ ja tämä on siis n–joukon X k–permutaatioiden lukumäärä. Mikäli on voimassa $k = n$, niin voimme esittää joukon X muodossa $\{a_1, ..., a_k\}$ ja tällöin jokainen joukon X k–permutaatio $(x_1, ..., x_k)$ voidaan samaistaa bijektioon $\varphi : X \to X$, missä $\varphi(a_i) = x_i$; täten n–permutaatio määrää joukon X *permutaation*; näiden lukumäärä on sama kuin joukon $B(X, X)$ koko eli $n!$

Koska X:n k–kombinaatiot vastaavat X:n k–osajoukkoja, niin k–kombinaatioiden lukumäärä on sama kuin joukkoperheen $\mathcal{P}_k[n]$ koko eli $\binom{n}{k}$.

Esimerkki Joukon X permutaatiota kutsutaan toisinaan X:n *järjestelyksi*. Kuten edellä todettiin, n–joukolla X on $n!$ järjestelyä; lasketaan nyt, kuinka moni näistä järjestelyistä on *epäjärjestely* eli sellainen järjestely, jossa jokainen alkio vaihtaa paikkaa.

Ratkaisu. Epäjärjestelyt vastaavat niitä joukon X bijektioita itselleen, joissa mikään X:n alkio ei kuvaudu itselleen. Merkitsemme jokaisella $x \in X$ $A_x = \{f \in B(X, X) : f(x) = x\}$; tällöin epäjärjestelyt vastaavat joukkoa $B(X, X) \setminus \bigcup_{x \in X} A_x$. Laskemme

epäjärjestelyjen lukumäärän laskemalla yhdistysjoukon $\bigcup_{x\in X} A_x$ koon summa– ja erotusperiaatteen avulla.

Jokaisella $Z \subset X$ on voimassa

$$\bigcap_{z\in Z} A_z = \{f \in B(X, X) : f(z) = z \text{ jokaisella } z \in Z\} ;$$

oikeanpuoleisen joukon alkiot voidaan luonnollisella tavalla (kuvauksen $f \mapsto f|(X \setminus Z)$ välityksellä) samaistaa joukon $X \setminus Z$ permutaatioihin, joten oikeanpuoleisen joukon koko on $|B(X \setminus Z, X \setminus Z)$ eli $|X \setminus Z|!$; jos siis Z on X:n k–osajoukko, niin on voimassa $|\bigcap_{z\in Z} A_z| = (n-k)!$ Summa– ja erotusperiaate antaa seuraavan yhtälön:

$$\left|\bigcup_{x\in X} A_x\right| = \sum_{\emptyset\neq Z\subset X} (-1)^{|Z|+1} \left|\bigcap_{z\in Z} A_z\right| .$$

Jokaiselle X:n k–osajoukolle Z on voimassa $|Z|+1 = k+1$ ja, kuten edellä totesimme, $\left|\bigcap_{z\in Z} A_z\right| = (n-k)!$ Koska X:n k–osajoukkojen lukumäärä $\binom{n}{k}$ on Lauseen II 3.9 nojalla $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, niin edellisen nojalla saadaan seuraava yhtälöketju:

$$\left|\bigcup_{x\in X} A_x\right| = \sum_{\emptyset\neq Z\subset X} (-1)^{|Z|+1} \left|\bigcap_{z\in Z} A_z\right| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} (n-k)! =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! = -n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} .$$

Edellä osoitetun nojalla on voimassa

$$|B(X, X) \setminus \bigcup_{x\in X} A_x| = n! - |\bigcup_{x\in X} A_x| = n! + n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} ;$$

täten joukon X kaikkien epäjärjestelyjen lukumäärä on $n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$. □

Huomautus. Jos n–joukon kaikkien epäjärjestelyjen lukumäärä jaetaan joukon kaikkien järjestelyjen lukumäärällä eli luvulla $n!$, niin saadaan luku $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$, joka ilmaisee *todennäköisyyden* sille, että umpimähkään valittu n–joukon järjestely olisi epäjärjestely. (Differentiaalilaskentaa tunteva lukija voi tunnistaa lausekkeessa $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$ luvun e^{-1} sarjakehitelmän alkuosan. Kun n kasvaa rajatta, niin lausekkeen $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$ arvo lähenee lukua $e^{-1} \sim 0,3678794$).

Esimerkki Jokainen pikkujoulujuhliin osallistuja tuo mukanaan lahjapaketin. Paketit pannaan koriin, josta jokaiselle juhlijalle annetaan lahja. Mikä on todennäköisyys sille, ettei kukaan juhlija saa takaisin tuomaansa lahjaa, kun juhlijoiden lukumäärä on (a) 10 ja (b) 100.

Ratkaisu. Sijoitamme yllä johdettuun todennäköisyyden lausekkeeseen $n = 10$ ja $n = 100$ ja laskemme summalausekkeiden arvot. Täten saamme tapauksessa (a) todennäköisyydeksi noin $0,36787946$ ja tapauksessa (b) noin $0,36787944$. Kuten huomaamme, todennäköisyydet lähenevät n:n kasvaessa hyvin nopeasti raja–arvoa e^{-1}. □

Edellä tarkasteltujen "yksinkertaisten" valintojen lisäksi voidaan tarkastella "toistollisia" valintoja (todennäköisyyslaskennassa puhutaan usein "valinnoista takaisinpanolla" kun tarkoitetaan valintoja, joissa joku alkio voidaan valita useamman kuin yhden kerran). Esimerkiksi seuraavassa on eräs tyypillinen ongelma, jota voidaan kuvata toistollisena valintana: on annettuna kaksi valkoista ja neljä mustaa palloa ja näiden joukosta on valittava kolme palloa; kuinka monella eri tavalla voidaan valinta tehdä? Tässä tehtävässä oletetaan, että valkoiset pallot eivät erotu toisistaan eivätkä mustat pallot erotu toisistaan; täten annettu valinta kuuden pallon joukosta voidaan myös tulkita "toistollisena" valintana kahden pallon (valkoinen ja musta) joukosta, missä yksi pallo (valkoinen) voidaan valita 0,1 tai 2 kertaa ja toinen pallo (musta) voidaan valita 0,1,2,3 tai 4 kertaa.

Perusongelma toistollisten valintojen yhteydessä on seuraava:

Ongelma. Olkoon X n–joukko. Kuinka monella tavalla voidaan joukon X alkioiden joukosta valita k alkiota, kun jokaiselle X:n alkiolle x on annettu *toistolukujen* joukko $T_x \subset \mathbb{N}$ ja vaaditaan, että kukin alkio x tulee valituksi täsmälleen t kertaa jollain $t \in T_x$?

Tämänkin ongelman yhteydessä voidaan erottaa kaksi eri tapausta sen mukaan, otetaanko valintajärjestys huomioon vai ei:

Jos järjestys huomioidaan, niin valittavaksi tulee sellainen X:n alkioiden muodostama k–jono $(z_1, ..., z_k)$, että jokaisen joukon X alkion x esiintymiskertojen lukumäärä $|\{i \in [k] : z_i = x\}|$ kyseisessä jonossa kuuluu lukujoukkoon T_x; tällaista jonoa kutsunaan toisinaan *toistolukuihin* T_x, $x \in X$, *liittyväksi joukon* X *toistolliseksi* k*–permutaatioksi.*

Esimerkki Eräissä tilanteissa puhutaan "joukon X alkioiden muodostamien k–jonojen" asemasta "aakkoston X avulla muodostetuista k–sanoista". Tarkastellaan nyt seuraavaa ongelmaa:

Ongelma. Kuinka monta sellaista 5–sanaa voidaan muodostaa aakkoston $\{a, m, n, s, t\}$ avulla, joissa kirjain a esiintyy kaksi tai kolme kertaa ja kukin muu kirjain korkeintaan kerran?

Ratkaisu. Esimerkiksi "mataa", "maata" , "ansat" ja "asatm" ovat vaaditun kaltaisia sanoja. Kaikkien tällaisten sanojen laskemiseksi voimme ajatella sanat muodostetuiksi seuraavalla tavalla: ensin on valittu joukon [5] 2–kombinaatio tai 3–kombinaatio A, jonka alkioita vastaaville 5–sanan kohdille on sijoitettu a–kirjaimet; tämän jälkeen on valittu joukon $\{m, n, s, t\}$ 3–permutaatio (xyz) (jos $|A| = 3$) tai 2–permutaatio (xy) (jos $|A| = 3$); kyseisen permutaation jäsenet on sijoitettu 5–sanaan permutaation ilmaisemassa järjestyksessä joukon $[5] \setminus A$ alkioiden määräämille paikoille. Koska joukolla [5] on $\binom{5}{2} = 10$ 2–kombinaatiota ja $\binom{5}{3} = 10$ 3–kombinaatiota ja joukolla $\{m, n, s, t\}$ on $\frac{5!}{2!} = 60$ 3–permutaatiota ja $\frac{5!}{3!} = 20$ 2–permutaatiota, niin vaaditun kaltaisia sanoja on $10 \cdot 60 + 10 \cdot 20 = 800$ kappaletta. □

Mikäli valintajärjestyksellä ei ole merkitystä, jolloin siis valitaan X:n "toistollinen" k–osajoukko $\{z_1, ..., z_k\}$, niin puhutaan joukon X *toistollisesta* k*–kombinaatiosta*; tässä "toistollisen osajoukon" käsite ei valitettavasti ole hyvin määritelty (palautetaan mieliin, että "joukko on alkioidensa määräämä kokonaisuus"; joukko ei näin ollen ole riippuvainen siitä, miten sen alkiot on lueteltu; esimerkiksi $\{0, 1, 2\} = \{1, 2, 0\} = \{1, 1, 0, 0, 0, 2\}$). Asiaintilan korjaamiseksi sovimme, että joukon X alkioiden muodostama "toistollinen k–joukko" eli "k–monijoukko" on sellainen kuvaus $f : X \to \mathbb{N}$, että $\Sigma_{x\in X} f(x) = k$. Näin määriteltynä toistolukuihin T_x, $x \in X$, liittyvä joukon X toistollinen k–kombinaatio on sellainen k–monijoukko $f : X \to \mathbb{N}$, että $f(x) \in T_x$ jokaisella $x \in X$.

Esimerkki Annettuihin toistolukuihin T_x, $x \in X$, liittyvät joukon X alkioiden muodostamat toistolliset k–kombinaatiot vastaavat yksinkertaisia k-kombinaatioita eli X:n k–osajoukkoja siinä tapauksessa, että jokaisella $x \in X$ on voimassa $T_x \subset \{0, 1\}$. Usein esiintyy myös tilanne, jossa jollekin alkiolle $x \in X$ on voimassa $T_x = \mathbb{N}$; tässä tilanteessa sanotaan alkiolla x olevan *rajoittamattomat toistoluvut.* Tarkastelemme seuraavaa ongelmaa:

Kuinka monta toistollista 2–kombinaatiota on 3–joukolla kun kaikkien alkioiden toistoluvut ovat rajoittamattomat?

Ratkaisu. Olkoon kyseinen 3–joukko vaikkapa $\{a, b, c\}$. Halutaan siis löytää lukumäärä kaikille alkioiden a, b ja c muodostamille 2–monijoukoille; lukija voi helposti todeta, että seuraavassa on lueteltu kaikki tällaiset monijoukot, joita on siis kuusi kappaletta:

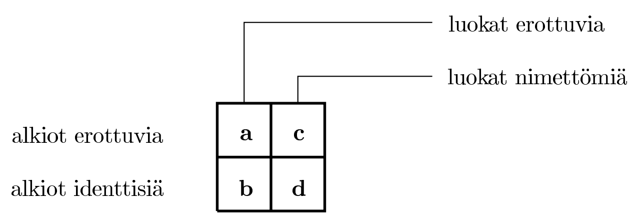
$$\{(a,2),(b,0),(c,0)\} \quad \{(a,1),(b,1),(c,0)\} \quad \{(a,1),(b,0),(c,1)\}$$
$$\{(a,0),(b,2),(c,0)\} \quad \{(a,0),(b,1),(c,1)\} \quad \{(a,0),(b,0),(c,2)\} \qquad \square$$

Palaamme hetken päästä edelliseen ongelmaan ja osoitamme, miten rajoittamattomiin toistolukuihin liittyvien n:n alkion muodostamien toistollisten k–kombinaatioiden lukumäärä voidaan laskea samaistamalla kyseisenlaiset toistolliset kombinaatiot erään $n + k - 1$–alkioisen joukon yksinkertaisiin k–kombinaatioihin.

Monia kombinatorisia ongelmia voidaan kuvata nk. *sijoitteluihin* liittyvinä ongelmina. Perusongelma on seuraavanlainen:

Ongelma. Olkoon X n–joukko ("pallojen" joukko) ja olkoon Y m–joukko ("laatikoiden" joukko). Kuinka monella tavalla voidaan alkiot $x \in X$ sijoittaa luokkiin $y \in Y$?

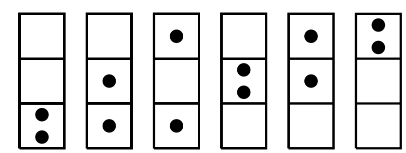
Tämä ongelma jakautuu eri tapauksiin sen mukaisesti, ovatko tarkastellut "pallot" ja "laatikot" toisistaan erottuvia vai ei: voisimme esimerkiksi kysyä monellako tavalla kolme valkoista palloa ja kaksi mustaa palloa voidaan sijoittaa kahteen punaiseen laatikkoon ja kahteen siniseen laatikkoon, kun samanvärisiä palloja ei voi erottaa toisistaan eikä samanvärisiä laatikoita voi erottaa toisistaan. Yksinkertaisimmillaan ongelma jakautuu neljään eri tapaukseen:



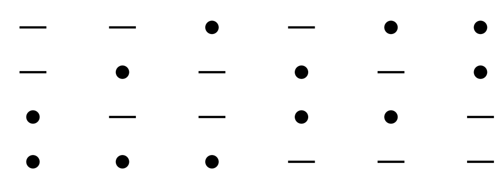
(a) Jos sekä alkiot että luokat erottuvat toisistaan, niin sijoittelu $x \mapsto y$ vastaa kuvausta $X \to Y$; näiden lukumäärä on Lauseen II 3.11 nojalla m^n.

(b) Jos alkiot ovat keskenään samanlaisia, mutta luokat erotellaan, niin riittää tietää luokkaan y sijoitettujen alkioiden lukumäärä $f(y) \geq 0$ jokaisella $y \in Y$. Toisin sanoen, sijoittelu voidaan samaistaa monijoukkona $f : Y \to \mathbb{N}$ esitettyyn joukon Y toistolliseen n–kombinaatioon (josta käytetään tässä yhteydessä usein nimitystä *joukon Y n–jakauma*).

Esimerkki Olkoon $n = 2$ ja $m = 3$. Tällöin m–joukolla on 6 n–jakaumaa (vertaa edelliseen esimerkkiin):



Huomaamme, että tämä sijoittelutilanne voidaan myös kuvata yksinkertaisena valintatilanteena: muodostetaan 4–jonoja valitsemalla ensin joukosta [4] kaksi alkiota ja sijoittamalla näiden määräämille paikoille pallot ja sijoittamalla kahteen jäljellejäävään paikkaan väliseinät:



Kun tulkitsemme sijoittelun valinnaksi, saamme jakaumien lukumääräksi $\binom{4}{2} = 6$ eli saman tuloksen kuin edellä. Vastaavalla päättelyllä lukija voi harjoitustehtävänä osoittaa, että yleisessä tapauksessa pätee seuraava tulos:

$$\boxed{m\text{–joukolla on } \binom{n+m-1}{n} \; n\text{–jakaumaa.}}$$

(c) Oletamme seuraavaksi, että X:n alkiot erottuvat toisistaan, mutta luokkia ei nimetä. Jos jokaiseen luokkaan tulee ainakin yksi alkio, niin sijoittelu vastaa joukon X k*–ositusta*. Ositusten lukumääriä on laskettu Luvussa II 4.

(d) Viimeiseksi tarkastelemme tapausta, jossa alkiot ovat identtisiä eivätkä luokatkaan erotu toisistaan. Jos vaadimme, että kuhunkin luokkaan tulee alkioita, niin sijoittelu vastaa luvun n k*–partitiota* eli esitystä

$$n = n_1 + \cdots + n_k \quad (n_i > 0 \text{ jokaisella } i)\ ,$$

missä summan termien järjestyksellä ei ole merkitystä. Voisimme antaa täsmällisemmän määritelmän "esitykselle" vaikkapa monijoukkojen avulla ja sanoa, että luvun n k–partitio on sellainen positiivisten luonnollisten lukujen $a \in A$ muodostama k–monijoukko $f : A \to \mathbb{N}$, että $n = \Sigma_{a\in A} f(a) \cdot a$. Tällöin luvun k–partitiot olisivat siis luonnollisten lukujen toistollisia k–kombinaatioita. Jos haluaisimme esittää toistolliset k–kombinaatiot monijoukkojen asemasta toistollisten k–permutaatioiden ekvivalenssiluokkina, niin voisimme yksinkertaistaa esitystä valitsemalla luonnollisten lukujen järjestystä hyväksi käyttäen yhden edustajan kustakin ekvivalenssiluokasta. Selvästikin kussakin ekvivalenssiluokassa on yksi ja vain yksi sellainen jono $(n_1, ..., n_k)$, että $n_i \leq n_{i+1}$ jokaisella $i < k$. Voisimme siis määritellä luvun n k–partition sellaisena positiivisten luonnollisten lukujen muodostamana jonona $(n_1, ... n_k)$, jolla $n = \Sigma_{i=1}^k n_i$ ja jokaisella $i < k$ on voimassa $n_i \leq n_{i+1}$. Kun nyt olemme todenneet, että partitiot voidaan useammallakin tavalla määritellä täsmällisesti, niin voimme palata käyttämään niille luonnollista "esitystä" summalausekkeina.

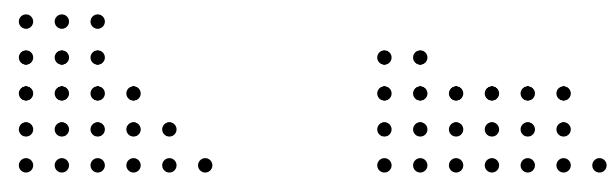
Esimerkki Luvulla $n = 5$ on seitsemän eri partitiota:

$$5 = 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1\ .$$

Partitioiden lukumääriin liittyvät ongelmat ovat usein hyvin vaikeita, mutta niiden ratkaisemisessa voidaan joissain tilanteissa käyttää apuna nk. generoivia funktioita. Tässä tarkastelemme lyhyesti erästä yksinkertaista menetelmää, nk. Ferrerin kuvioita, joiden avulla voidaan johtaa eräitä partitioiden lukumääriä koskevia identiteettejä.

Ferrerin kuvio koostuu äärellisen monesta päällekkäisiin riveihin sijoitellusta äärellisestä pistejonosta. Jonot alkavat samalta kohdalta ja lisäksi vaaditaan, että ylempänä olevassa rivissä on korkeintaan yhtä monta pistettä kuin alempana olevassa.

Jos Ferrerin kuvio koostuu n:stä pisteestä, niin kuvio esittää sitä luvun n partitiota $n = n_1 + \cdots + n_k$, missä n_i on $k - i$:nnellä rivillä olevien pisteiden lukumäärä. Esimerkiksi luvun 21 partitioita $21 = 3+3+4+5+6$ ja $21 = 2+6+6+7$ vastaavat alle piirretyt Ferrerin kuviot.

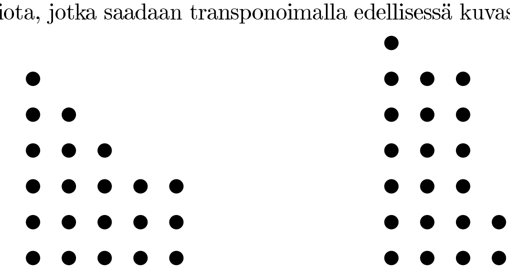


Ferrerin kuvioiden avulla voimme todistaa eräitä mielenkiintoisia partitioiden lukumääriä koskevia tuloksia. Merkitsemme $p_k(n)$:llä kaikkien luvun n k–partioiden lukumäärää kun $0 \leq k \leq n$; muille n:n ja k:n arvoille asetamme $p_k(n) = 0$.

(i) Jos poistamme luvun n annetun k–partition Ferrerin kuviosta vasemmanpuolimmaisen pystyrivin, niin jäljelle jää Ferrerin kuvio, joka kuvaa erästä luvun $n - k$ partitiota korkeintaan k:hon osaan. Täten päädymme seuraavaan *palautuskaavaan*

$$\boxed{p_k(n) = p_1(n-k) + \cdots + p_k(n-k)}$$

(ii) Jokaisen Ferrerin kuvion *transponoitu kuvio*, (eli se kuvio jonka i:nnen rivin j:nnellä paikalla on piste täsmälleen silloin kun alkuperäisessä kuviossa on piste j:nnen rivin i:nnellä paikalla) on Ferrerin kuvio. Seuraava kuva esittää kahta Ferrerin kuviota, jotka saadaan transponoimalla edellisessä kuvassa esitetyt kuviot.



Tarkastelemalla transponoituja kuvioita, näemme seuraavien tulosten olevan voimassa:

Luvun n k–partitioiden lukumäärä $p_k(n)$ on sama kuin niiden n:n partitioiden lukumäärä, joissa esiintyy k suurimpana lukuna.

Luvulla n on yhtä monta partitiota parillisen (parittoman) moneen osaan kuin sellaista partitiota, joissa esiintyvä suurin luku on parillinen (pariton).

Harjoitustehtäviä Lukuun II

1. Olkoon A joukko, jossa on kuusi lukua väliltä $[1,9]$. Osoitettava, että on olemassa A:n luvut x ja y, joiden summa on 10. Voidaanko vaatia, että $x \neq y$?

2. Valitaan joukosta $[100] = \{1,2,3,\cdots,99,100\}$ umpimähkään 56 (eri) lukua. Näytä, että joukossa on kaksi lukua, joiden erotus on 11.

3. Neliönmuotoisen puutarhan laidan pituus on 21 metriä. Montako omenapuuta sinne voidaan istuttaa, kun istutuskohdat eivät saa olla alle kymmenen päässä toisistaan?

   Seuraavassa kolmessa tehtävässä oletamme, että lottoarvonnassa käytettävät, numeroilla 1,2,...,39 merkityt pallot, on asetettu renkaaksi jossain mielivaltaisessa järjestyksessä. Kussakin tehtävässä pitää esitetty väite osoittaa todeksi.

4. Renkaassa on kaksi vierekkäistä paritonnumeroista palloa.

5. Renkaassa on kolme vierekkäistä palloa, joista täsmälleen yksi on paritonnumeroinen.

   [Ohje: tarkastele ensin tapaus, jossa löytyy vierekkäiset parillisnumeroiset pallot.]

6. Renkaassa on kolme vierekkäistä palloa, joiden numeroiden summa on suurempi kuin 60.

   [Ohje: edellisen tehtävän tulos, laatikkoperiaate ja yhtälö $1+2+\cdots+39 = 13\cdot 60$.]

   Edelliseen tehtävään liittyen voimme panna merkille, että lottopallot voidaan jakaa kolmen ryhmiin siten, että kuhunkin ryhmään kuuluvien pallojen numeroiden summa on tasan 60; esim. $\{2,19,39\}$, $\{6,17,37\}$, $\{10,15,35\}$, $\{14,13,33\}$, $\{18,11,31\}$, $\{22,9,29\}$, $\{26,7,27\}$, $\{30,5,25\}$, $\{34,3,23\}$, $\{38,1,21\}$, $\{8,16,36\}$, $\{12,20,28\}$, $\{4,24,32\}$.

7. Osoita, että on olemassa joukon $[2n]$ n-alkioinen osajoukko X, jonka mikään alkio ei ole jaollinen toisella alkiolla.

8. Olkoon joukolle $X \subset [2n]$ voimassa $|X| > n$. Osoita, että joukossa X on kaksi lukua, joista toinen on toisella jaollinen.

   [Ohje: esitä luvut $m \in X$ muodossa $m = 2^r \cdot k$, missä k on pariton.]

9. Kuinka moni luvuista $1, 2, \ldots, 300$ on jaollinen ainakin yhdellä luvuista $3, 5$ ja 7?

10. Kuinka moni luku joukossa [1000] on jaollinen 5:llä tai 8:lla muttei 6:lla.

11. Kuinka moni joukon [10000] luvuista ei ole jaollinen yhdelläkään luvuista 4,5 ja 6?

12. Kuinka monella luvuista 1,2,3,...,919,920 ei ole (ykköstä suurempaa) yhteistä tekijää luvun 105 kanssa?

13. Kuinka monella luvuista 1,2,3,...,999 ei ole (ykköstä suurempaa) yhteistä tekijää luvun 390 kanssa?

14. Luonnolliset luvut k ja n ovat *keskenään jaottomat*, mikäli k:n ja n:n suurin yhteinen tekijä on 1. *Eulerin ϕ-funktio* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ määritellään asettamalla jokaisella $n \in \mathbb{N}$

    $$\phi(n) = |\{k \in [n] : k \text{ ja } n \text{ ovat keskenään jaottomat}\}| \ .$$

    Laske summa- ja erotusperiaatteen avulla luku $\phi(910)$.

15. Laske summa- ja erotusperiaatteen avulla lukua 250 pienempien alkulukujen lukumäärä.

    (Huom: 1 *ei* ole alkuluku.)

    [Ohje: laske niiden luonnollisten lukujen $1 < n \leq 250$ lukumäärä, jotka eivät ole alkulukuja; pane merkille, että tällaisella luvulla n on alkulukutekijä, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin $\sqrt{n} \leq \sqrt{250} < 16$.]

16. Olkoon X äärellinen joukko, $A \subseteq X$, ja $\mathcal{P}_A(X) = \{B \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}$. Mikä on joukon $\mathcal{P}_A(X)$ alkioiden lukumäärä?

17. Kuinka monessa viisinumeroisessa puhelinnumerossa esiintyy joku numero $(0,\ldots,9)$ ainakin kahdesti?

18. Kuinka monessa viisinumeroisessa puhelinnumerossa esiintyy joku numero $(0,\ldots,9)$ ainakin kahdesti ja vierekkäin.

19. Montako sellaista sanaa voidaan muodostaa kirjaimista *a, k* ja *l* joissa *k* ja *l* esiintyvät kaksi kertaa ja *a* kolme kertaa, mutta minkään kirjaimen kaikki esiintymät eivät ole vierekkäin? (Siis esim. *kalalak* kelpaa, mutta *lakkala* ei.)

20. Montako viisikirjaimista sanaa voidaan muodostaa kirjaimilla *a,k,l,m,o,p* ja *u* kun vaaditaan, että sanassa ei saa esiintyä mitään vierekkäisten kirjainten jonoa *oka, loma, lapa, apu, ala* tai *olo*? (Siis esim. *kallo* kelpaa, mutta *koala* ei.)

21. Näytä, että

    $$\binom{s-1}{0} + \binom{s}{1} + \ldots + \binom{s+n-2}{n-1} + \binom{s+n-1}{n} = \binom{s+n}{n},$$

kun s ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. (Ohje: Pascalin identiteetti.)

22. Laske niiden luonnollisten lukujen muodostamien n-jonojen $(x_1, \ldots, x_n)$ lukumäärä, joille pätee
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$
(n ja r ovat luonnollisia lukuja). Laske tämän perusteella, kuinka monen positiivisen kokonaislukukolmikon (k_1, k_2, k_3) läpi avaruuden R^3 taso $x + y + z = r$ kulkee.

23. Laske termin X^3 kerroin polynomissa
$$(3 + 4X)^6.$$

24. Osoita käyttämättä kaavaa $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, että
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$
kun $0 \le k \le n$. (Ohje: Muodosta vastaavien osajoukkoperheiden välille bijektio.)

25. Olkoot n, k positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

26. Osoita, että
$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$
[Tulkinta: Valitaan joukon $[n]$ r-osajoukko, ja siitä k-osajoukko. Tämä vastaa valintoja, joissa ensin valitaan joukon $[n]$ k-osajoukko, ja sitten jäljelle jääneen osan $r-k$-osajoukko.]

27. Johda yhtälö
$$\binom{3n}{3} - 3\binom{n}{3} - 6n\binom{n}{2} = n^3$$
(a) laskemalla.
(b) kombinatorisen päättelyn avulla (käyttämättä lauseketta $\binom{k}{\ell} = \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}$).
[Ohje kohtaan (b): laske kahdella eri tavalla montako mahdollisuutta on valita n:n hevosen, n:n koiran ja n:n kissan joukosta hevonen, koira ja kissa.]

28. Osoita, että jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$ on voimassa
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$
[Ohje: Lemma II 2.2]

29. Olkoon X n–joukko. Näytä, että joukon X kaikkien k–osajoukkojen perheestä voidaan valita $\binom{n-1}{k-1}$:n joukon muodostama osaperhe, johon kuuluvien k–joukkojen parittaiset leikkaukset ovat kaikki epätyhjiä.

30. Olkoon X n–joukko, missä n on parillinen. Näytä, että on olemassa sellainen perheen $\mathcal{P}(X)$ osaperhe Y, että mikään perheen Y joukko ei sisälly toiseen Y:n joukkoon, ja jolle
$$|Y| = \binom{n}{n/2}.$$

31. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa yhtälö $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Esitä yhtälölle kombinatorinen perustelu.
[Ohje: Kirjoita yhtälö ensin muotoon $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.]

32. Laske termin $X^3Y^4Z^2$ kerroin polynomissa
$$(X + Y + Z)^9.$$

33. Osoita, että jos $a + b + c = n$, niin
$$\binom{n}{a,b,c} = \binom{n-1}{a-1,b,c} + \binom{n-1}{a,b-1,c} + \binom{n-1}{a,b,c-1}.$$

34. Näytä, että $\sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$ kaikilla $n > 0$. [Ohje: Lemma II 2.2]

35. Osoita kombinatorisen päättelyn avulla, että luvut $\frac{(2n)!}{2^n}$, $\frac{(3n)!}{6^n}$ ja $\frac{n^2!}{(n!)^{n+1}}$ ovat kokonaislukuja.

36. Osoita, että $\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} S_{n,k} = p^n$, kun $p, n \in \mathbb{N}$.

37. Näytä, että
$$S(n,k) = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} S(r, k-1).$$
[Ohje: Olkoon $\mathcal{H}$ n–joukon X k–ositus. Poistetaan osituksesta $\mathcal{H}$ se jäsen, joka sisältää annetun alkion x. Tällöin saadaan erään joukon X osajoukon Y $(k-1)$–ositus $\mathcal{H}'$, ja $0 \le |Y| < n$.]

38. Osoita, että
$$\sum_{k=1}^{m} S(m,k)n(n-1)\cdots(n-k+1) = n^m.$$

39. Laske niiden surjektioiden $f : [5] \to [4]$ lukumäärä, joilla on voimassa $f(1) = 1$.

40. Olkoon Y n–joukko ja X $n+2$–joukko. Näytä, että kaikkien surjektioiden $X \to Y$ lukumäärä on $\frac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$.

41. Osoita yhtälön $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$ avulla, käyttämättä Lauseen II 4.1 kaavaa, että n-joukon 2-ositusten lukumäärä on $2^{n-1} - 1$ jokaisella $n > 0$.

42. Määritellään ns. *Bellin luvut* B_n asettamalla

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k).$$

Osoita, että,

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

43. Tutki, montako ekvivalenssirelaatiota on nelialkioisessa joukossa.

44. Joukolla $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ on 877 eri ositusta. Kuinka monessa näistä alkiot a ja g ovat eri joukoissa? Entä kuinka monessa alkiot a, d ja g ovat kaikki eri joukoissa?

45. Laske niiden kahdeksanalkioisen joukon ositusten lukumäärä, joissa on parillinen määrä osia.

46. Laske joukon [12] 10-ositusten lukumäärä.

[Ohje: voit esimerkiksi täydentää Stirlingin kolmion "oikeaa laitaa" käyttämällä hyväksi yhtälöitä $S(n,n) = 1$ ja $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.]

47. Kuvaus $\phi : X \to X$ on joukon X *syklinen permutaatio*, mikäli X:llä on sellainen yksinkertainen esitys $X = \{x_1, ..., x_n\}$, että

$$\phi(x_1) = x_2, \phi(x_2) = x_3, \ldots, \phi(x_{i_{n-1}}) = x_{i_n}, \phi(x_{i_n}) = x_{i_1}.$$

Laske n-joukon X kaikkien syklisten permutaatioiden lukumäärä.

48. Merkitse e_n:llä n-joukon kaikkien epäjärjestelyjen lukumäärää ja pane merkille, että $e_0 = 1$, $e_1 = 0$ ja $e_2 = 1$. Näytä kombinatorisella päättelyllä (ja siis käyttämättä lauseketta $e_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$), että jokaisella $n > 2$ on voimassa palautuskaava

$$e_n = (n-1)(e_{n-1} + e_{n-2}) .$$

[Ohje: kiinnitä $i \in [n-1]$ ja mieti, monellako $[n]$:n epäjärjestelyllä ϕ on voimassa $\phi(n) = i$.]

49. Johda kombinatorisella päättelyllä edellisen tehtävän lukuja e_i koskeva yhtälö

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{e_k}{k!(n-k)!} = 1 .$$

50. Olkoon X n-joukko, missä $n > 1$, ja $\mathcal{A} = \{X \setminus \{x\} : x \in X\}$. Monellako eri tavalla voidaan perheen $\mathcal{A}$ joukoille valita erilliset edustajat?

[Vihje: *epäjärjestely*.]

51. Montako eri sanaa voidaan muodostaa sanan SALAISUUS kirjaimista järjestelemällä ne uudelleen?

52. Montako eri sanaa voidaan muodostaa järjestelemällä sanan MATEMATIIKKA kirjaimet uudelleen, kun vaaditaan, ettei sanaan saa tulla kahta A:ta vierekkäin?

[Ohje: järjestä ensin muut kirjaimet jonoon ja sijoita sitten A:t paikoilleen]

53. Montako eri sanaa voidaan muodostaa järjestelemällä sanan KOMBINATORIIKKA kirjaimet uudelleen, kun vaaditaan, ettei sanaan saa tulla kahta samaa kirjainta vierekkäin?

(Siis esimerkiksi TORINABIKOMKIKA kelpaa, mutta MOTORIIKANKABIK ei.)

54. Varastossa on kymmentä eri kirjaa kaksi kappaletta kutakin. Kuinka monella eri tavalla kirjat voidaan jakaa henkilöiden A,B,C ja D kesken kun vaaditaan, ettei kenellekään saa tulla kahta kappaletta samaa kirjaa?

55. Rasiassa on neljä punaista, kolme sinistä, kaksi keltaista ja yksi vihreä pallo. Oletamme, että samanväriset pallot eivät eroitu toisistaan. Monellako eri tavalla voidaan rasiasta valita neljä palloa kun
(a) valintajärjestys huomioidaan?
(b) valintajärjestystä ei oteta huomioon?

56. Monellako tavalla voidaan 5 punaisen, 5 sinisen ja 5 keltaisen pallon joukosta valita 10 palloa kun vaaditaan, että kunkin värisiä palloja on valittava ainakin kaksi kappaletta ja
(a) valintajärjestys huomioidaan;
(b) valintajärjestystä ei huomioida?

57. Lipastossa on neljä laatikkoa päällekkäin. Monellako eri tavalla yhdeksän eriväristä nappia voidaan sijoittaa lipastoon niin, että ylimmässä laatikossa on pariton määrä nappeja ja kussakin muussa laatikossa parillinen määrä? (Huom: Nolla on parillinen.)

58. Määritä luvun 20 14-partitioiden lukumäärä $p_{14}(20)$.

[Ohje: palautuskaava.]

59. Pelissä heitetään yhtä aikaa kuutta keskenään identtistä noppaa. Monellako eri tavalla voidaan heitossa saada pistesummaksi 13?

[Huom: kukin kuudesta nopasta antaa heitossa 1-6 pistettä.]

LUKU III

Suhteikot ja verkot

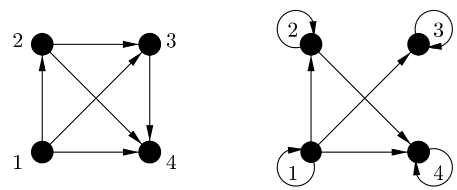
1. Johdanto.

III 1.1 Määritelmä *Suhteikko* on pari $G = (X, R)$, missä X on äärellinen joukko ja R on joukon X relaatio.

Joukon X alkioita kutsutaan suhteikon G *pisteiksi* ja joukkoa R kutsutaan suhteikon G *relaatioksi.*

Kun $G = (X, R)$ on suhteikko, niin joukon X lisäksi myös joukko R on äärellinen, koska $R \subset X \times X$.

Voimme esittää äärellisen joukon $X = \{x_1, ..., x_n\}$ relaation R monella eri tavalla: voimme esimerkiksi luetella kullakin $x \in X$ joukon $R\{x\}$ alkiot tai voimme esittää relaation R $n \times n$– matriisina (a_{ij}), missä $a_{ij} = 1$ kun $(x_i, x_j) \in R$ ja $a_{ij} = 0$ kun $(x_i, x_j) \notin R$. Eräs hyvin havainnollinen esitysmuoto on geometrinen kaavio, missä X:n alkiot esitetään tason pisteinä ja piirretään nuoli alkiota x vastaavasta pisteestä alkiota z vastaavaan pisteeseen silloin kun xRz. Esimerkiksi joukon [4] järjestysrelaation $<$ ja jakorelaation $|$ ($x|z$ kun luku x jakaa luvun z) voimme esittää seuraavasti:



Määrittelemme nyt tähän geometriseen tulkintaan liittyviä käsitteitä ja termejä.

Olkoon X joukko ja x ja z joukon X alkioita. Merkitsemme $\overrightarrow{xz} = \{(z, x)\}$ ja $\overline{xz} = \{(x, z), (z, x)\}$; tällöin on voimassa $\overline{xz} = \overrightarrow{xz} \cup \overrightarrow{zx} = \overline{zx}$. Joukkoa $\overrightarrow{xz}$ kutsumme *nuoleksi* x:stä z:aan; lisäksi sanomme x:n olevan nuolen $\overrightarrow{xz}$ *lähtö* tai sen *alkupiste* ja z:n olevan nuolen $\overrightarrow{xz}$ *maali* tai sen *loppupiste.* Joukkoa $\overline{xz} = \overline{zx}$ kutsumme *x:n ja z:n yhdysviivaksi* tai *x:n ja z:n väliseksi viivaksi* ja sanomme, että x ja z ovat viivan $\overline{xz}$ *päätepisteet* eli *päät.* Joukkoa $\overrightarrow{xx} = \overline{xx}$ kutsumme *silmukaksi* x:ssä.

Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko ja olkoot x ja z G:n pisteitä. Sanomme, että joukko $\overline{xz} \cap R$ on *x:n ja z:n välinen yhteys suhteikossa* G. Otamme lisäksi käyttöön seuraavat sanonnat:

$\overline{xz} \cap R = \emptyset$: "*pisteet x ja z ovat erillään G:ssä*".

$\overrightarrow{xz} \subset R$: "*$G$:ssä on nuoli x:stä z:aan*" tai "*z on x:n seuraaja G:ssä*".

$\overline{xz} \subset R$: "*G:ssä on x:n ja z:n välinen viiva*" tai "*x ja z ovat vierekkäin G:ssä*".

$\overrightarrow{xx} \subset R$: "*$G$:ssä on silmukka pisteessä x*".

Otamme vielä käyttöön seuraavat merkinnät. Kun $G = (X, R)$ on suhteikko, niin merkitsemme G:n nuolten joukkoa $\{\overrightarrow{xz} : \overrightarrow{xz} \subset R\}$ symbolilla N_G ja G:n viivojen joukkoa $\{\overline{xz} : \overline{xz} \subset R\}$ symbolilla V_G. Huomaamme, että on voimassa

$$\boxed{\overrightarrow{xz} \in N_G \iff \overrightarrow{xz} \subset R \iff (z, x) \in R \iff xRz \iff x \in R\{z\}}$$

(Ekvivalenssin $xRz \iff \overrightarrow{xz} \subset R$ avulla saamme korjattua ekvivalenssin $xRz \iff (z, x) \in R$ sisältämän "nurinkurisuuden", josta mainitsimme sivuilla 4 ja 5).

Kun $G = (X, R)$ on suhteikko, niin merkitsemme G:n pisteiden joukkoa X symbolilla P_G. Panemme merkille, että joukot P_G ja N_G määräävät yksikäsitteisesti suhteikon G, sillä $G = (P_G, \bigcup N_G))$. Seuraavassa emme yleensä annakaan suhteikkoa G muodossa (X, R) vaan annamme joukot P_G ja N_G.

Esitämme suhteikon tavallisesti kuviona, missä pisteet ovat tason pisteitä. Kahden pisteen x ja z yhteys suhteikossa esitetään piirtämällä kuvioon x:stä z:hyn osoittava nuoli silloin kun suhteikossa on nuoli x:stä z:hyn. Jos suhteikossa on pisteitä x ja z yhdistävä viiva, niin piirretään joko nuolet molempiin suuntiin tai "kaksisuuntainen nuoli" pisteiden x ja z välille tai näiden asemasta viiva (jana tai käyrä) x:n ja z:n välille.

Suhteikon G piste x on G:n *eristetty piste*, mikäli x on erillään kaikista muista G:n pisteistä.

Jos suhteikon pisteiden joukko on tyhjä, niin tällöin myös suhteikon nuolten ja viivojen joukot ja suhteikon relaatio ovat tyhjiä; kutsumme suhteikkoa $(\emptyset, \emptyset)$ "tyhjäksi suhteikoksi" ja muiden suhteikkojen sanomme olevan "epätyhjiä suhteikkoja". Huomaamme, että epätyhjässäkin suhteikossa voi nuolten joukko olla tyhjä; tällaisessa suhteikossa kaikki pisteet ovat eristettyjä.

III 1.2 Määritelmä Suhteikko G on *symmetrinen* jos kaikki G:n epätyhjät yhteydet ovat viivoja.

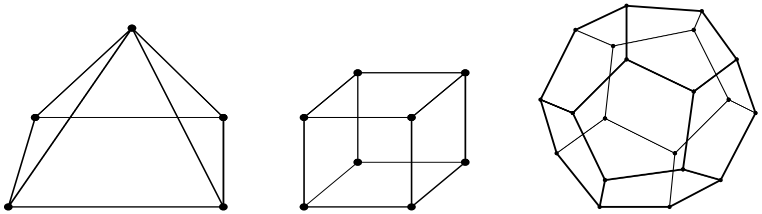
Suhteikko G on *silmukaton* jos G:ssä ei ole silmukkaa missään pisteessä.

Suhteikko G on *verkko*, jos G on silmukaton ja symmetrinen.

Suhteikko G on symmetrinen jos ja vain jos jokaista G:n nuolta $\overrightarrow{xz}$ vastaa G:n nuoli $\overrightarrow{zx}$. Täten suhteikko $G = (X, R)$ on symmetrinen jos ja vain jos relaatio R on symmetrinen (eli $R^{-1} = R$). Jos tiedetään, että relaatio R on symmetrinen, niin R määräytyy yksikäsitteisesti joukon V_G avulla, sillä tässä tapauksessa $R = \bigcup V_G$. Symmetriset suhteikot ja erityisesti verkot annetaankin seuraavassa yleensä antamalla vastaavat P– ja V–joukot.

Jokaista suhteikkoa $G = (X, R)$ vastaa symmetrinen suhteikko $G^s = (X, R \cup R^{-1})$. Havainnollisesti sanoen, suhteikko G^s saadaan suhteikosta G "muuttamalla jokainen G:n nuoli viivaksi". Selvästikin, G^s on verkko jos ja vain jos G on silmukaton. Jos G on symmetrinen suhteikko, niin $G^s = G$.

Suhteikkoja ja verkkoja esiintyy mitä moninaisimmissa yhteyksissä ja usein käytetään eri yhteyksiin havainnollisesti liittyvää sanastoa yllä esitetyn sanaston asemesta. Esimerkiksi jokaiseen avaruuden $\mathbb{R}^3$ monitahokkaaseen liittyy verkko, jonka pisteinä ovat tahokkaan *kärjet* ja viivoina tahokkaan *särmät*. Pyramidiin, kuutioon ja säännölliseen 12–tahokkaaseen (eli dodekaedriin) liittyvät verkot ovat seuraavan kaltaisia:

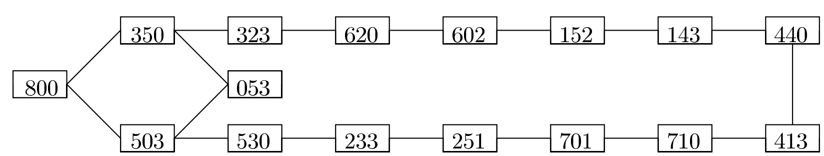


Muissa yhteyksissä voidaan puhua esimerkiksi suhteikon pisteiden ja nuolten asemasta *tiloista* ja *siirtymistä*, verkossa vierekkäin olevien pisteiden voidaan sanoa olevan toistensa *naapureita* jne.

Annamme nyt esimerkin suhteikkojen käytöstä "käytännön tilanteessa".

Esimerkki Kahdella henkilöllä on kahdeksan litran vetoinen ruukku täynnä viiniä. Lisäksi heillä on kaksi tyhjää ruukkua, viiden ja kolmen litran vetoiset. Onko heidän mahdollista jakaa viini keskenään tasan kun käytettävissä ei ole muita mittausvälineitä kuin kyseiset kolme ruukkua (ainoa "sallittu" mittaustoimenpide on siis kaataa viiniä ruukusta A ruukkuun B yli läikyttämättä siten, että joko ruukku A tyhjenee tai ruukku B tulee täyteen)?

Ratkaisu: Merkitsemme lukukolmikolla xyz tilannetta, jossa kahdeksan litran ruukussa on x litraa viiniä, viiden litran ruukussa on y litraa ja kolmen litran ruukussa z litraa. Alkutilanne on siis 800. Alkutilanteesta pääsee sallituilla mittaustoimenpiteillä tilanteisiin 350 ja 503. Tilanteesta 350 pääsee takaisin alkutilanteeseen 800 ja lisäksi tilanteisiin 323 ja 053; tilanteesta 503 pääsee tilanteisiin 800, 530 ja 053. Voisimme kirjata muistiin mahdolliset siirtymät tilanteesta toiseen "seuraajaluetteloiden" avulla, mutta saamme paljon havainnollisemman kuvan siirtymien kokonaisuudesta piirtämällä kaavion, jossa kahden eri tilanteen välillä on nuoli, mikäli ensimmäisestä pääsee toiseen sallitulla mittaustoimenpiteellä; kaavio yksinkertaistuu huomattavasti kun piirrämme sen vaiheittain alkamalla alkutilanteesta ja jättämällä pois sellaiset nuolet, jotka vievät "takaisinpäin" (eli viimeisessä vaiheessa saavutetusta tilanteesta sellaiseen tilanteeseen, johon oli jo päästy jossain aikaisemmassa vaiheessa). Jos aloitamme kaavion piirtämisen sivun vasemmasta laidasta ja sijoitamme uudet tilanteet vanhojen oikealle puolen, niin voimme jättää nuolten suunnat merkitsemättä ja päädymme seuraavan näköiseen kaavioon.



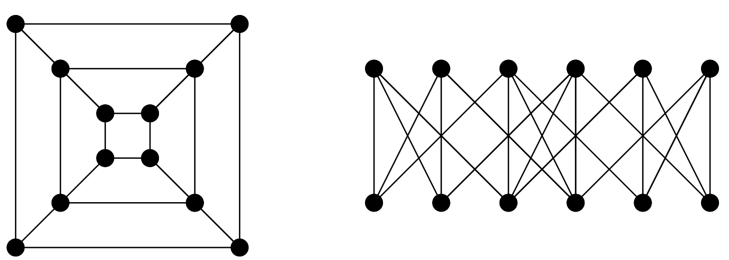
Voimme siis kuvata ongelmaa verkolla, josta näkyy suoraan, että annettu tehtävä on ratkaistavissa ja että viini voidaan jakaa tasan seitsemällä mittauksella.

Määrittelemme seuraavaksi tilanteen, jossa kaksi suhteikkoa ovat suhteikkojen teorian kannalta oleellisesti samat eli tämän teorian suhteen ekvivalentit.

III 1.3 Määritelmä Suhteikot G ja H ovat *isomorfiset* jos on olemassa sellainen bijektio $\varphi : P_G \to P_H$, että kaikilla $x, z \in P_G$ on voimassa $\overrightarrow{xz} \in N_G$ jos ja vain jos $\overrightarrow{\varphi(x)\varphi(z)} \in N_H$; tällaista bijektiota φ kutsutaan suhteikkojen G ja H väliseksi *isomorfismiksi*.

Huomaamme, että jos suhteikot G ja H ovat verkkoja, niin bijektio $\varphi : P_G \to P_H$ on G:n ja H:n välinen isomorfismi jos ja vain jos kaikilla $x, z \in P_G$ on voimassa $\overline{xz} \in V_G \Longleftrightarrow \overline{\varphi(x)\varphi(z)} \in V_H$.

Määritelmästä seuraa suoraan, että jos suhteikot G ja H ovat keskenään isomorfiset, niin tällöin joukoissa P_G ja P_H on yhtä monta alkiota, joukoissa N_G ja N_H on yhtä monta alkiota ja joukoissa V_G ja V_G on yhtä monta alkiota. Täten pisteiden, nuolien tai viivojen lukumäärien laskeminen saattaa toisinaan riittää osoittamaan sen, että annetut kaksi suhteikkoa eivät ole keskenään isomorfiset. Usein kahden suhteikon keskinäisen isomorfisuuden tai ei–isomorfisuuden osoittaminen on käytännössä vaikeaa, varsinkin jos suhteikkojen nuolien ja viivojen lukumäärät ovat suuria. Seuraavassa kuvassa esiintyy kaksi erinäköistä verkkoa, jotka voimme kuitenkin suhteellisen helposti nähdä keskenään isomorfisiksi.



Harjoitustehtävä: Osoita, että yllä kuvatut kaksi verkkoa ovat isomorfiset.

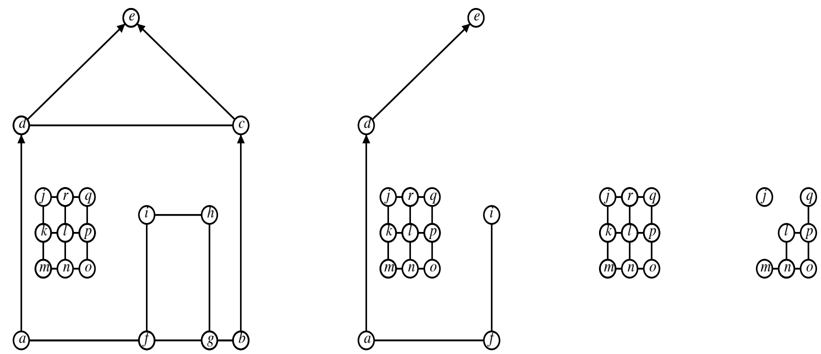
III 1.5 Määritelmä Olkoot G ja H suhteikkoja. Suhteikko H on suhteikon G *alisuhteikko*, jos $P_H \subset P_G$ ja $N_H \subset N_G$. Suhteikon G pisteiden joukon P_G osajoukon *A virittämä G:n alisuhteikko* on se G:n alisuhteikko H, joka määräytyy ehtojen $P_H = A$ ja $N_H = \{\overrightarrow{xz} \in N_G : \{x, z\} \subset A\}$ nojalla.

Panemme merkille, että kun R on suhteikon G relaatio, niin joukon $A \subset P_G$ virittämän G:n alisuhteikon relaatio on $R \cap (A \times A)$.

Otamme käyttöön seuraavan merkinnän: jos G_1 on G_2:n alisuhteikko, niin merkitsemme $G_1 \prec G_2$.

Jos suhteikon alisuhteikko on verkko, niin sanomme sen olevan suhteikon *aliverkko*. Verkon pisteiden joukon osajoukon virittämä verkon alisuhteikko on verkko, jota kutsumme osajoukon *virittämäksi verkon aliverkoksi*.

III 1.6 Esimerkki Seuraavassa kuvatuista verkoista, G_1 on G:n alisuhteikko, G_2 on G_1:n aliverkko ja G_3 on verkon G_2 pisteiden osajoukon $\{j, l, m, n, o, p, q\}$ virittämä G_2:n aliverkko.



Määrittelemme suhteikoille operaation $\bigvee$ seuraavasti: jos $\mathcal{H}$ on äärellinen kokoelma suhteikkoja, niin merkitsemme symbolilla $\bigvee \mathcal{H}$ sitä suhteikkoa G, joka määräytyy ehdoista $P_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} P_H$ ja $N_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} N_H$. Jokainen $H \in \mathcal{H}$ on suhteikon $\bigvee \mathcal{H}$ alisuhteikko. Jos $\mathcal{H}$ on äärellinen ja jokainen $H \in \mathcal{H}$ on verkko, niin suhteikko $G = \bigvee \mathcal{H}$ on verkko ja verkko G määräytyy tällöin ehdoista $P_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} P_H$ ja $V_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} V_H$.

Jos edellä $\mathcal{H} = \{H_i : i \in I\}$, niin voimme korvata merkinnän $\bigvee \mathcal{H}$ merkinnällä $\bigvee_{i \in I} H_i$. Jos $H_1, ..., H_n$ ovat suhteikkoja, niin korvaamme merkinnän $\bigvee_{i \in [n]} H_i$ usein merkinnällä $\bigvee_{i=1}^{n} H_i$ tai merkinnällä $H_1 \vee \cdots \vee H_n$.

Kuviot ovat kaikkein havainnollisin tapa esittää "pieniä" suhteikkoja mutta jos pisteitä ja nuolia on paljon, tulee kuvioista usein sekavia, eikä niistä ole enää hyötyä. Tästä syystä suhteikkoja esitetään myös muilla tavoin, esimerkiksi suhteikon relaation matriisin, eli suhteikon "yhteysmatriisin", avulla (katso Luvun I harjoitustehtävät 3 ja 4). Yksinkertaisimman esitystavan tarjoavat nk. *seuraajaluettelot*, joissa luetellaan, jokaiselle suhteikon $G = (X, R)$ pisteelle x, kaikki pisteen x seuraajat G:ssä, toisin sanoen, kaikki joukon $R\{x\}$ alkiot.

III 1.7 Esimerkki Edellisen esimerkin verkko G_3 esitettynä seuraajaluetteloiden avulla:

j	
l	*p,n*
m	*n*

n	*m,l,o*
o	*n,p*

p	*l,o,q*
q	*p*

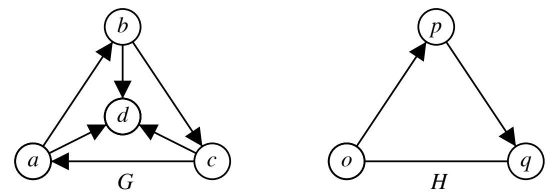
Mainitsemme lopuksi, että useissa sovellutuksissa joudutaan suhteikkojen asemasta tarkastelemaan niin kutsuttuja "painotettuja suhteikkoja": painotettu suhteikko on pari (X, f), missä X on joukko ja f on joukolla $X \times X$ määritelty reaaliarvoinen kuvaus. Suhteikko (X, R) voidaan esittää painotettuna suhteikkona (X, f) asettamalla $f(x, z) = 1$ kun $(x, z) \in R$ ja $f(x, z) = 0$ kun $(x, z) \notin R$. Myös niin kutsutut "monisuhteikot" ja "moniverkot", joissa kahden pisteen välillä voi olla useampia nuolia tai viivoja, voidaan esittää painotettuina suhteikkoina.

2. Pisteiden asteet.

Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko ja olkoon x G:n piste. Tällöin on voimassa $R\{x\} = \{z \in X : \overrightarrow{zx} \subset R\}$ ja $R^{-1}\{x\} = \{z \in X : \overrightarrow{xz} \subset R\}$. Lukua $|R\{x\}|$, eli pisteeseen x saapuvien G:n nuolten lukumäärää, merkitään $d_G^+(x)$:llä ja sitä kutsutaan pisteen x *tuloasteeksi* suhteikossa G. Lukua $\left|R^{-1}\{x\}\right|$, eli pisteestä x lähtevien G:n nuolten lukumäärää, merkitään $d_G^-(x)$:llä ja sitä kutsutaan pisteen x *lähtöasteeksi* suhteikossa G.

Esimerkkejä **(a)** Olkoon f kuvaus $X \to Y$. Merkitään F:llä suhteikkoa $(X \cup Y, f)$. Tällöin jokaisella $x \in X$ on voimassa $d_F^-(x) = 1$. Kuvaus f on injektio jos ja vain jos jokaisella $y \in Y$ on voimassa $d_F^+(y) \leq 1$ ja f on surjektio jos ja vain jos jokaisella $y \in Y$ on voimassa $d_F^+(y) \geq 1$.

(b) Seuraavan suhteikon G pisteelle a on voimassa $d_G^+(a) = 1$ ja $d_G^-(a) = 2$ ja pisteelle d on voimassa $d_G^+(d) = 3$ ja $d_G^-(d) = 0$; suhteikon H pisteelle o on voimassa $d_H^+(o) = 1$ ja $d_H^-(o) = 2$:



Merkitsemme n_G:llä suhteikon G *nuolten lukumäärää* eli lukua $|N_G| = |\{\overrightarrow{xz} : \overrightarrow{xz} \subset R\}|$. Koska kaikille $x, z \in X$ on voimassa $\overrightarrow{xz} = \{(z, x)\}$, niin näemme, että $n_G = |R|$.

Luku n_G voidaan myös esittää G:n pisteiden asteiden avulla.

III 2.1 Lemma *Suhteikolle* $G = (X, R)$ *on voimassa*

$$\boxed{n_G = \sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^-(x)}$$

Todistus. Edellä totesimme olevan voimassa $n_G = |R|$. Toisaalta pätee, että $R = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times R\{x\}) = \bigcup_{x \in X}(R^{-1}\{x\} \times \{x\})$ ja tästä seuraa, että on voimassa $|R| = \sum_{x \in X} |R\{x\}| = \sum_{x \in X} |R^{-1}\{x\}|$ eli $|R| = \sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^{-1}(x)$. $\square$

Johdamme nyt yhtälön verkon viivojen lukumäärälle. Kun G on verkko, niin merkitsemme v_G:llä verkon G viivojen lukumäärää eli lukua $|V_G|$.

Määrittelemme verkon $G = (X, R)$ pisteen x *asteen* $d_G(x)$ seuraavasti:

$$d_G(x) = |\{z \in X : \overline{xz} \subset R\}|.$$

Luku $d_G(x)$ ilmoittaa siis niiden G:n viivojen lukumäärän, joilla on piste x yhtenä päänä.

Teemme myös seuraavan sopimuksen: jos z on joku "piste", joka ei kuulu joukkoon P_G, niin asetamme $d_G(z) = 0$.

III 2.2 Lemma *Olkoon x verkon G piste. Tällöin on voimassa*

$$d_G(x) = d_G^+(x) = d_G^-(x).$$

Todistus. Koska G on verkko, jokaisella $z \in P_G$ on voimassa

$$\overline{xz} \in V_G \iff \overrightarrow{xz} \in N_G \iff \overrightarrow{zx} \in N_G.$$

Lemman väite seuraa edellisistä yhtälöistä pisteen x eri asteiden määritelmien nojalla. □

Edellisten lemmojen avulla voimme nyt helposti todistaa seuraavan verkon viivojen lukumäärää koskevan tuloksen.

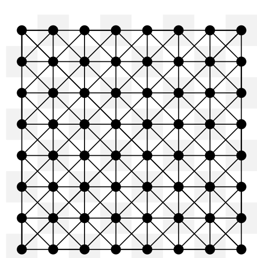
III 2.3 Lause *Verkolle G on voimassa*

$$\boxed{\sum_{x \in P_G} d_G(x) = 2 \cdot v_G}$$

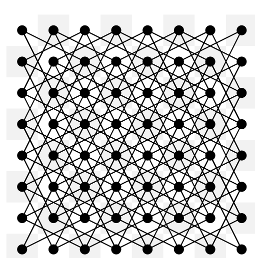
Todistus. Koska verkossa ei ole silmukoita ja koska kaikilla $x, z \in X$ on voimassa $\overline{xz} = \overline{zx} = \{(x,z),(z,x)\}$, niin nähdään että $v_G = \frac{1}{2} \cdot n_G$.

Toisaalta Lemmojen III 2.1 ja III 2.2 nojalla on voimassa $n_G = \sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G(x)$. Näin ollen on voimassa $|A| = 2 \cdot v_G = \sum_{x \in X} d_G(x)$. □

III 2.5 Esimerkki Kuhunkin shakkipelin nappulaan, sotamiestä lukuunottamatta, liittyy verkko, jonka pisteinä ovat shakkilaudan *ruudut* ja jossa viiva "yhdistää" kahta ruutua, mikäli yhdestä voi siirtyä toiseen kyseisellä nappulalla. Kuninkaaseen ja hevoseen liittyvät verkot ovat seuraavan näköisiä:



K



H

Käyttämällä edellisen lauseen tulosta voimme helposti laskea edellä kuvattujen verkkojen K ja H viivojen lukumäärät:

Verkossa K laudan "sisäruudun" aste on 8 kun taas "kulmaruutujen" aste 3 ja muiden "reunaruutujen" aste on 5. Täten verkon K viivojen lukumäärä on puolet luvusta $36 \cdot 8 + 4 \cdot 3 + 24 \cdot 5$ eli $v_K = 210$.

Verkon H pisteen aste on joko 2,3,4,6 tai 8. Neljän kulmaruudun aste on 2. Kulmaruutujen viereisten kahdeksan reunaruudun aste on 3. Lopuilla kuudellatoista reunaruudulla on kullakin asteena 4. Jos poistetaan laudan reunaruudut ja tarkastellaan jäljellejäävän 6×6 ruudukon reunaruutuja, niin nähdään, että neljällä kulmaruudulla on asteena 4 ja muilla kuudellatoista reunaruudulla on kullakin asteena 6. Pienemmän ruudukon kuudellatoista sisäruudulla on kullakin asteena 8. Täten verkon H viivojen lukumäärä on puolet luvusta $4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8$ eli $v_H = 168$. □

Sanomme verkon G pisteen x olevan *parillisasteinen*, jos luku $d_G(x)$ on parillinen ja *paritonasteinen*, jos luku $d_G(x)$ on pariton. Koska verkon pisteiden asteiden summa on Lauseen III 2.3 nojalla parillinen, saamme lauseelle seuraavan korollaarin.

III 2.4 Korollaari *Verkon paritonasteisten pisteiden lukumäärä on parillinen.*

III 2.5 Esimerkki Osoita, että jos talossa on vain yksi ulko–ovi, niin siinä on ainakin yksi huone, jossa on pariton määrä ovia.

Ratkaisu: Merkitsemme talon huoneiden joukkoa H:lla ja merkitsemme u:lla talon ulkopuolta; seuraavassa kutsumme myös u:ta "huoneeksi". Merkitsemme $X = H \cup \{u\}$. Kaikilla $h, j \in X$, missä $h \neq j$, merkitsemme $n(h,j)$:llä huoneita h ja j yhdistävien ovien lukumäärää.

Merkitsemme G:llä sitä verkkoa, jolla

$$P_G = X \text{ ja } V_G = \{\overline{hj} : h, j \in X, h \neq j \text{ ja luku } n(h,j) \text{ on pariton}\}.$$

Huomaamme, että verkon G pisteen u aste on yksi. Korollaarin 2.4 tuloksesta seuraa, että on olemassa sellainen G:n paritonasteinen piste h, että $h \neq u$. Osoitamme, että huoneen h ovien lukumäärä on pariton. Merkitsemme $J = \{j \in X : n(h,j) > 0\}$ ja $J' = \{j \in J : \text{ luku } n(h,j) \text{ on pariton}\}$. On voimassa $d_G(h) = |J'|$, joten joukossa J' on pariton määrä alkioita; tästä seuraa, että luku $\sum_{j \in J'} n(h,j)$ on pariton. Koska parillisten lukujen summa $\sum_{j \in J \setminus J'} n(h,j)$ on parillinen, niin huoneen h ovien lukumäärä $\sum_{j \in J} n(h,j)$ on pariton. □

Sanomme verkon olevan *parillisasteinen*, mikäli sen jokainen piste on parillisasteinen ja *paritonasteinen*, mikäli sen jokainen piste on paritonasteinen. Korollaarin III 2.4 tuloksesta seuraa, että paritonasteisessa verkossa on parillinen määrä pisteitä.

Panemme lopuksi merkille, että eräs luvussa 1.4 esitetty laatikkoperiaatteen sovellutus voidaan tulkita verkon pisteiden asteita koskevana tuloksena.

III 2.5 Lemma *Olkoon G verkko, jossa on ainakin kaksi pistettä. Tällöin G:ssä on kaksi eri pistettä x ja z, joille on voimassa $d_G(x) = d_G(z)$.*

Todistus. Esimerkki II 1.6(a) □

3. Yhtenäisyys.

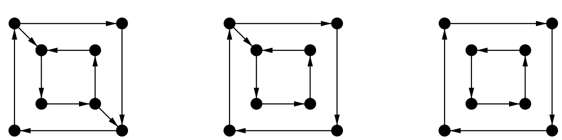
Sovellustenkin kannalta on usein tärkeätä tietää, "jakautuuko" annettu suhteikko tai verkko useampaan "erilliseen osaan" vai onko se "yhtenäinen". Esimerkiksi, kun kaupungissa suunnitellaan seuraavan kesän katutöitä, on varmistettava, ettei missään vaiheessa synny tilannetta, jossa joku alue jäisi eristyksiin. Tarkastelemme tässä luvussa suhteikkojen yhtenäisyyttä "jakautumattomuuden" kannalta ja seuraavassa luvussa siltä kannalta, miten suhteikon pisteestä "pääsee" toiseen "siirtymällä nuolia pitkin".

Olkoon G suhteikko, olkoon P joukon P_G osajoukko ja olkoon $\overrightarrow{xz} \in N_G$ G:n nuoli. Jos $x \in P$ ja $z \in P$, niin sanomme, että $\overrightarrow{xz}$ on *nuoli joukossa* P. Jos $x \in P$ ja $z \notin P$, niin sanomme, että $\overrightarrow{xz}$ on *nuoli joukosta* P. Jos taas $x \notin P$ ja $z \in P$, niin sanomme, että $\overrightarrow{xz}$ on *nuoli joukkoon* P.

III 3.1 Määritelmä Suhteikko G on *yhtenäinen*, jos jokaisella P_G:n epätyhjällä, aidolla osajoukolla P, G:ssä on joko nuoli P:hen tai nuoli P:stä.

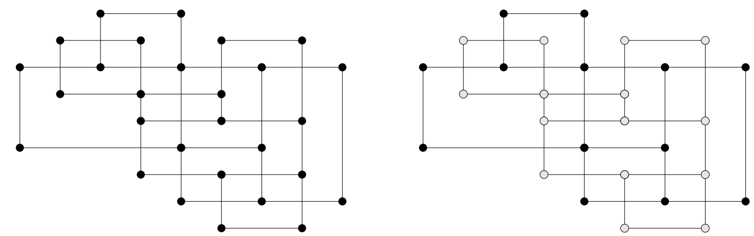
G on *vahvasti yhtenäinen*, jos jokaisella P_G:n epätyhjällä, aidolla osajoukolla P, G:ssä on nuoli P:hen ja nuoli P:stä.

III 3.2 Esimerkkejä **(a)** Alla kuvatuista suhteikoista, G_1 on vahvasti yhtenäinen, G_2 on yhtenäinen muttei vahvasti yhtenäinen ja G_3 ei ole yhtenäinen.



G_1 G_2 G_3

(b) Edelliset suhteikot ovat niin yksinkertaisia, että niistä näkyy ensi silmäyksellä, ovatko ne yhtenäisiä vai epäyhtenäisiä. Monimutkaisempien suhteikkojen ja verkkojen tapauksessa voi usein olla vaikeaa osoittaa yhtenäisyys tai epäyhtenäisyys. Seuraavassa vasemmalla kuvatusta verkosta ei aivan heti näe, onko verkko yhtenäinen vai ei; oikealla puolella olevasta saman verkon esityksestä näkyy, että verkko ei ole yhtenäinen.



Jos suhteikko ei ole yhtenäinen, niin sanomme sen olevan *epäyhtenäinen*.

Jos G on symmetrinen suhteikko, niin jokaisella $\overrightarrow{xz} \in N_G$ on voimassa $\overrightarrow{zx} \in N_G$; tässä tapauksessa on selvää, että G on yhtenäinen jos ja vain jos G on vahvasti yhtenäinen; lisäksi, G on yhtenäinen jos ja vain jos jokaisella joukon P_G epätyhjällä, aidolla osajoukolla P on olemassa G:n viiva, jonka toinen päätepiste on joukon P ja toinen joukon $P_G \setminus P$ alkio (tällaisen viivan sanotaan olevan joukkojen P ja $P_G \setminus P$ *välinen viiva*). Osoitetaan nyt, että yleisen suhteikon G tapauksessa, G:n yhtenäisyyttä voidaan luonnehtia G:tä vastaavan symmetrisen suhteikon G^s avulla.

III 3.3 Lause *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä suhteikolle G:*
A. G on yhtenäinen.
B. G^s on yhtenäinen.
C. G^s on vahvasti yhtenäinen.

Todistus. Koska G^s on symmetrinen suhteikko, niin ehdot B ja C ovat keskenään yhtäpitävät.

A$\Longrightarrow$B: Koska $P_G = P_{G^s}$ ja $N_G \subset N_{G^s}$, niin suhteikon G^s yhtenäisyys seuraa suhteikon G yhtenäisyydestä.

B$\Longrightarrow$A: Oletetaan, että G^s on yhtenäinen. Osoitetaan, että tällöin myös G on yhtenäinen. Olkoon P joukon P_G epätyhjä, aito osajoukko. Koska $P_{G^s} = P_G$ ja G^s on yhtenäinen, niin on olemassa G^s:n nuoli $\overrightarrow{xz}$, joka on joko nuoli P:stä tai nuoli P:hen;

tällöin $\overrightarrow{zx}$ on joko nuoli P:hen tai nuoli P:stä. Koska $\overrightarrow{xz} \in N_{G^s}$, on voimassa joko $\overrightarrow{xz} \in N_G$ tai $\overrightarrow{zx} \in N_G$; kummassakin tapauksessa G:ssä on joko nuoli P:hen tai nuoli P:stä. On osoitettu, että G on yhtenäinen. □

Yhtenäisyydellä ja vahvalla yhtenäisyydellä on merkitystä myös sellaisten suhteikkojen tapauksessa, joilla ei ole näitä ominaisuuksia. Osoitamme seuraavaksi, että jokainen suhteikko voidaan "jakaa" mahdollisimman suuriin (vahvasti) yhtenäisiin "osiin".

III 3.4 Määritelmä Suhteikon G alisuhteikko H on G:n *(vahvasti) yhtenäinen komponentti*, jos H on (vahvasti) yhtenäinen, eikä millään G:n (vahvasti) yhtenäisellä alisuhteikolla J ole voimassa $J \neq H$ ja $H \prec J$.

Suhteikon G (vahvasti) yhtenäiset komponentit ovat siis *maksimaalisia* G:n (vahvasti) yhtenäisiä alisuhteikkoja. Näytämme, että jokainen G:n komponentti on pistejoukkonsa virittämä G:n alisuhteikko.

III 3.5 Lemma *Olkoon H suhteikon G (vahvasti) yhtenäinen komponentti. Tällöin H on joukon P_H virittämä G:n alisuhteikko.*

Todistus. Merkitään J:llä joukon P_H virittämää G:n alisuhteikkoa. Tällöin on voimassa $H \prec J$. Koska H on (vahvasti) yhtenäinen ja koska on voimassa $P_J = P_H$ ja $N_H \subset N_J$, suhteikko J on (vahvasti) yhtenäinen. Koska H on komponentti, on voimassa $J = H$. □

Näytämme seuraavaksi, että jokainen suhteikko voidaan "jakaa" komponentteihin. Aluksi todistamme eräitä aputuloksia.

III 3.6 Lemma *Olkoon $\mathcal{H}$ äärellinen kokoelma (vahvasti) yhtenäisiä suhteikkoja. Oletetaan, että kokoelmalla $\mathcal{H}$ on sellainen jäsen M, että jokaisella $H \in \mathcal{H}$ on voimassa $P_H \cap P_M \neq \emptyset$. Tällöin suhteikko $\bigvee \mathcal{H}$ on (vahvasti) yhtenäinen.*

Todistus. Merkitään $G = \bigvee \mathcal{H}$. Olkoon joukolle P voimassa $\emptyset \neq P \subsetneqq P_G$. Merkitään $\mathcal{J} = \{H \in \mathcal{H} : P_H \subset P\}$, $\mathcal{K} = \{H \in \mathcal{H} : P_H \subset P_G \setminus P\}$ ja $\mathcal{L} = \mathcal{H} \setminus (\mathcal{J} \cup \mathcal{K})$. Osoitetaan, että on voimassa $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Jos $M \in \mathcal{L}$, niin $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Oletetaan, että $M \notin \mathcal{L}$. Tällöin $M \in \mathcal{J} \cup \mathcal{K}$. Oletetaan, että vaikkapa $M \in \mathcal{J}$ eli $P_M \subset P$. Olkoon x joukon $P_G \setminus P$ piste. Koska $x \in P_G$, niin on olemassa sellainen $H \in \mathcal{H}$, että $x \in P_H$. Suhteikolle H on voimassa $x \in P_H \cap (P_G \setminus P)$ ja $\emptyset \neq P_H \cap P_M \subset P_H \cap P$; tästä

seuraa, että $H \notin \mathcal{J}$ ja $H \notin \mathcal{K}$ ja täten $H \in \mathcal{L}$. On osoitettu, että jos $M \in \mathcal{J}$, niin $\mathcal{L} \neq \emptyset$ ja aivan samoin nähdään, että jos $M \in \mathcal{K}$, niin $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

Olkoon H kokoelman $\mathcal{L}$ jäsen. Tällöin $P_H \not\subset P$ ja $P_H \not\subset P_G \setminus P$. Merkitään $Q = P_H \cap P$ ja pannaan merkille, että $\emptyset \neq Q \subsetneqq P_H$. Koska suhteikko H on (vahvasti) yhtenäinen, niin H:ssa on nuoli joukosta Q tai (ja) nuoli joukkoon Q. Koska jokainen H:n nuoli on myös suhteikon G nuoli ja koska $Q \subset P$ ja $P_H \setminus Q \subset P_G \setminus P$, niin suhteikossa G on nuoli joukosta P tai (ja) nuoli joukkoon P. On osoitettu, että suhteikko G on (vahvasti) yhtenäinen. □

III 3.7 Lemma *Olkoon K suhteikon G (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko. Oletetaan, että $P_K \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi G:n (vahvasti) yhtenäinen komponentti H, jolle on voimassa $P_H \cap P_K \neq \emptyset$. Komponentille H on lisäksi voimassa $K \prec H$.*

Todistus. Merkitään $\mathcal{C} = \{L : L$ on G:n (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko ja $P_L \cap P_K \neq \emptyset\}$. Tällöin $K \in \mathcal{C}$, joten $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Merkitään $H = \bigvee \mathcal{C}$. Tällöin H on G:n alisuhteikko ja on voimassa $K \prec H$ ja $P_H \cap P_K \neq \emptyset$. Osoitetaan, että H on G:n (vahvasti) yhtenäinen komponentti. Koska jokaisella $L \in \mathcal{C}$ on voimassa $P_L \cap P_K \neq \emptyset$, niin Lemman III 3.4 tuloksesta seuraa, että H on (vahvasti) yhtenäinen. Toisaalta, jos J on G:n (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko, jolle on voimassa $H \prec J$, niin on voimassa $J \in \mathcal{C}$ ja täten $J \prec \bigvee \mathcal{C} = H$. Edellisen nojalla H on G:n (vahvasti) yhtenäinen komponentti.

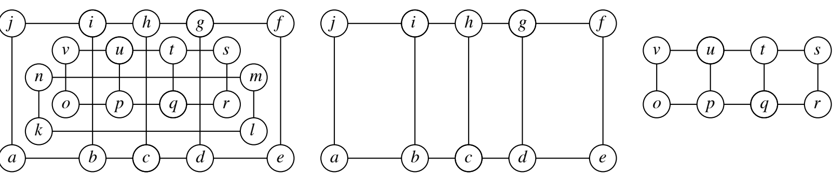
Jos H' on sellainen G:n (vahvasti) yhtenäinen komponentti, että $P_{H'} \cap P_K \neq \emptyset$, niin tällöin $H' \in \mathcal{C}$; tästä seuraa, että on voimassa $H' \prec \bigvee \mathcal{C} = H$ ja edelleen, että on voimassa $H = H'$. □

III 3.8 Lause *Olkoon G suhteikko, olkoon $\mathcal{K}$ G:n kaikkien yhtenäisten komponenttien joukko ja olkoon $\mathcal{K}_v$ kaikkien G:n vahvasti yhtenäisten komponenttien joukko. Tällöin perheet $\{P_H : H \in \mathcal{K}\}$ ja $\{P_H : H \in \mathcal{K}_v\}$ ovat joukon P_G osituksia.*

Todistus. Jokaisella $x \in P_G$, G:n alisuhteikko $K_x = (\{x\}, \emptyset)$ on vahvasti yhtenäinen; lisäksi jokaiselle G:n alisuhteikolle J on voimassa $x \in P_J \iff K_x \prec J$. Lauseen tulos seuraa näin ollen Lemman III 3.7 tuloksesta, koska viimeksimainitun tuloksen nojalla jokaisella $x \in P_G$, relaatio $K_x \prec H$ pätee täsmälleen yhdelle G:n (vahvasti) yhtenäiselle komponentille H. □

Yllä olevan lauseen nojalla suhteikon G piste x on täsmälleen yhden G:n (vahvasti) yhtenäisen komponentin piste; kyseistä komponenttia kutsutaan *pisteen x (vahvasti) yhtenäiseksi komponentiksi* suhteikossa G.

III 3.9 Esimerkkejä **(a)** Esimerkin III 3.2(a) suhteikko G_2 on yhtenäinen, joten sillä on vain yksi yhtenäinen komponentti, nimittäin G_2. Verkolla G_2 on kaksi vahvasti yhtenäistä komponenttia, sisemmän neliön pisteiden virittämä alisuhteikko ja ulomman neliön pisteiden virittämä alisuhteikko.
(b) Esimerkin III 3.2(b) verkon oikeanpuoleisesta esityksestä näkee helposti, että kyseisellä verkolla on kaksi yhtenäistä komponenttia, mustien pisteiden joukon virittämä aliverkko ja harmaiden pisteiden joukon virittämä aliverkko.
(b) Alla vasemmalla kuvatun verkon pisteiden a ja s yhtenäiset komponentit ovat seuraavat:



Osoitamme vielä, että suhteikon G yhtenäisten komponenttien nuolten ja viivojen joukot "jakavat" G:n vastaavat joukot.

III 3.10 Lause *Olkoon G suhteikko ja olkoon $\mathcal{K}$ G:n kaikkien yhtenäisten komponenttien joukko. Tällöin perhe $\{N_H : H \in \mathcal{K}\}$ on joukon N_G ositus ja perhe $\{V_H : H \in \mathcal{K}\}$ on joukon V_G ositus.*

Todistus. Jokaisella $\overrightarrow{xz} \in N_G$, G:n alisuhteikko $K_{\overrightarrow{xz}}$, jonka pistejoukkona on $\{x, z\}$ ja nuolten joukkona $\{\overrightarrow{xz}\}$, on yhtenäinen. Lisäksi jokaiselle G:n alisuhteikolle J pätee, että $\overrightarrow{xz} \in N_J$ jos ja vain jos $K_{\overrightarrow{xz}} \prec J$. Lemman III 3.7 tuloksesta seuraa näin ollen, että on olemassa täsmälleen yksi $H \in \mathcal{K}$, jolle on voimassa $\overrightarrow{xz} \in N_H$.

Viivoja koskeva tulos todistetaan samalla lailla, tarkastelemalla nyt G:n alisuhteikkoja $K_{\overline{xz}}$, joilla on pistejoukkona $\{x, z\}$ ja nuolten joukkona $\{\overrightarrow{xz}, \overrightarrow{zx}\}$. □

Edellisessä todistuksessa esiintyvät G:n alisuhteikot $K_{\overline{xz}}$ ovat vahvasti yhtenäisiä ja täten Lemman III 3.7 tuloksesta seuraa, että myös perhe $\{V_H : H$ on G:n vahvasti

yhtenäinen komponentti$\}$ on joukon V_G ositus. Vastaava tulos ei päde nuolten tapauksessa, kuten näemme tarkastelemalla edellisessä todistuksessa esiintyvää, muotoa $K_{\overrightarrow{xz}}$ olevaa suhteikkoa: tämän vahvasti yhtenäiset komponentit ovat alisuhteikot $(\{x\}, \emptyset)$ ja $(\{z\}, \emptyset)$, eikä nuoli $\overrightarrow{xz}$ ole kummankaan komponentin nuoli. Myöskään Esimerkin III 3.2(a) suhteikossa G_2 ulommasta sisempään neliöön vievä nuoli ei kuulu kumpaankaan G_2:n vahvasti yhtenäiseen komponenttiin.

Voimme panna merkille, että jos H ja J ovat suhteikon G yhtenäisiä komponentteja ja $H \neq J$, niin Lauseiden III 3.8 ja III 3.10 sekä Lemman III 3.5 tuloksista seuraa, että G:ssä ei ole nuolta, jonka toinen päätepiste olisi joukossa P_H ja toinen joukossa P_J.

Jos G on verkko, niin jokainen G:n yhtenäinen komponentti on Lemman III 3.5 nojalla verkko ja näin ollen, Lauseen III 3.3 nojalla, vahvasti yhtenäinen; tästä seuraa, että verkon tapauksessa yhtenäiset komponentit ovat vahvasti yhtenäisiä komponentteja ja kääntäen.

Esitämme lopuksi erään pisteiden ja viivojen lukumääriä koskevan epäyhtälön, joka pätee kaikille yhtenäisille verkoille. Epäyhtälön todistuksessa käytämme hyväksi seuraavaa aputulosta.

III 3.11 Lemma *Olkoon $\mathcal{H}$ sellainen äärellinen kokoelma epätyhjiä suhteikkoja, että suhteikko $\bigvee \mathcal{H}$ on yhtenäinen. Tällöin voidaan kirjoittaa $\mathcal{H} = \{H_i : i \in [n]\}$ siten, että jokaisella $1 < i \leq n$ on voimassa $P_{H_i} \cap P_{H_j} \neq \emptyset$ jollain $j < i$.*

Todistus. Merkitään $n = |\mathcal{H}|$ ja $G = \bigvee \mathcal{H}$. Jos $n = 0$, niin ei ole mitään todistamista. Jos $n = 1$, niin kirjoittamalla $\mathcal{H} = \{H_1\}$ saadaan $\mathcal{H}$:lle vaadittu esitys. Oletetaan, että $n > 1$. Valitaan H_1:ksi mielivaltainen kokoelman $\mathcal{H}$ jäsen ja osoitetaan, että suhteikot $H_2, ..., H_n$ voidaan valita rekursiivisesti niin, että jokaisella $i = 2, ..., n$ on voimassa 1^o $H_i \notin \{H_j : 1 \leq j < i\}$ ja 2^o $P_{H_i} \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} P_{H_j} \neq \emptyset$. Olkoon $k \in [n]$ sellainen luku, että $k > 1$ ja suhteikot H_i, $i \in [k-1]$ on jo valittu niin, että ehdot 1^o ja 2^o toteutuvat jokaisella $1 < i < k$. Osoitetaan, että H_k voidaan valita niin, että ehdot 1^o ja 2^o toteutuvat i:n arvolla k. Merkitään $P = \bigcup_{j=1}^{k-1} P_{H_j}$. Jos $P = P_G$, niin jokaisella $H \in \mathcal{H}$ on voimassa $P_H \cap P \neq \emptyset$, joten H_k:ksi voidaan tässä tapauksessa valita mikä tahansa kokoelman $\mathcal{H} \setminus \{H_j : j < k\}$ suhteikko. Oletetaan, että $P \neq P_G$. Tällöin $\emptyset \neq P \subsetneqq P_G$, joten suhteikon G yhtenäisyyden nojalla G:ssä on nuoli $\overrightarrow{xy}$ joukkoon P tai joukosta P. Pannaan merkille, että $\overrightarrow{xy}$ ei ole millään

$i \in [k-1]$ suhteikon P_i nuoli; näin ollen jollain $H' \in \mathcal{H} \smallsetminus \{H_j : j < k\}$ on voimassa $\overrightarrow{xy} \in N_{H'}$. Koska nuolen $\overrightarrow{xy}$ yksi päätepiste on joukossa P, niin on voimassa $P_{H'} \cap P \neq \emptyset$; täten voidaan valita $H_k = H'$. □

Panemme merkille, että jos edellisessä lemmassa kokoelman $\mathcal{H}$ suhteikot ovat yhtenäisiä, niin lemman antama välttämätön ehto suhteikon $\bigvee \mathcal{H}$ yhtenäisyydelle on myös riittävä.

III 3.12 Lemma *Olkoon $\mathcal{H} = \{H_i : i \in [n]\}$ sellainen äärellinen kokoelma (vahvasti) yhtenäisiä suhteikkoja, että jokaisella $1 < i \leq n$ on voimassa $P_{H_i} \cap P_{H_j} \neq \emptyset$ jollain $j < i$. Tällöin suhteikko $G = \bigvee \mathcal{H}$ on (vahvasti) yhtenäinen.*

Todistus. Lemman III 3.6 tuloksesta seuraa induktiolla luvun k suhteen, että jokaisella $k \in [n]$, suhteikko $\bigvee_{i=1}^{k} H_i = \left(\bigvee_{i<k} H_i\right) \vee H_k$ on (vahvasti) yhtenäinen. □

III 3.13 Lause *Olkoon G yhtenäinen verkko. Tällöin on voimassa*

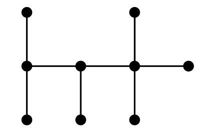
$$\boxed{v_G \geq p_G - 1}$$

Todistus. Merkitään $v_G = n$. Jokaisella $v \in V_G$, merkitään H_v:llä sitä G:n aliverkkoa, jolla on pisteiden joukkona v:n päätepisteiden muodostama 2-joukko ja viivojen joukkona $\{v\}$. Merkitään $\mathcal{H} = \{H_v : v \in V_G\}$. Koska G on yhtenäinen, niin G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä ja tästä seuraa, että on voimassa $\bigvee \mathcal{H} = G$. Lemman III 3.11 tuloksesta seuraa, että voidaan kirjoittaa $\mathcal{H} = \{H_i : i \in [n]\}$ siten, että jokaisella $1 < i \leq n$ on voimassa $P_{H_i} \cap \bigcup_{j<i} P_{H_j} \neq \emptyset$. Pannaan merkille, että jokaisella $i > 1$, koska P_{H_i} on 2-joukko, joka leikkaa joukkoa $\bigcup_{j<i} P_{H_j}$, niin joukossa $P_{H_i} \smallsetminus \bigcup_{j<i} P_{H_j}$ on korkeintaan yksi alkio. Tästä seuraa, että on voimassa

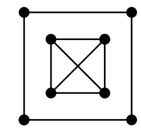
$$\begin{aligned} p_G = |P_G| &= \left| \bigcup_{j \in [n]} P_{H_j} \right| = \left| P_{H_1} \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n} \left(P_{H_i} \smallsetminus \bigcup_{j=1}^{i-1} P_{H_j} \right) \right) \right| \\ &= |P_{H_1}| + \sum_{i=2}^{n} \left| P_{H_i} \smallsetminus \bigcup_{j=1}^{i-1} P_{H_j} \right| \leq 2 + (n-1) \cdot 1 = n + 1 = v_G + 1\,. \end{aligned}$$ □

Edellisen lauseen antamaa epäyhtälöä ei voi parantaa: alla kuvatulla yhtenäisellä verkolla G on voimassa $v_G = p_G - 1$.

Lauseen III 3.11 epäyhtälön voimassaolo on välttämätön, mutta ei riittävä ehto verkon yhtenäisyydelle: alla kuvattu verkko H on epäyhtenäinen vaikka on voimassa $v_H > p_H$.



G



H

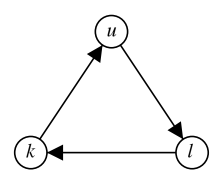
4. Kulku suhteikossa.

Suhteikon vahvan yhtenäisyyden lähempää tarkastelua varten määritelemme käsitteen, joka liittyy siihen, miten suhteikossa "pääsee" pisteestä toiseen.

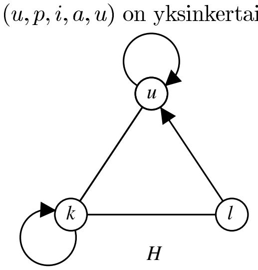
Määritelmä Olkoon G suhteikko. *Kulku* G:ssä on sellainen jono $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ G:n pisteitä, että $n \in \mathbb{N}$ ja jokaisella $i \in [n]$, $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ on G:n nuoli.

Otamme nyt käyttöön kulkuihin liittyvää sanastoa ja merkintöjä. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku suhteikossa G. Sanotaan, että kulku $\bar{x}$ *käy* pisteissä $x_0, ..., x_n$ ja sanotaan myös, että $\bar{x}$ on kulku *pisteestä* x_0 *pisteeseen* x_n *pisteiden* $x_1, ..., x_{n-1}$ *kautta*. Kulku $\bar{x}$ on *yksinkertainen*, mikäli kaikilla $0 \leq i < j \leq n$, jos $x_i = x_j$, niin $i = 0$ ja $j = n$. Toisinsanoen, kulku $\bar{x}$ on yksinkertainen, jos kaikki pisteet $x_0, ..., x_n$ ovat eri pisteitä paitsi mahdollisesti $x_0 = x_n$. Kulku $\bar{x}$ on *suljettu kulku*, mikäli $x_0 = x_n$; tällöin sanotaan myös, että $\bar{x}$ on *pisteestä* x_0 *lähtevä kierros* G:ssä.

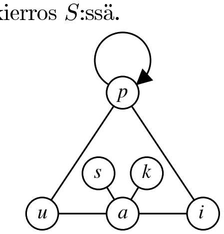
Esimerkki Jono (k, u, l, k, u) on kulku allaolevassa suhteikossa G mutta ei suhteikossa H; jonot (l, u, k, u) ja (l, u, u, k, k, u) ovat kulkuja H:ssa muttei G:ssä. Jonot (s, a, i, p, p, u, a, s) ja $(s, a, i, p, p, u, a, k, a, u, p, p, i, a, s)$ ovat kierroksia alla esitetyssä suhteikossa S ja jono (u, p, i, a, u) on yksinkertainen kierros S:ssä.



G



H



S

Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku suhteikossa G. Sanomme kulun $\bar{x}$:n osajonon (x_{i-1}, x_i), missä $i \in [n]$, olevan kulun $\bar{x}$ *i:s askel*. Sanomme $\bar{x}$:n olevan *n-askeleinen kulku* ja sanomme myös, että n on kulun $\bar{x}$ *pituus*. Jokaisella $i \in [n]$, G:ssä on nuoli $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ ja sanomme $\bar{x}$:n kulkevan *pitkin nuolta* $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ *i:nnellä askeleellaan*; jos G:ssä on nuolen $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ lisäksi nuoli $\overrightarrow{x_ix_{i-1}}$, niin tällöin G:ssä on viiva $\overline{x_{i-1}x_i}$ ja sanomme $\bar{x}$:n kulkevan, paitsi pitkin nuolta $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$, myös *pitkin viivaa* $\overline{x_{i-1}x_i}$ *i:nnellä askeleellaan*.

Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku suhteikossa G. Tällöin merkitsemme $P(\bar{x})$:llä joukon P_G osajoukkoa $\{x_0, ..., x_n\}$, $N(\bar{x})$:llä joukon N_G osajoukkoa $\{\overrightarrow{x_0x_1}, ..., \overrightarrow{x_{n-1}x_n}\}$ ja $V(\bar{x})$:llä joukon V_G osajoukkoa $\{\overline{x_0x_1}, ..., \overline{x_{n-1}x_n}\} \cap V_G$.

Huomaamme, että kun x on suhteikon G piste, niin yllä annettujen määritelmien nojalla jono (x) on kulku (täsmällisemmin sanoen, 0-askeleinen kierros) G:ssä. Kululle (x) pätee, että $P((x)) = \{x\}$ ja $N((x)) = V((x)) = \emptyset$. Kulkuja (x), $x \in P_G$, sekä "tyhjää kulkua" () kutsumme G:n *triviaaleiksi kuluiksi*, koska ne eivät anna mitään tietoa G:n rakenteesta; muita G:n kulkuja kutsumme *epätriviaaleiksi*.

Olkoot $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ ja $\bar{y} = (y_0, ..., y_m)$ kulkuja suhteikossa G. Jos $x_n = y_0$, niin sanomme, että $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat *peräkkäisiä kulkuja* ja tällöin määrittelemme kulun $\bar{x} \star \bar{y} = (z_0, ..., z_{n+m})$ asettamalla $z_i = x_i$ jokaisella $0 \leq i \leq n$ ja $z_i = y_{i-n}$ jokaisella $n < i \leq n + m$. Panemme merkille, että kulun $\bar{x} \star \bar{y}$ askelten lukumäärä on kulkujen $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ askelten lukumäärien summa.

Esimerkki Useissa lautapeleissä, kuten esimerkiksi "Afrikan tähdessä", pelaaja suorittaa peräkkäisiä kulkuja pelilaudan määräämässä verkossa tai suhteikossa; pelaaja heittää kunkin pelivuoronsa alussa yhtä tai useampaa noppaa ja tämän jälkeen hän saa tehdä pelinappulallaan peliverkossa tai -suhteikossa jonkun sellaisen kulun, jonka alkupiste on edellisellä vuorolla suoritetun kulun loppupiste ja jonka askelten lukumäärä on heitettyjen noppien silmälukujen summa.

Suoraan määritelmistä saamme seuraavat tulokset.

III 4.1 Lemma *(a) Jos $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat peräkkäisiä kulkuja suhteikossa G, niin on voimassa $P(\bar{x}\star\bar{y}) = P(\bar{x}) \cup P(\bar{y})$, $N(\bar{x}\star\bar{y}) = N(\bar{x}) \cup N(\bar{y})$ ja $V(\bar{x}\star\bar{y}) = V(\bar{x}) \cup V(\bar{y})$.*
(b) Olkoot $\bar{x}$, $\bar{y}$ ja $\bar{z}$ kulkuja suhteikossa G. Jos kulut $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat peräkkäisiä ja kulut $\bar{y}$ ja $\bar{z}$ ovat peräkkäisiä, niin kulut $\bar{x} \star \bar{y}$ ja $\bar{z}$ ovat peräkkäisiä ja kulut $\bar{x}$ ja $\bar{y} \star \bar{z}$ ovat peräkkäisiä ja on voimassa $(\bar{x} \star \bar{y}) \star \bar{z} = \bar{x} \star (\bar{y} \star \bar{z})$.

(c) Jos $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ on (yksinkertainen) kierros suhteikossa G ja $0 \leq k \leq n$, niin $\bar{y} = (x_k, ..., x_n) \star (x_0, ..., x_k)$ on pisteestä x_k lähtevä (yksinkertainen) kierros G:ssä. Lisäksi pätee, että $P(\bar{y}) = P(\bar{x})$, $N(\bar{y}) = N(\bar{x})$ ja $V(\bar{y}) = V(\bar{x})$.

Lemman (b)–kohdan nojalla voidaan lausekkeista $(\bar{x} \star \bar{y}) \star \bar{z}$ ja $\bar{x} \star (\bar{y} \star \bar{z})$ jättää sulut pois ja merkitä kyseisten lausekkeiden määrittämää kulkua yksinkertaisesti $\bar{x}\star\bar{y}\star\bar{z}$:llä; tästä seuraa edelleen, että myös merkinnät $\bar{x}\star\bar{y}\star\bar{z}\star\bar{u}$, $\bar{x}\star\bar{y}\star\bar{z}\star\bar{u}\star\bar{v}$, jne., määräävät yksikäsitteisesti kulkuja kunhan vain vaaditut peräkkäisyysehdot pätevät lausekkeissa esiintyville kuluille $\bar{x}$, $\bar{y}$, jne.

Osoitamme seuraavaksi, että jokainen kulku "sisältää" yksinkertaisen kulun alkupisteestä loppupisteeseensä. Todistetaan ensin eräs aputulos.

III 4.2 Lemma *Olkoon $\bar{x}$ kulku suhteikossa G. Jos kulku $\bar{x}$ ei ole yksinkertainen, niin se voidaan esittää muodossa $\bar{z} \star \bar{y} \star \bar{v}$, missä $\bar{y}$ on epätriviaali yksinkertainen kierros.*

Todistus. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$. Oletetaan, että $\bar{x}$ ei ole yksinkertainen. Pannaan merkille, että tällöin joukko $K = \{(i,j) : 0 \leq i < j \leq n \text{ ja } x_i = x_j\}$ on epätyhjä. Äärellisessä epätyhjässä lukujoukossa $\{j - i : (i,j) \in K\}$ on pienin luku; merkitään tätä lukua m:llä. Valitaan joukosta K sellainen alkio (k,l), että $l - k = m$. Merkitään $\bar{z} = (x_0, ..., x_k)$, $\bar{y} = (x_k, ..., x_l)$ ja $\bar{v} = (x_l, ..., x_n)$. Tällöin on voimassa $\bar{x} = \bar{z} \star \bar{y} \star \bar{v}$. Kulku $\bar{y}$ on kierros, koska $x_k = x_l$ ja kierros $\bar{y}$ on epätriviaali, koska sen askelten lukumäärä on $l - k = m \geq 1$. Lisäksi kierros $\bar{y}$ on yksinkertainen, koska muussa tapauksessa löydettäisiin sellainen joukon K alkio (i,j), että olisi voimassa $k \leq i < j \leq l$ ja $(i,j) \neq (k,l)$; tällöin olisi voimassa $j - i < l - k = m$, ristiriidassa luvun m minimaalisuuden kanssa. □

Esimerkki Edellä esiintynyt kulku $(s,a,i,p,p,u,a,k,a,u,p,p,i,a,s)$ ei ole yksinkertainen ja sille löytyy kolme edellisen lemman mukaista esitystä:

$$(s,a,i,p) \star (p,p) \star (p,u,a,k,a,u,p,p,i,a,s),$$

$$(s,a,i,p,p,u,a) \star (a,k,a) \star (a,u,p,p,i,a,s) \text{ ja}$$

$$(s,a,i,p,p,u,a,k,a,u,p) \star (p,p) \star (p,i,a,s).$$

III 4.3 Lemma *Olkoot x ja y suhteikon G pisteitä. Jos G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen y, niin G:ssä on yksinkertainen kulku pisteestä x pisteeseen y.*

Todistus. Jos G:ssä on kulku x:stä y:hyn, niin G:ssä on sellainen kulku $\bar{x}$ x:stä y:hyn, jonka askelten lukumäärä on pienin mahdollinen. Osoitamme, että kulku $\bar{x}$ on yksinkertainen. Teemme vastaväitteen: $\bar{x}$ ei ole yksinkertainen. Edellisen lemman nojalla voimme esittää $\bar{x}$:n muodossa $\bar{z} \star \bar{y} \star \bar{v}$, missä $\bar{y}$ on epätriviaali yksinkertainen kierros. Koska $\bar{y}$ on kierros, niin kulut $\bar{z}$ ja $\bar{v}$ ovat peräkkäisiä. Jono $\bar{z} \star \bar{v}$ on kulku G:ssä x:stä y:hyn ja sen askelten lukumäärä on $n-m$, missä n on $\bar{x}$:n ja m $\bar{y}$:n askelten lukumäärä; tästä seuraa ristiriita kulun $\bar{x}$ minimaalisuusominaisuuden kanssa, sillä $\bar{y}$:n epätriviaalisuuden nojalla on voimassa $m \geq 1$. □

Vahvan yhtenäisyyden tarkastelua varten tarvitsemme erästä kierrosten olemassaoloon liittyvää aputulosta.

III 4.4 Lemma *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä suhteikon G pisteille x ja y.*

A. G:ssä on kulku x:stä y:hyn ja kulku y:stä x:ään.

B. G:ssä on kierros, joka käy pisteissä x ja y.

C. G:ssä on pisteestä x lähtevä kierros, joka käy pisteessä y.

Todistus. A$\Longrightarrow$C: Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku G:ssä x:stä y:hyn ja olkoon $\bar{y} = (y_0, ..., y_m)$ kulku y:stä x:ään. Tällöin $\bar{x} \star \bar{y}$ on pisteestä x lähtevä kierros, joka käy pisteessä y.

C$\Longrightarrow$B: Tämä implikaatio on triviaalisti voimassa.

B$\Longrightarrow$A: Oletetaan, että ehto B on voimassa. Lemman III 4.1 nojalla G:ssä on tällöin pisteestä x lähtevä kierros $(z_0, ..., z_n)$, joka käy pisteessä y. Olkoon luvulle $k \in [n]$ voimassa $z_k = y$. Tällöin jono $(z_0, ..., z_k)$ on kulku G:ssä pisteestä x pisteeseen y. Aivan vastaavasti näemme, että G:ssä on kulku pisteestä y pisteeseen x. Olemme näyttäneet ehdon A olevan voimassa. □

Luonnehdimme nyt suhteikon vahvaa yhtenäisyyttä kulkujen olemassaolon avulla.

III 4.5 Lause *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä suhteikolle G:*

A. G on vahvasti yhtenäinen.

B. Kun x ja y ovat G:n pisteitä, niin G:ssä on kulku x:stä y:hyn ja kulku y:stä x:ään.

C. Kun x ja y ovat G:n pisteitä, niin G:ssä on kierros, joka käy pisteissä x ja y.

D. G:ssä on kierros, joka käy jokaisessa G:n pisteessä.

Todistus. Ehdot B ja C ovat edellisen lemman nojalla keskenään yhtäpitävät; lisäksi on selvää, että D$\Longrightarrow$C. Lauseen todistamiseksi riittää näinollen näyttää, että A$\Longrightarrow$B, C$\Longrightarrow$D ja B$\Longrightarrow$A.

A$\Longrightarrow$B: Oletamme, että G on vahvasti yhtenäinen. Osoitamme, että ehto B on voimassa. Teemme vastaväitteen: on olemassa sellaiset G:n pisteet x ja y, että $x \neq y$ ja G:ssä ei ole kulkua pisteestä x pisteeseen y. Merkitsemme $P = \{z \in P_G :$ G:ssä on kulku x:stä z:aan $\}$. Tällöin $x \in P$ ja $y \notin P$, joten $\emptyset \neq P \subsetneqq P_G$. Koska G on vahvasti yhtenäinen, niin G:ssä on nuoli joukosta P. Olkoon $\overrightarrow{zu}$ sellainen G:n nuoli, että $z \in P$ ja $u \notin P$. Koska $z \in P$, on G:ssä kulku $(x_0, ..., x_n)$ pisteestä x pisteeseen z. Mutta nyt $(x_0, ..., x_n, u)$ on kulku G:ssä, koska $x_n = z$ ja $\overrightarrow{zu} \in N_G$; tämä on kuitenkin ristiriidassa sen kanssa, että $u \notin P$. Vastaväite johti ristiriitaan eikä siis voi pitää paikkaansa. Näin ollen ehto B on voimassa.

C$\Longrightarrow$D: Oletamme, että ehto C toteutuu. Olkoon a G:n piste. Esitämme G:n pisteiden joukon muodossa $P_G = \{p_1, ..., p_n\}$. Ehdon C voimassaolosta ja Lemman III 4.1 tuloksesta seuraa, että jokaisella $i \leq n$, suhteikossa G on pisteestä a lähtevä kierros $\bar{x}_i$, joka käy pisteessä p_i. Nyt $\bar{x}_1 \star \bar{x}_2 \star \cdots \star \bar{x}_n$ on sellainen kierros G:ssä, joka käy jokaisessa G:n pisteessä.

B$\Longrightarrow$A: Oletamme, että ehto B toteutuu ja osoitamme G:n olevan vahvasti yhtenäinen. Olkoon P joukon P_G epätyhjä, aito osajoukko. Olkoot x ja y sellaiset P_G:n pisteet, että $x \in P$ ja $y \notin P$. Koska ehto B on voimassa, niin G:ssä on kulku $(x_0, ..., x_n)$ pisteestä x pisteeseen y. Koska $x_n = y$, niin joukko $\{i \in [n] : x_i \notin P\}$ on epätyhjä; merkitään k:lla tämän joukon pienintä lukua. Koska $x_0 = x \in P$, niin $k > 0$. Luvun k määritelmän nojalla on voimassa $x_{k-1} \in P$ ja $x_k \notin P$. Täten G:n nuoli $\overrightarrow{x_{k-1}x_k}$ on nuoli joukosta P. Koska ehdon B voimassaolosta seuraa, että G:ssä on myös kulku pisteestä y pisteeseen x, näemme aivan vastaavasti kuin edellä, että G:ssä on myös nuoli joukkoon P. Olemme osoittaneet, että ehto A toteutuu. □

Korollaari *Suhteikon G pisteen x vahvasti yhtenäinen komponentti on joukon*

$$\{y \in P_G : G\text{:ssä on kulku } x\text{:stä } y\text{:hyn ja kulku } y\text{:stä } x\text{:ään}\}$$

virittämä G:n alisuhteikko.

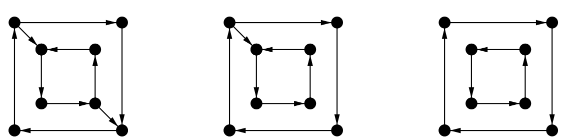
Todistus. Mainitut kaksi joukkoa yhtyvät Lemman III 4.4 nojalla. Merkitsemme kyseistä joukkoa A:lla ja merkitsemme

$$K = \{\bar{x} : \bar{x} \text{ on pisteestä } x \text{ lähtevä kierros } G\text{:ssä}\}.$$

Lemmojen 4.1(c) ja 4.4 nojalla on voimassa $A = \bigcup_{\bar{x}\in K} P(\bar{x})$. Merkitsemme jokaisella $\bar{x} \in K$, $H(\bar{x})$:llä sitä G:n alisuhteikkoa, joka määräytyy ehdoista $P_{H(\bar{x})} = P(\bar{x})$ ja $N_{H(\bar{x})} = N(\bar{x})$ ja panemme merkille, että $H(\bar{x})$ on edellisen lauseen nojalla vahvasti yhtenäinen. Merkitsemme $\mathcal{H} = \{H(\bar{x}) : \bar{x} \in K\}$. Koska jokaisella $H \in \mathcal{H}$ on voimassa $x \in P_H$, niin Lemman III 3.6 tuloksesta seuraa, että suhteikko $\bigvee \mathcal{H}$ on vahvasti yhtenäinen. Koska suhteikko $\bigvee \mathcal{H}$ on G:n vahvasti yhtenäinen alisuhteikko, jolle pätee, että $P_{\bigvee \mathcal{H}} = \bigcup_{H\in\mathcal{H}} P_H = \bigcup_{\bar{x}\in K} P(\bar{x}) = A$, niin myös A:n virittämä G:n alisuhteikko J on vahvasti yhtenäinen.

Olkoon C pisteen x vahvasti yhtenäinen komponentti suhteikossa G. Koska $x \in A = P_J$, niin Lemman III 3.7 nojalla on voimassa $J \prec C$; täten on voimassa $A = P_J \subset P_C$. Toisaalta, koska C on vahvasti yhtenäinen, niin Lauseesta III 4.5 seuraa, että $P_C \subset A$. Edellä esitetyn nojalla pätee, että $P_C = A$; tästä seuraa Lemman III 3.5 nojalla, että $C = J$. □

Esimerkki Alla suhteikossa G_1 voidaan mistä tahansa pisteestä kulkea mihin tahansa muuhun pisteeseen ja G_1 on siis vahvasti yhtenäinen. Suhteikot G_2 ja G_3 eivät ole vahvasti yhtenäisiä: suhteikossa G_2 on jokaisesta ulomman neliön pisteestä kulku jokaiseen muuhun suhteikon pisteeseen, mutta mistään sisemmän neliön pisteestä ei ole kulkua mihinkään ulomman neliön pisteeseen; G_3:ssa puolestaan ei ole yhtään kulkua jommankumman neliön pisteestä toisen neliön pisteeseen. Sekä G_2:ssa että G_3:ssa on samat vahvasti yhtenäiset komponentit, jotka ovat G_3:n esityksessä näkyvät kaksi "erillistä osaa".



G_1 G_2 G_3

Suhteikon yhtenäisyyttä ei voida luontevasti karakterisoida suhteikon kulkujen avulla, mutta niiden avulla voidaan antaa eräitä riittäviä ehtoja yhtenäisyydelle.

Määritelmä Suhteikon G piste x on G:n *juuri*, mikäli x:stä on kulku jokaiseen muuhun G:n pisteeseen.

Lauseen III 4.5 nojalla suhteikko G on vahvasti yhtenäinen jos ja vain jos jokainen G:n piste on G:n juuri; G:n yhtenäisyydelle riittää pelkkä yhden juuren olemassaolo.

Lause *Jos suhteikolla on juuri, niin suhteikko on yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon a suhteikon G juuri ja olkoon joukolle P voimassa $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$. Tällöin on olemassa sellaiset G:n pisteet y ja z, että $y \in P$ ja $z \notin P$. Koska a on G:n juuri, niin G:ssä on sellaiset kulut, $(y_0, ..., y_n)$ ja $(z_0, ..., z_k)$, että $y_0 = z_0 = a$, $y_n = y$ ja $z_k = z$.

Oletetaan, että $a \in P$. Tällöin $z_0 = a \in P$ ja $z_k = z \notin P$, joten löytyy sellainen $i \in [k]$, että $z_{i-1} \in P$ ja $z_i \notin P$; nyt $\overrightarrow{z_{i-1}z_i}$ on nuoli G:ssä joukosta P. Vastaavasti, jos $a \notin P$, niin löytyy sellainen $j \in [n]$, että $y_{j-1} \notin P$ ja $y_j \in P$; tässä tapauksessa $\overrightarrow{y_{j-1}y_j}$ on nuoli G:ssä joukkoon P. On osoitettu, että G on yhtenäinen. □

Panemme merkille, että aikaisempien tulosten nojalla saamme seuraavan lauseen.

III 4.6 Lause *Merkitään J:llä suhteikon G juurten joukkoa. Tällöin G:ssä ei ole nuolta joukkoon J. Jos $J \neq \emptyset$, niin joukon J virittämä G:n alisuhteikko on G:n vahvasti yhtenäinen komponentti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki Edellisen esimerkin suhteikon G_2 juurten joukko koostuu "ulomman neliön" pisteistä ja "ulompi neliö" on toinen G_2:n kahdesta vahvasti yhtenäisestä komponentista.

Tarkastelemme nyt kulkuja verkoissa. Jos $(x_0, ..., x_n)$ on kulku verkossa G, niin jokaisella $i \in [n]$ G:ssä on nuoli $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ ja täten myös nuoli $\overrightarrow{x_i x_{i-1}}$; tästä seuraa, että myös jono $(x_n, ..., x_0)$ on kulku verkossa G ja tästä puolestaan seuraa, että jono $(x_0, ..., x_n) \star (x_n, ..., x_0)$ on kierros verkossa G. Edellisen nojalla verkon G pisteille x ja y pätee, että G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen y jos ja vain jos G:ssä on kulku pisteestä y pisteeseen x.

Edellä tehtyjen huomioiden ja Lauseen III 4.5 avulla voimme johtaa verkon G yhtenäisyydelle seuraavat luonnehdinnat.

III 4.7 Lause *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät verkolle G:*

A. G on yhtenäinen.

B. Kaikilla $x, y \in P_G$, G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen y.

C. On olemassa sellainen piste $a \in P_G$, että jokaisella $x \in P_G$, G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen a.

D. G:ssä on kulku, joka käy jokaisessa G:n pisteessä.

Todistus. Koska verkko G on yhtenäinen jos ja vain jos G on vahvasti yhtenäinen, niin Lauseen III 4.5 tuloksesta seuraa, että ehdot A, B ja D ovat keskenään yhtäpitävät. Implikaatio B$\Longrightarrow$C on triviaalisti voimassa. Täten lauseen todistamiseksi riittää näyttää, että C$\Longrightarrow$B.

C$\Longrightarrow$B: Oletamme, että ehto C on voimassa. Olkoot x ja y G:n pisteitä. Osoitamme, että G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen y. Oletuksen nojalla G:ssä on kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ pisteestä x pisteeseen a ja kulku $\bar{y} = (y_0, ..., y_m)$ pisteestä y pisteeseen a. Koska G on verkko, jono $\tilde{y} = (y_m, ..., y_0)$ on kulku G:ssä. Kulut $\bar{x}$ ja $\tilde{y}$ ovat peräkkäiset, joten jono $\bar{x} \star \tilde{y}$ on kulku G:ssä; selvästikin tämä on kulku pisteestä x pisteeseen y. □

Luonnehdimme lopuksi suhteikon kahden pisteen välisen kulun olemassaoloa suhteikon relaation avulla.

III 4.8 Lemma *Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko, olkoot x ja y G:n pisteitä ja olkoon n luonnollinen luku. Tällöin G:ssä on n–askeleinen kulku x:stä y:hyn jos ja vain jos $x \in R^n\{y\}$.*

Todistus. Merkitsemme $K_n = \{z \in X : G\text{:ssä on } n\text{-askeleinen kulku } z\text{:sta } y\text{:hyn}\}$ ja osoitamme induktiolla luvun n suhteen, että $K_n = R^n\{y\}$.

Jos $n = 0$, niin $K_n = \{y\} = R^n\{y\}$.

Olkoon n sellainen luonnollinen luku, että $n > 0$ ja $K_{n-1} = R^{n-1}\{y\}$. Tällöin $K_n = R^n\{y\}$, sillä induktio–oletusta hyväksikäyttäen näemme jokaisella $z \in X$ olevan voimassa

$$\begin{aligned} z \in K_n &\Longleftrightarrow \exists \text{ sellainen } G\text{:n kulku } (x_0, ..., x_n), \text{ että } x_0 = z \text{ ja } x_n = y \\ &\Longleftrightarrow \exists \text{ sellainen } G\text{:n kulku } (x_1, ..., x_n), \text{ että } x_n = y \text{ ja } \overrightarrow{zx_1} \subset R \\ &\Longleftrightarrow \exists \text{ sellainen } x_1 \in R^{n-1}\{y\}, \text{ että } z \in R\{x_1\} \\ &\Longleftrightarrow z \in R\left(R^{n-1}\{y\}\right) \\ &\Longleftrightarrow z \in R^n\{y\}. \qquad \square \end{aligned}$$

III 4.9 Korollaari *Suhteikossa $G = (X, R)$ on kulku pisteestä x pisteeseen y jos ja vain jos $x \in R^\infty\{y\}$.*

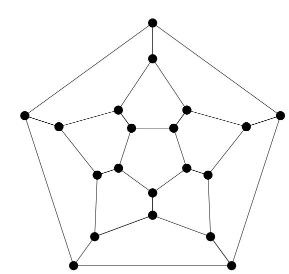
5. Hamiltonin kulut.

Näimme edellä, että jokaisessa vahvasti yhtenäisessä suhteikossa on kulku (itse asiassa kierros), joka käy jokaisessa suhteikon pisteessä. Seuraavaksi tarkastelemme sellaisia suhteikkoja, joissa on kulku tai kierros, joka käy jokaisessa suhteikon pisteessä täsmälleen yhden kerran.

Määritelmä Olkoon G suhteikko. *Hamiltonin kulku* G:ssä on yksinkertainen kulku G:ssä, joka käy jokaisessa G:n pisteessä.

Hamiltonin kierros G:ssä on suljettu Hamiltonin kulku.

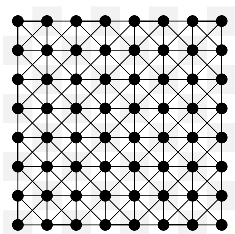
"Hamiltonin kulut" ovat saaneet nimensä irlantilaisen matematiikon W.R. Hamiltonin mukaan, joka ensimmäisenä eksplisiittisesti tutki näitä kulkuja. Hamilton osoitti, että jokaisessa avaruuden säännölliseen monitahokkaaseen liittyvässä verkossa (kuten Luvussa III 1 mainituissa kuutioon ja säännölliseen 12–tahokkaaseen liittyvissä verkoissa) on Hamiltonin kulku; v. 1856 hän esitti "pelin", joka perustui erilaisten Hamiltonin kierrosten etsimiseen säännölliseen 12–tahokkaaseen liittyvästä verkosta ja hän onnistui jopa kauppaamaan pelin lelutehtailijalle. Kun esitetään säännöllinen dodekaedri sopivan tasoprojektion avulla, niin siihen liittyvä verkko saa seuraavanlaisen esityksen, josta näkyy helposti, että verkossa on Hamiltonin kierros.



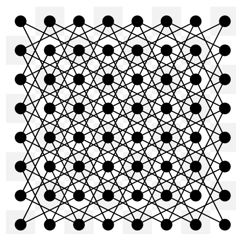
Harjoitustehtävä. Osoita, että yllä kuvatussa verkossa on Hamiltonin kierros.

“Hamiltonin kulkuja” oli kuitenkin erilaisissa konkreettisissä yhteyksissä tarkasteltu jo paljon ennen Hamiltonia. Esimerkiksi eräät ikivanhat shakkipelin eri nappuloiden liikkeisiin liityvät ongelmat voidaan palauttaa Hamiltonin kulkujen etsimiseen nappuloiden siirtojen määräämistä verkoista.

Esimerkki Tarkastelemme jälleen shakkipelin kuninkaaseen ja hevoseen liittyviä verkkoja (katso Esimerkkiä III 2.5):



K

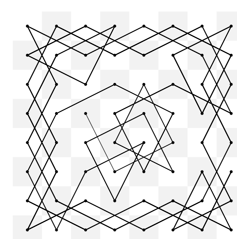


H

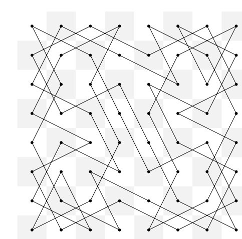
On triviaalia, että verkossa K on Hamiltonin kulku ja lukija voi aivan helposti myös löytää K:sta Hamiltonin kierroksen. Paljon mielenkiintoisempi ongelma on se, onko verkossa H Hamiltonin kulkua tai kierrosta. Tämä ongelma on ikivanha, mutta se tunnetaan kuitenkin usein “Eulerin ongelman” nimellä, koska suuri 1700–luvun matemaatikko Leonard Euler oli ensimmäinen, joka tarkasteli ongelmaa matemaattiselta kannalta; hän julkaisi siitä kirjoitelman “Ratkaisu erääseen kiinnostavaan ongelmaan, jonka tutkiminen näyttää mahdottomalta”.

Myös verkossa H on Hamiltonin kierros. Hamiltonin kulkua verkossa H kutsutaan “ratsun marssiksi”. Näitä ratsun marsseja on löytynyt tuhansia ja kiinnostavimpia ovat sellaiset, joilla on joitakin säännönmukaisuusominaisuuksia. Lukija voi helposti itsekin konstruoida ratsun marsseja valitsemalla aloitusruudun mielivaltaisesti ja soveltamalla sen jälkeen joka askeleella nk. Warnsdorfin sääntöä: seuraavaksi siirrytään sellaiseen ruutuun, josta on pienin mahdollinen määrä siirtoja “vapaisiin” ruutuihin; sääntö voi tosin joskus (harvoin) johtaa umpikujaan, mutta yleensä se toimii halutulla tavalla.

Seuraavassa kuvassa on vasemmalla esitetty yksi (Warnsdorfin säännön avulla konstruoitu) ratsun marssi piirtämällä kulun askelina olevat viivat näkyviin; kuva ei määrää “kulkusuuntaa”, mutta valitsemalla “lähtöpiste” saadaan viivoja seuraamalla määrätyksi ratsun marssi. Keskellä on esitetty yksi ratsun marssi numeroimalla shakkilaudan ruudut ratsun kulun määräämässä järjestyksessä; tämän marssin on löytänyt viime vuosisadan venäläinen shakinpelaaja Janisch ja sillä on se hämmästyttävä lisäominaisuus, että ruutujen numerointi antaa “puolittaisen taikaneliön”: jokaisen vaakarivin numeroiden summa on sama luku (260) ja jokaisen pystyrivin numeroiden summa on sama luku (260); ei ole tunnettua, onko olemassa sellaista ratsun marssia, joka antaisi “oikean” taikaneliön (jolloin myös kummankin päähalkaisijan numeroiden summa on sama “maaginen” luku 260). Alla oikealla on esitetty Janischin keksimän marssin kulku piirtämällä sen määräämät viivat näkyviin; tästä esityksestä näkee, että marssilla on “puolimaagisuuden” lisäksi muitakin säännönmukaisuus– ja symmetriaominaisuuksia.

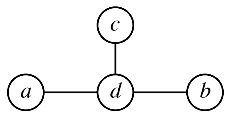


50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

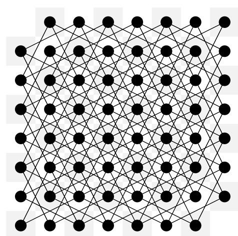


Jos $\bar{x}$ on Hamiltonin kulku suhteikossa G, niin $\bar{x}$ on myös Hamiltonin kulku suhteikossa G^s; tästä seuraa, että suhteikko G^s on yhtenäinen ja näin muodoin, Lauseen III 3.3 nojalla, suhteikko G on yhtenäinen. Toisaalta, jos $\bar{x}$ on G:n Hamiltonin kierros, niin Lauseen III 4.5 tuloksesta seuraa, että G on vahvasti yhtenäinen. Vahva yhtenäisyyskään ei ole riittävä ehto Hamiltonin kulun olemassaololle.

III 5.2 Esimerkkejä **(a)** Alla kuvattu verkko on yhtenäinen ja täten vahvasti yhtenäinen, mutta siinä ei ole Hamiltonin kulkua, koska jokainen kulku, joka käy kaikissa verkon pisteissä, käy ainakin kaksi kertaa verkon “keskipisteessä” d.



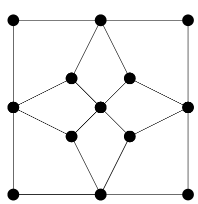
(b) Poistetaan shakkilaudan ruudukosta kaksi vastakkaista kulmaruutua ja tarkastellaan tämän typistetyn ruudukon virittämää hevosen liikkeiden määräämän verkon H aliverkkoa H':



Osoitetaan, ettei verkossa H' ole Hamiltonin kulkua, toisin sanoen, ettei typistetyssä ruudukossa ole hevosen marssia.

Ratkaisu: Hevosen liikkuessa ruudun väri vaihtuu jokaisella siirrolla. Täten, jos verkossa H' olisi Hamiltonin kulku, niin valkoisten ja mustien ruutujen lukumäärät voisivat erota toisistaan korkeintaan yhdellä (jos kulku olisi kierros, niin lukumäärien olisi oltava samat). Koska yllä kuvatussa typistetyssä ruudukossa on 32 mustaa ruutua ja 30 valkoista ruutua, niin siihen liittyvässä verkossa H' ei voi olla Hamiltonin kulkua.

(c) Edellisessä esimerkissä käytetty päättely on usein käyttökelpoinen Hamiltonin kulkuihin liittyvissä tarkasteluissa. Annetaan sen käytöstä toinenkin esimerkki osoittamalla, ettei alla kuvatussa verkossa ole Hamiltonin kulkua.



Ratkaisu: Merkitään kyseistä verkkoa G:llä. Verkossa G on viisi pistettä, joiden aste on neljä; merkitään näiden viiden pisteen joukkoa A:lla ja merkitään joukkoa $P_G \smallsetminus A$ B:llä. Pannaan merkille, etteivät mitkään kaksi joukon A pistettä ole vierekkäin G:ssä eivätkä mitkään kaksi joukon B pistettä ole vierekkäin G:ssä; tästä seuraa, että jos $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ on kulku G:ssä, niin jokaisella $i \in [n]$ on voimassa $x_i \in A \iff x_{i-1} \in B$ ja tästä seuraa edelleen, että joukkojen $\{i \leq n : x_i \in A\}$ ja $\{i \leq n : x_i \in B\}$ alkioiden lukumäärät voivat erota toisistaan korkeintaan yhdellä. Koska on voimassa $|A| = 5$ ja $|B| = 8$, niin edellisestä seuraa, ettei mikään yksinkertainen kulku verkossa G voi kulkea kaikkien G:n pisteiden kautta.

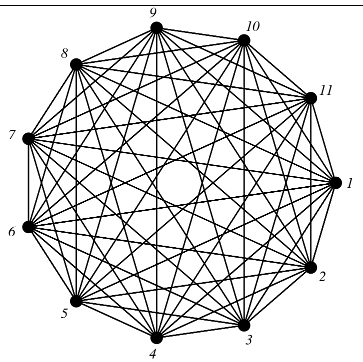
Yleensä on vaikeaa päätellä onko annetussa suhteikossa tai annetussa verkossa Hamiltonin kulkua. Tunnetaan kyllä monia suhteellisen yksinkertaisia riittäviä ehtoja Hamiltonin kulun olemassaololle, mutta yksinkertaisia välttämättömiä ja riittäviä ehtoja ei ole löytynyt. Ei myöskään tunneta mitään "tehokkaita" algoritmeja, joiden avulla voitaisiin selvittää onko annetussa suhteikossa Hamiltonin kulkua vai ei.

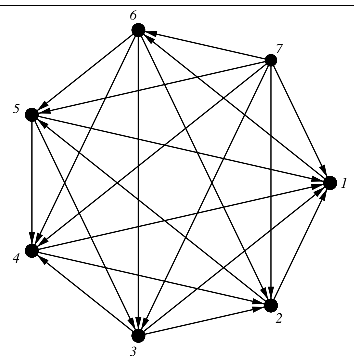
Annetaan nyt eräs riittävä ehto Hamiltonin kulun olemassaololle.

Määritelmä Suhteikko G on *täydellinen*, mikäli kaikilla $x, y \in P_G$, jos $x \neq y$, niin G:ssä on joko nuoli $\overrightarrow{xy}$ tai nuoli $\overrightarrow{yx}$.

Täydellinen verkko eli täydellinen suhteikko, joka on verkko, on hyvin yksinkertaista muotoa: jos täydellisen verkon G pistejoukko on X, niin G:n viivojen joukko on $\{\overline{xy} : x, y \in X, x \neq y\}$. Täydellistä verkkoa, jonka pistejoukko on X, merkitään symbolilla K_X. Verkolle $K_{[n]}$, missä $n \in \mathbb{N}$, käytetään lyhennettyä merkintää K_n. Selvästikin, jos $|X| = n$, niin verkko K_X on isomorfinen verkon K_n kanssa.

Seuraavassa kuvassa on vasemmalla kuvattu verkko K_{11} ja oikealla eräs täydellinen suhteikko, jonka pisteiden joukko on [7].





On triviaalia, että täydellisessä verkossa on Hamiltonin kulku. Osoitetaan nyt, että myös jokaisessa täydellisessä suhteikossa on Hamiltonin kulku. Todistetaan ensin eräs aputulos.

III 5.3 Lemma *Olkoon G täydellinen suhteikko, olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku G:ssä ja olkoon u sellainen G:n piste, joka ei kuulu joukkoon $P(\bar{x})$. Tällöin on olemassa sellainen $0 \le j \le n+1$, että jono $\bar{z} = (z_0, ..., z_{n+1})$, missä $z_i = x_i$ kun $i < j$, $z_j = u$ ja $z_i = x_{i-1}$ kun $i > j$, on kulku suhteikossa G.*

Todistus. Jos G:ssä on nuoli $\overrightarrow{ux_0}$, niin voimme valita $j = 0$ ja jos G:ssä on nuoli $\overrightarrow{x_n u}$, niin voimme valita $j = n+1$.

Oletamme, ettei G:ssä ole nuolta $\overrightarrow{ux_0}$ eikä nuolta $\overrightarrow{x_n u}$. Koska G on täydellinen, niin G:ssä on tällöin nuolet $\overrightarrow{x_0 u}$ ja $\overrightarrow{ux_n}$. Merkitseme k:llä epätyhjän joukon $A = \{i \in [n] : \overrightarrow{x_i u} \in N_G\}$ suurinta lukua ja panemme merkille, että $1 \le k < n$. Osoitamme, että luvulla $j = k+1$ on lemmassa vaadittu ominaisuus. Määrittelemme jonon $\bar{z}$ kuten lemmassa. Koska $1 < j < n+1$ ja koska jono $(x_0, ..., x_n)$ on kulku G:ssä, niin näemme, että jono $\bar{z}$ on kulku G:ssä, mikäli G:ssä on nuolet $\overrightarrow{x_{j-1} u}$ ja $\overrightarrow{ux_j}$. Koska $j - 1 = k$ ja $k \in A$, G:ssä on nuoli $\overrightarrow{x_{j-1} u}$. Luvun k maksimaalisuudesta seuraa, että $k + 1 \notin A$ eli $j \notin A$. Täten G:ssä ei ole nuolta $\overrightarrow{x_j u}$; tästä seuraa G:n täydellisyyden nojalla, että G:ssä on nuoli $\overrightarrow{ux_j}$. □

III 5.4 Lause *Jokaisessa täydellisessä suhteikossa on Hamiltonin kulku.*

Todistus. Olkoon G täydellinen suhteikko. Merkitsemme n:llä suurinta lukua k, jolla on olemassa sellainen kulku $\bar{z} = (z_0, ...z_k)$ suhteikossa G, että $|P(\bar{z})| = k$;

panemme merkille, että $0 \le n \le |P_G|$. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ sellainen kulku G:ssä, että $|P(\bar{x})| = n$. Osoitamme, että $P(\bar{x}) = P_G$. Teemme vastaväitteen: on olemassa $u \in P_G \setminus P(\bar{x})$. Edellisen lemman nojalla on olemassa sellainen kulku $\bar{z} = (z_0, ..., z_{n+1})$ G:ssä, että $P(\bar{z}) = P(\bar{x}) \cup \{u\}$. Koska $|P(\bar{x})| = n$ ja $u \notin P(\bar{x})$, on voimassa $|P(\bar{z})| = n+1$. Tämä on ristiriidassa luvun n maksimaalisuuden kanssa. Täten vastaväite on väärä ja on voimassa $P(\bar{x}) = P_G$. Koska $|P(\bar{x})| = n$, niin kulku $\bar{x}$ on yksinkertainen; näin ollen $\bar{x}$ on Hamiltonin kulku. □

Jos $(x_0, ..., x_n)$ on Hamiltonin kulku suhteikossa G, niin piste x_0 on selvästikin suhteikon G juuri. Täten saamme seuraavan tuloksen.

Korollaari *Jokaisella epätyhjällä täydellisellä suhteikolla on juuri.*

Harjoitustehtävä. Etsi Hamiltonin kulku edellä kuvatusta seitsemän pisteen täydellisestä suhteikosta. Onko suhteikossa Hamiltonin kierrosta?

Täydellisessä suhteikossa ei ole välttämättä Hamiltonin kierrosta, kuten nähdään esimerkiksi tarkastelemalla suhteikkoa H: $P_H = \{1, 2\}$ ja $N_H = \{\overrightarrow{12}\}$. Edellä totesimme, että välttämätön ehto Hamiltonin kierroksen olemassaololle on suhteikon vahva yhtenäisyys; osoitamme nyt, että tämä välttämätön ehto on täydellisen suhteikon tapauksessa myös riittävä.

III 5.5 Lause *Täydellisessä suhteikossa on Hamiltonin kierros jos ja vain jos suhteikko on vahvasti yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon H vahvasti yhtenäinen täydellinen suhteikko. Osoitamme, että H:ssa on Hamiltonin kierros. Tyhjä jono on tyhjän suhteikon Hamiltonin kierros, joten voimme olettaa, että H on epätyhjä suhteikko. Tällöin H:ssa on ainakin nolla–askelisia yksinkertaisia kierroksia (x). Panemme merkille, että jos $\bar{x}$ on yksinkertainen kierros H:ssa, niin $\bar{x}$:n askelten lukumäärä on korkeintaan sama kuin H:n pisteiden lukumäärä; tästä seuraa, että H:ssa on sellainen yksinkertainen kierros $\bar{z} = (z_0, ..., z_m)$, että jokaisen muun H:n yksinkertaisen kierroksen askelten lukumäärä on korkeintaan m. Osoitamme, että $\bar{z}$ on Hamiltonin kierros eli että $P(\bar{z}) = P_H$.

Teemme vastaväitteen: $P(\bar{z}) \ne P_H$. Merkitsemme $P = P_H \setminus P(\bar{z})$. Tällöin $\emptyset \ne P \subsetneqq P_H$. Tarkastelemme kahta eri tapausta:

Tapaus 1^o. Oletamme, että on olemassa sellainen joukon P piste p ja sellaiset joukon $P(\bar{z})$ pisteet x ja y, että $x \ne y$ ja H:ssa on nuolet $\overrightarrow{xp}$ ja $\overrightarrow{py}$. Lemman III 4.1(c) nojalla voimme olettaa, että on voimassa $x = z_0$. Merkitsemme l:llä epätyhjän lukujoukon $\{j \in [m] : \overrightarrow{pz_j} \in N_H\}$ pienintä lukua. Tällöin pätee, että $\overrightarrow{z_{l-1}p} \in N_H$ ja $\overrightarrow{pz_l} \in N_H$ ja tästä seuraa, että jono $\bar{z}' = (z_0, ..., z_{l-1}, p, z_l, ..., z_m)$ on kulku H:ssa. Koska $\bar{z}$ on kierros, niin myös $\bar{z}'$ on kierros. Koska kierros $\bar{z}$ on yksinkertainen ja $p \notin P(\bar{z})$, niin kierros $\bar{z}'$ on yksinkertainen; tämä on kuitenkin ristiriidassa luvun m maksimaalisuuden kanssa sillä kierroksen $\bar{z}'$ askelten lukumäärä on $m + 1$.

Tapaus 2^o. Oletamme, ettei millään joukon P pisteellä ole olemassa kahta joukon $P(\bar{z})$ pistettä x ja y, joille olisi voimassa $\overrightarrow{xp} \in N_H$ ja $\overrightarrow{py} \in N_H$. Tällöin suhteikon H täydellisyydestä seuraa, että on voimassa $P = Q \cup R$, missä $Q = \{q \in P : \overrightarrow{xq} \in N_H$ jokaisella $x \in P(\bar{z})\}$ ja $R = \{r \in P : \overrightarrow{ry} \in N_H$ jokaisella $y \in P(\bar{z})\}$. Joukko $Q \cup R = P$ on vastaoletuksen nojalla epätyhjä, joten jompikumpi joukoista Q ja R on epätyhjä. Oletamme, että $Q \neq \emptyset$; tapauksen $R \neq \emptyset$ voimme käsitellä aivan vastaavasti.

Suhteikon H on vahvasta yhtenäisyydestä seuraa, että H:ssä on nuoli $\overrightarrow{qp}$, missä $q \in Q$ ja $p \notin Q$. Tarkastelemme kahta eri tapausta.

Tapaus (a). Piste p kuuluu joukkoon $P(\bar{z})$. Lemman III 4.1(c) nojalla voimme olettaa, että on voimassa $p = z_0$ eli $p = z_m$. Nyt kuitenkin näemme, koska $q \in Q$, että jono $(z_0, ..., z_{m-1}, q, z_m)$ on $m + 1$–askeleinen yksinkertainen kierros H:ssa ja tämä on ristiriidassa luvun m maksimaalisuusominaisuuden kanssa.

Tapaus (b). Piste p kuuluu joukkoon R. Tässä tapauksessa jono $(z_0, q, p, z_1, ..., z_m)$ on yksinkertainen kierros H:ssä ja jälleen saamme ristiriidan.

Koska kaikki eri tapaukset johtivat ristiriitaan, vastaväite on väärä ja $\bar{z}$ on Hamiltonin kierros H:ssa. □

Annamme lopuksi erään käyttökelpoisen riittävän (muttei välttämättömän) ehdon Hamiltonin kierroksen olemassaololle verkossa. Todistuksessa tarvitsemme seuraavaa apulausetta.

III 5.6 Lemma *Olkoon $(x_0, ..., x_n)$ Hamiltonin kulku verkossa H. Jos H:ssa ei ole Hamiltonin kierrosta, niin on voimassa $d_H(x_0) + d_H(x_n) < p_H$.*

Todistus. Oletamme, ettei H:ssa ole Hamiltonin kierrosta; panemme merkille, että tällöin $\overline{x_0x_n} \notin V_H$. Panemme myös merkille, että koska $(x_0, ..., x_n)$ on Hamiltonin kulku muttei kierros, niin $p_H = n + 1$. Merkitsemme $A = \{i \in [n] : \overline{x_0x_i} \in V_H\}$ ja

$B = \{j \in [n] : \overline{x_nx_j} \in V_H\}$ ja panemme merkille, että $d_H(x_0) = |A|$ ja $d_H(x_n) = |B|$. Jokaisella $i \in A$ on voimassa $i - 1 \notin B$, sillä muussa tapauksessa jono

$$(x_0, x_i, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, x_n, x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_1, x_0)$$

olisi Hamiltonin kierros verkossa H. Edellisen nojalla joukossa $\{0, ..., n\}$ on ainakin $|A|$ alkiota j, missä $j < n$, jotka eivät kuulu joukkoon B; koska myöskään luku n ei kuulu joukkoon B, saamme epäyhtälön $|B| < n + 1 - |A|$ eli $d_H(x_0) + d_H(x_n) < p_H$. □

III 5.7 Lause *Olkoon G sellainen verkko, jonka pisteiden lukumäärä on suurempi kuin kaksi ja jonka kaikille pisteille $a \neq b$ pätee, että jos a ja b eivät ole vierekkäin G:ssä, niin $d_G(a) + d_G(b) \geq p_G$. Tällöin verkossa G on Hamiltonin kierros.*

Todistus. Merkitsemme

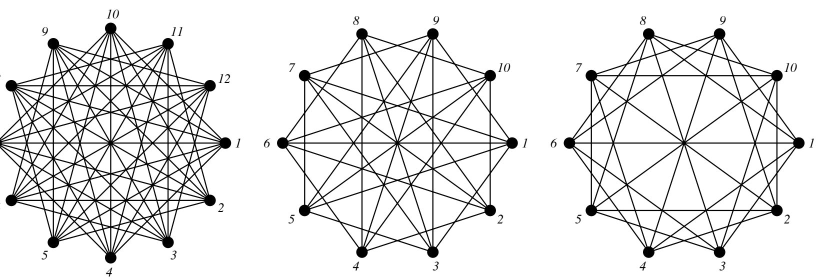
$$W = \{\overline{xy} : x, y \in P_H, x \neq y \text{ ja } \overline{xy} \notin V_H\}$$

ja esitetämme joukon W muodossa $\{v_1, ..., v_m\}$. Merkitsemme jokaisella $0 \leq i \leq m$ H_i:llä ehtojen $P_{H_i} = P_G$ ja $V_{H_i} = V_G \cup \{v_j : j \in [i]\}$ määräämää verkkoa. Panemme merkille, että $H_0 = G$ ja H_m on täydellinen verkko.

Täydellisessä verkossa H_m on enemmän kuin kaksi pistettä ja täten H_m:ssä on Hamiltonin kierros. Osoitamme, että myös verkossa $H_0 = G$ on tällainen kierros. Teemme vastaväitteen: H_0:ssa ei ole Hamiltonin kierrosta. Merkitsemme k:lla lukujoukon $\{i \in [m] : H_i$:ssä on Hamiltonin kierros$\}$ pienintä lukua ja merkitsemme edelleen $H_{k-1} = H$, $H_k = J$ ja $v_k = v$. Tällöin verkossa J on Hamiltonin kierros, mutta verkossa H ei ole. Osoitamme, että verkossa H on Hamiltonin kulku. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_t)$ Hamiltonin kierros verkossa J. Koska $P_H = P_J$ ja $V_H = V_J \setminus \{v\}$, on jollain $i \in [t]$ oltava voimassa $\overline{x_{i-1}x_i} = v$: muussa tapauksessa $\bar{x}$ olisi Hamiltonin kierros myös verkossa H. Lemman III 3.1(c) nojalla voimme olettaa, että on voimassa $\overline{x_0x_1} = v$. Kierroksen $\bar{x}$ yksinkertaisuudesta seuraa nyt, että jokaisella $1 < i \leq n$ on voimassa $\overline{x_{i-1}x_i} \neq v$ ja tästä seuraa, että jono $\bar{x}' = (x_1, ..., x_n)$ on kulku verkossa H; jono $\bar{x}'$ on Hamiltonin kulku, koska on voimassa $x_n = x_0$ ja täten $\{x_1, ..., x_n\} = \{x_0, ..., x_n\}$. Edellisen lemman nojalla on voimassa $d_H(x_1) + d_H(x_m) < p_H$. Koska G on H:n aliverkko ja $P_G = P_H$, niin edellisestä seuraa, että $d_G(x_1) + d_G(x_m) < p_G$; tästä epäyhtälöstä seuraa kuitenkin ristiriita lauseen oletuksen kanssa, sillä pisteet x_1 ja x_m eivät ole vierekkäin G:ssä, koska $\overline{x_1x_m} = \overline{x_0x_1} = v = v_k$ ei ole G:n viiva. □

III 5.8 Korollaari *Verkossa G on Hamiltonin kierros, mikäli $|P_G| > 2$ ja jokaisella $x \in P_G$ on voimassa $d_G(x) \geq \frac{1}{2}p_G$.*

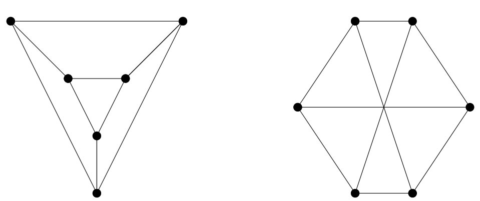
Edellisten tulosten nojalla voimme päätellä, että alla olevista verkoista löytyy Hamiltonin kierrokset:



Harjoitustehtävä. Etsi yllä kuvatuista verkoista Hamiltonin kierrokset.

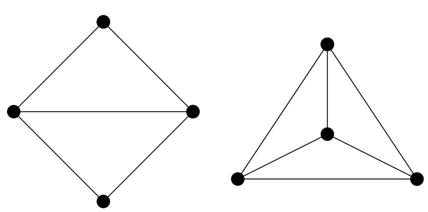
Harjoitustehtäviä Lukuun III

1. Osoita, että verkot



eivät ole keskenään isomorfiset.

2. Osoita, että verkot



eivät ole keskenään isomorfiset.

3. Perustele kohdissa a) ja b) miksi annetut kaksi verkkoa eivät ole keskenään isomorfiset.

(a)

(b)

4. Olkoon S suhteikko, jolla on seuraajaluettelo
   a : b c f   c : b d f   e : d e f
   b : a d f   d : e   f :
   Etsi S:n relaation matriisi sekä transitiivinen sulkeuma (katso tehtäviä I 3 ja I 10).

5. Piirrä verkko, jolla on seuraajaluettelo
   a : b f g i   d : c e   g : a c j   j : g h i
   b : a c   e : d f h i   h : c e j
   c : b d g h   f : a e   i : a e j
   [Ohje: a,b,c,d,e,f reunalle, j keskelle.]

6. Etsi suhteikon S:
   a : e   c : b   e : d   g : b
   b : c f   d : a e   f : g
   yhtenäiset komponentit.

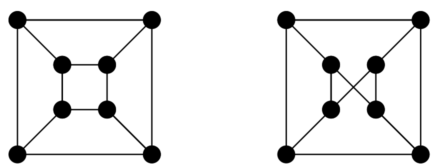
7. Olkoon S suhteikko, jolla on seuraajaluettelo:

$$\begin{array}{lllll} a : a\ e & b : c & c : b\ h & d : d & e : g \\ f : i & g : b & h : e\ h & i : d\ f & \end{array}$$

   Etsi S:n vahvasti yhtenäiset komponentit.

8. Verkko G on *kaksijakoinen* jos joukolla P_G on sellainen esitys $P_G = A \cup B$, etteivät mitkään kaksi joukon A pistettä ole vierekkäin G:ssä eivätkä mitkään kaksi joukon

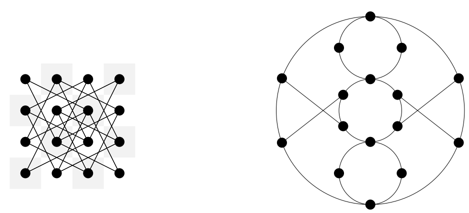
B pistettä ole vierekkäin G:ssä. Pane merkille, että jos kaksi verkkoa G ja H ovat keskenään isomorfiset, niin G on kaksijakoinen jos ja vain jos H on kaksijakoinen ja käytä tätä huomiota hyväksesi sen osoittamiseen, että alla kuvatut kaksi verkkoa eivät ole keskenään isomorfiset.



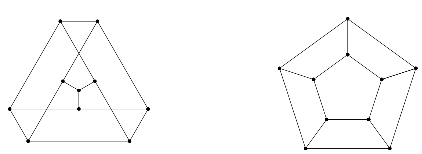
9. Olkoon $\mathcal{Y}$ äärellinen perhe tasoon piirrettyjä ympyröitä. Merkitään G:llä verkkoa, jonka pistejoukon muodostavat ne alueet, joihin perheen $\mathcal{Y}$ ympyrät jakavat tason ja jossa kahta aluetta yhdistää viiva silloin kun niiden reunojen leikkaukseen sisältyy (surkastumaton) ympyränkaari. Näytä, että verkko G on kaksijakoinen.

   [Ohje: tarkastele niiden ympyröiden $Y \in \mathcal{K}$ lukumäärää, joiden sisäpuolella alue $A \in P_G$ on.]

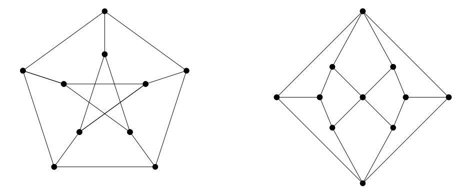
10. Osoita, että seuraavat kaksi verkkoa ovat keskenään isomorfiset (vasemmanpuoleinen verkko määräytyy hevosen liikkeistä 4×4 shakkilaudalla).



11. Tutki ovatko seuraavat kaksi verkkoa keskenään isomorfiset:

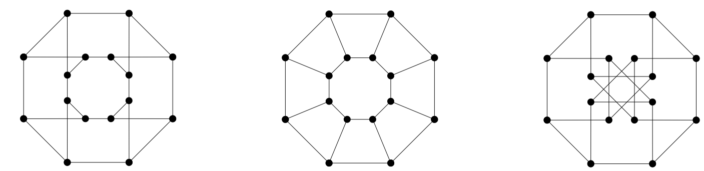


12. Näytä, että alla kuvatut verkot eivät ole keskenään isomorfiset. (Vasemmanpuoleinen verkko tunnetaan nimellä *Petersenin verkko* ja oikeanpuoleinen nimellä *Herschelin verkko*).



13. Osoita, että kahdessa edellisessä tehtävässä vasemmalla kuvatut verkot ovat isomorfisia ehtojen $P_G = \mathcal{P}_2[5]$ ja $V_G = \{\overline{AB} : A, B \in \mathcal{P}_2[5] \text{ ja } A \cap B = \emptyset\}$ määräämän verkon G kanssa.

14. Onko verkko G isomorfinen verkon H tai verkon I kanssa? Perustele vastauksesi!



G H I

15. On käytettävissä kaksi eri väriä. Väritetään kuuden pisteen täydellisen verkon K_6 jokainen viiva jommallakummalla värillä. Osoita, että näin väritetystä verkosta löytyy yksivärinen kolmio (toisin sanoen, löytyy kolme verkon pistettä a, b ja c siten, että viivoilla $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ ja $\overline{ca}$ on kaikilla sama väri).

16. Näytä, että edellisen tehtävän johtopäätös ei päde verkossa K_5.

Verkon G *komplementti* on se verkko $\tilde{G}$, jolla on samat pisteet kuin G:llä ja jossa kahden eri pisteen $x, y \in P_G$ välillä on viiva jos ja vain x:n ja y:n välillä ei ole viivaa G:ssä.

17. Osoita, että keskenään isomorfisten verkkojen komplementit ovat keskenään isomorfiset.

18. Osoita, että on olemassa tasan kaksi keskenään epäisomorfista verkkoa, joissa on 5 pistettä ja 8 viivaa.

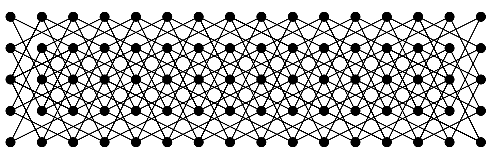
    [Ohje: tarkastele komplementteja.]

19. Montako keskenään epäisomorfista 5-pisteistä ja 7-viivaista verkkoa on olemassa?

    [Ohje: tarkastele komplementteja.]

20. Jos $\mathcal{L}$ on äärellinen perhe joukkoja, niin merkitään $G_{\mathcal{L}}$:llä sitä verkkoa, jonka pisteiden joukkona on $\mathcal{L}$ ja jonka viivojen joukko koostuu niistä viivoista $\overline{AB}$, missä $A, B \in \mathcal{L}$, $A \neq B$ ja $A \cap B \neq \emptyset$; tällaista verkkoa $G_{\mathcal{L}}$ kutsutaan *joukkoverkoksi*.
Osoita, että jokainen verkko on isomorfinen jonkun joukkoverkon kanssa.
[Ohje: Tarkastele joukkoja, jotka koostuvat niistä verkon viivoista, joilla on annettu verkon piste toisena päätepisteenä.]

21. Laske seuraavan verkon viivojen lukumäärä:



22. *Ikosaedri* on säännöllinen monitahokas, jonka tahkoina on $t = 20$ tasasivuista kolmiota. Mikä on ikosaedrin särmien lukumäärä s? (Tarkastele verkkoa, jonka pisteinä ovat tahkot ja viivat vastaavat särmiä.)

23. Mikä on ikosaedrin kärkien lukumäärä k, kun *Eulerin kaavan* (katso Luvun V harjoitustehtävää 17) nojalla on $k - s + t = 2$, ja montako särmää kohtaa toisensa samassa kärjessä?

24. Verkko G on *säännöllinen*, mikäli kaikilla $x, y \in P_G$ on voimassa $d_G(x) = d_G(y)$. Jos G on säännöllinen verkko, jonka jokaisen pisteen aste on k, niin sanotaan, että G on *k–säännöllinen* verkko.
(a) Osoita, että jos on olemassa epätyhjä n–pisteinen k–säännöllinen verkko, niin $k < n$ ja jompikumpi luvuista n tai k on parillinen.
(b) Osoita, että jos G on n–pisteinen k–säännöllinen verkko, niin G:n komplementti $\tilde{G}$ on $n - k - 1$–säännöllinen.
(c) Olkoon n parillinen. Osoita, että on olemassa n–pisteinen 1–säännöllinen verkko; näytä lisäksi, että verkko on yhtenäinen vain tapauksessa $n = 2$.
(d) Verkko G on *rengasverkko*, jos G:ssä on sellainen yksinkertaisen kierros $(x_0, ..., x_n)$, että $n > 2$ ja $V_G = \{\overline{x_i x_{i+1}} : i = 0, ..., n-1\}$. Näytä, että jokainen rengasverkko on 2–säännöllinen.
(e) Osoita, että kun n on parillinen, niin liittämällä sopivasti yhteen kaksi rengasverkkoa saadaan yhtenäinen n–pisteinen 3–säännöllinen verkko.

Seuraavissa tehtävissä osoitetaan, että edellisen tehtävän (a)–kohdan välttämätön ehto "$k < n$ ja luku nk on parillinen" on myös riittävä ehto sille, että on olemassa n–pisteinen k–säännöllinen verkko, missä $k > 1$ (tapaus $k = 1$ on käsitelty edellisen tehtävän (c)–kohdassa).

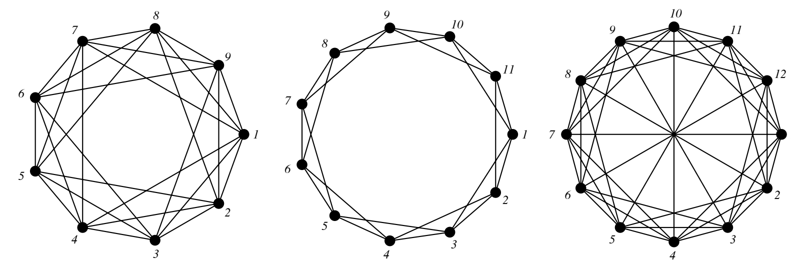
25. Osoita, että n-pisteinen $2k$–säännöllinen verkko $G_{n,2k}$, missä $0 < 2k < n$, voidaan konstruoida seuraavasti: määrittele joukon $[n]$ pisteille p ja q "etäisyys" $\rho(p, q)$:lla

ottamalla $\rho(p, q)$:ksi pienempi luvuista $|p - q|$ ja $n - |p - q|$; pane merkille, että jos $0 < i < \frac{1}{2}n$, niin jokaisella $p \in [n]$, joukossa $[n]$ on täsmälleen kaksi alkiota, joiden ρ–etäisyys p:stä on i; valitse verkon $G_{n,2k}$ pisteiden joukoksi P ja viivojen joukoksi $\{\overline{pq} : p, q \in P, p \neq q \text{ ja } \rho(p, q) \leq k\}$.

26. Pane merkille, että jos luku n on parillinen, niin edellisessä tehtävässä tarkastellulla joukon $[n]$ etäisyysfunktiolla ρ on seuraava ominaisuus: jokaisella $p \in P$, joukossa $[n]$ on täsmälleen yksi alkio, jonka ρ–etäisyys p:stä on $\frac{1}{2}n$. Olkoon n parillinen, k pariton ja $1 < k < n$. Osoita, että n–pisteinen k–säännöllinen verkko $G_{n,k}$ voidaan konsruoida lisäämällä edellisessä tehtävässä konstruoituun verkkoon $G_{n,k-1}$ viivat $\overline{pq}$, missä $p, q \in P$ ja $\rho(p, q) = \frac{1}{2}n$.

27. Osoita kahden edellisen tehtävän avulla, että jos luonnollisille luvuille n ja k pätee, että $1 < k < n$ ja luku nk on parillinen, niin tällöin on olemassa yhtenäinen n–pisteinen k–säännöllinen verkko.

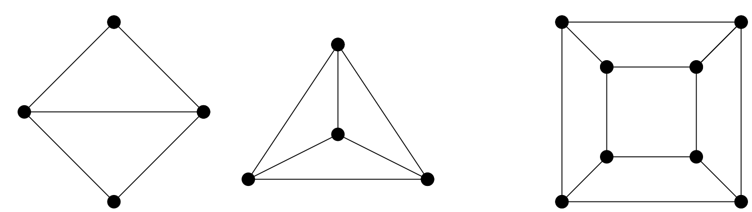
Seuraavassa on kuvattu muutamia säännöllisiä verkkoja, jotka on konstruoitu edellisissä tehtävissä kuvatulla menetelmällä:



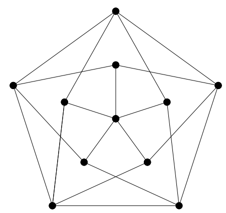
Verkon G *väritysluku* eli *kromaattinen luku* on pienin lukumäärä "värejä", joilla voidaan "värittää" G:n pisteet siten, että mitkään kaksi samanväristä pistettä ei ole vierekkäin G:ssä. Tätä lukua merkitään $\chi(G)$:llä.

28. Osoita, että verkko on kaksijakoinen (kts tehtävä 8) jos ja vain jos sen väritysluku on korkeintaan kaksi.

29. Määritä seuraavien verkkojen väritysluvut.



30. Osoita, että seuraavassa kuvatun verkon (niin kutsutun *Grötzschin verkon*) väritysluku on 4.



31. Verkon G pisteiden joukon P_G osajoukko A on *riippumaton*, jos mitkään kaksi joukon A pistettä eivät ole vierekkäin G:ssä. Verkon G *riippumattomuusluku* $\rho(G)$ on $\max\{|R| : R \subset P_G$ on riippumaton$\}$. Osoita, että G:n pisteiden lukumäärälle n on voimassa epäyhtälö
$$n \leq \rho(G) \cdot \chi(G) \ .$$

32. Määritä tehtävän 12 verkkojen riippumattomuusluvut.

33. Määritellään verkkojen G ja H *tulo* $G \times H$ asettamalla $P_{G\times H} = P_G \times P_H$ ja sopimalla, että $\overline{(v_1, w_1)(v_2, w_2)} \in V_{G\times H}$ jos ja vain jos joko $w_1 = w_2$ ja $\overline{v_1 v_2} \in V_G$ tai $v_1 = v_2$ ja $\overline{w_1 w_2} \in V_H$. Osoita, että

a) $\chi(G \times H) \leq \chi(G)\chi(H)$;

b) $\rho(G)\rho(H) \leq \rho(G \times H)$.

34. Määritellään "jonoverkko" I_n asettamalla $P_{I_n} = [n]$ ja $V_{I_n} = \{\overline{k\,k+1} : 1 \leq k < n\}$. Tällaisten verkkojen p-kertaiset tulot $I_n \times I_n \ldots \times I_n$ ovat *p-kuutioita* I_n^p. Anna verkon I_n^p väritysluku $\chi(I_n^p)$.

35. Olkoot A ja B kaksi verkon G riippumatonta pistejoukkoa. Osoita, että jos $|B| = \rho(G)$, niin on olemassa sellainen injektio $\varphi : A \to B$, että jokaisella $a \in A$ on voimassa joko $\varphi(a) = a$ tai $\overline{a\varphi(a)} \in V_G$.
[Ohje: Hallin lause.]

36. Verkon G pisteiden joukon P_G osajoukko A on *hallitseva* eli *dominoiva*, jos jokainen joukon $P_G \setminus A$ piste on vierekkäin jonkun joukon A pisteen kanssa. Verkon G *dominointiluku* $\delta(G)$ on $\min\{|D| : D \subset P_G$ on dominoiva$\}$.

(a) Osoita, että jos $R \subset P_G$ on maksimaalinen riippumaton joukko (siis R on riippumaton eikä sisälly mihinkään muuhun riippumattomaan joukkoon), niin R on dominoiva.

(b) Todista (a)-kohdan tuloksen avulla epäyhtälö $\delta(G) \leq \rho(G)$.

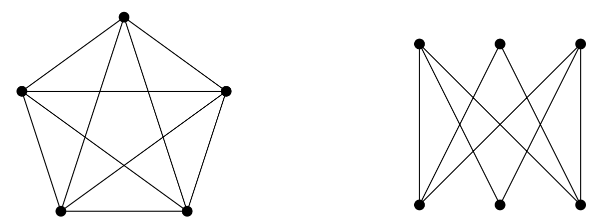
37. Näytä, että n–pisteiselle k–säännölliselle (katso tehtävä 23) verkolle G pätee epäyhtälö $n \leq (k+1) \cdot \delta(G)$.

Verkon G *esitys tasossa* (*esitys avaruudessa*) on pari $\mathcal{G} = \big(\{a_p : p \in P_G\}, \{L_{\overline{pq}} : \overline{pq} \in V_G\}\big)$ missä a_p on tason piste (avaruuden piste) jokaisella $p \in P_G$ ja $L_{\overline{pq}}$ on pisteiden a_p ja a_q yhdysjana. Jos esityksen janat leikkaavat toisiaan ainoastaan päätepisteissään, niin sanotaan, että kyseessä on verkon G *yksinkertainen esitys* tasossa tai avaruudessa. Jos verkolla G on yksinkertainen esitys tasossa, niin sanotaan, että G on *tasoverkko*.
Huomautus: Esimerkiksi monet tässä kirjassa olevat verkkojen kuvat antavat verkoille esityksiä tasossa. Kuitenkin monissa kuvissa verkon viivoja esitetään käyrillä eikä janoilla. Voidaan osoittaa, että esimerkiksi yllä annettu tasoverkon määritelmä ei muutu sisällöltään, vaikka sallittaisiin viivojen esittäminen tasokäyrillä. Täten verkko on tasoverkko jos ja vain jos se voidaan piirtää tasoon (siis paperille) siten, että pisteiden yhdysviivat (joiden ei tarvitse olla suoria) leikkaavat toisiaan korkeintaan päätepisteissään.

38. Osoita, että jokaisella verkolla on yksinkertainen esitys avaruudessa (ei tarvitse todistaa tarkasti, pelkkä esityksen kuvailu riittää).
[Ohje: esitä verkon pisteet avaruuden pallopinnan pisteinä.]

39. Osoita, että verkko on tasoverkko jos ja vain jos sillä on yksinkertainen esitys pallon pinnalla (tässä esityksessä käytetään pisteitä yhdistäviä ympyränkaaria pisteiden yhdysjanojen asemasta).

40. Alla on kuvattu viiden pisteen täydellinen verkko K_5 sekä kuusipisteinen "täydellinen kaksijakoinen verkko" $K_{3,3}$.



Osoita, ettei kumpikaan verkko ole tasoverkko.
[Tulkinta verkon $K_{3,3}$ tapauksessa: seuraavalle "kunnallistekniikkaongelmalle" ("utilities problem") ei löydy ratkaisua: voidaanko kolmeen taloon vetää putket vesi– kaasu– ja kaukolämpölaitoksilta maan pinnalla siten, että putket eivät mene missään ristiin?]

Huomautus. K. Kuratowskin v. 1930 ilmestyneen kuuluisan lauseen mukaan verkot K_5 ja $K_{3,3}$ ovat "tyyppiesimerkkejä" sellaisista verkoista, joilla ei ole yksinkertaista esitystä tasossa: verkko G on tasoverkko jos ja vain jos G ei "sisällä" kumpaakaan verkoista K_5 ja $K_{3,3}$ ("sisältämisen" täsmällinen määritelmä jätetään tässä antamatta).

41. Olkoon A äärellinen joukko ja olkoon G ehtojen
$$P_G = \mathcal{P}(A) \quad \text{ja} \quad V_G = \{\overline{BC} : B, C \subset A \text{ ja } |B \setminus C| = |C \setminus B| = 1\}$$
määräämä verkko. Määritä verkon G yhtenäiset komponentit.

42. Merkitään J:llä suhteikkoa, jonka pisteinä ovat luvut 2,3,4,...,50 ja pisteiden n ja k välillä on nuoli $\overrightarrow{nk}$ jos ja vain jos luku n jakaa luvun k. Määritä pisteiden 2,13 ja 41 yhtenäiset ja vahvasti yhtenäiset komponentit suhteikossa J.

43. (a) Anna esimerkki yhtenäisestä nelipisteisestä verkosta, jolla on yhtenäinen komplementti.
(b) Näytä, että kohdan (a) verkko on isomorfinen komplementtinsa kanssa.

44. Osoita, että epäyhtenäisen verkon komplementti on yhtenäinen.

45. Osoita, että verkko G on yhtenäinen, mikäli

$$v_G > \frac{1}{2}(p_G - 1)(p_G - 2) \ .$$

[Ohje: käytä edellisen tehtävän tulosta.]

46. Osoita, että verkko G ei ole kaksijakoinen, mikäli

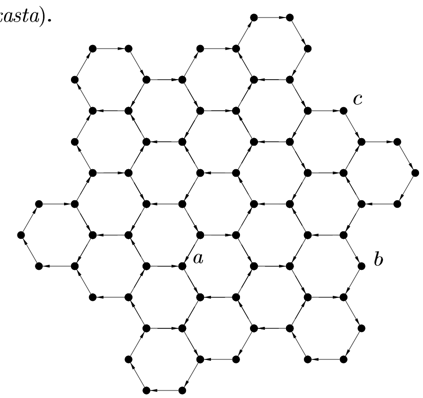
$$v_G > \frac{p_G^2}{4} \ .$$

47. Osoita, että jos G on verkko, jossa on n pistettä, m viivaa ja k komponenttia, niin

$$m \geq n - k \ .$$

48. *Kulkuetäisyys* ρ_G suhteikossa G määritellään pisteille $x, y \in P_G$ seuraavasti: jos G:ssä ei ole kulkua pisteestä x pisteeseen y, niin asetetaan $\rho_G(x,y) = \infty$; muussa tapauksessa valitaan $\rho_G(x,y)$:ksi pienin niistä luvuista $n \in \mathbb{N}$, joilla suhteikossa G on n–askeleinen kulku pisteestä x pisteeseen y.
(a) Osoita, että vahvasti yhtenäisen suhteikon kulkuetäisyys toteuttaa harjoitustehtävässä I 23 määritellyn metriikan ominaisuuden 1^o sekä kolmioepäyhtälön.
(b) Osoita, että G:n kulkuetäisyys on metriikka jos ja vain jos G on yhtenäinen ja symmetrinen.
(Yhtenäisen ja symmetrisen suhteikon G tapauksessa puhutaan G:n *kulkumetriikasta*).

49. Viereinen kuva esittää suhteikkoa G:
(a) Suhteikko G on selvästi yhtenäinen. Onko G vahvasti yhtenäinen?
(b) Määritä pisteiden a, b ja c väliset kulkuetäisyydet G:ssä.



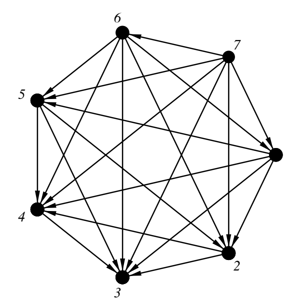
50. Olkoon A äärellinen joukko. Määrittele sellainen yhtenäinen verkko G, että G:n pisteiden joukko on $\mathcal{P}(A)$ ja kulkumetriikka ρ_G joukossa $\mathcal{P}(A)$ on sama kuin harjoitustehtävässä I 23 tarkasteltu joukon $\mathcal{P}(A)$ metriikka d_Δ.

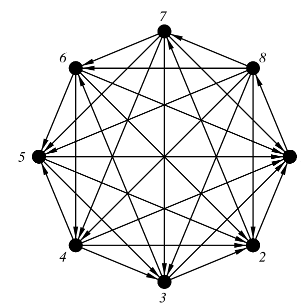
51. Osoita, että edellisessä tehtävässä määritellyssä verkossa G on Hamiltonin kierros ja johda Hamiltonin kierroksen olemassaolosta se tulos (Lemma II 2.5), että joukolla A on sama määrä parillisalkioisia osajoukkoja kuin paritonalkioisia osajoukkoja.

52. Olkoon B_n n-bittijonojen joukko (eli $B_n = \{0,1\}^n$). Määritellään verkko $\mathbb{B}_n$ valitsemalla $P_{\mathbb{B}_n} = B_n$ ja sopimalla, että kun $x, y \in B_n$, niin $\overline{xy} \in V_{\mathbb{B}_n}$ jos ja vain jos x ja y ovat eri jonoja, mutta ne eroavat toisistaan vain yhden bitin kohdalla. Kun $y \in B_n$, niin joukko $\{x \in B_n : \rho_{\mathbb{B}_n}(x,y) \leq k\}$ on verkon $\mathbb{B}_n$ *k-säteinen pallo.* Kuinka monta 1-säteistä palloa tarvitaan verkon $\mathbb{B}_n$ kaikkien pisteiden peittämiseen?

53. *Gray–koodi* on sellainen lukujen $0, 1, ..., 2^n - 1$ esitys n-bittijonoina, jossa kahta peräkkäistä lukua vastaavat jonot eroavat toisistaan vain yhdellä bitillä.
(a) Tulkitse lukujen $0, 1, ..., 2^n - 1$ Gray–koodi Hamiltonin kulkuna edellisen tehtävän verkossa $\mathbb{B}_n$.
(b) Etsi verkosta $\mathbb{B}_3$ Hamiltonin kulku ja esitä vastaava Gray–koodi.

54. Etsi Hamiltonin kulut seuraavista täydellisistä suhteikoista. Löytyykö kummastakaan suhteikosta Hamiltonin kierrosta? Jos löytyy, niin etsi sellainen.



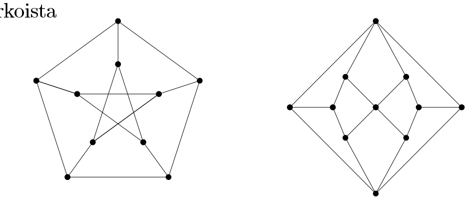


55. Määritellään suhteikko S asettamalla $P_S = [10]$ $(= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\})$ ja $N_S = \{\overrightarrow{xy} : x, y \in [10] \ , \ (x-y)(x-y+1) \geq 20 \ , \ x \neq 2 \cdot y \ \text{ ja } \ y \neq 2 \cdot x\}$. Näytä, että
(a) S on vahvasti yhtenäinen;
(b) S:ssä ei ole Hamiltonin kierrosta.

56. Edellä on osoitettu, että jokaisella epätyhjällä täydellisellä suhteikolla on juuri. Näytä, että vahvempikin tulos pätee: jokaisessa epätyhjässä täydellisessä suhteikossa S on sellainen piste, josta on korkeintaan kaksi–askeleinen kulku mihin tahansa muuhun suhteikon pisteeseen.

[Ohje: valitse piste, jolla on maksimaalinen lähtöaste.]

57. Etsi verkoista



Hamiltonin kulut, ja näytä, ettei kummastakaan löydy Hamiltonin kierrosta.

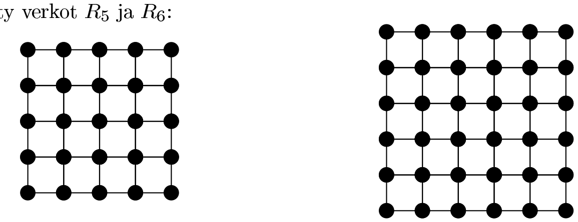
58. Etsi Grötzschin verkosta (kts. tehtävä 30) Hamiltonin kierros.

59. Onko tehtävän 10 verkossa Hamiltonin kulkua tai kierrosta?

60. Shakkiturnauksen jokainen osanottaja pelaa yhden pelin jokaisen muun osanottajan kanssa. Osoita, että tulosluettelo voidaan järjestää niin, että jokainen on voittanut listassa seuraavan tai pelannut tämän kanssa tasapelin.

61. Olkoon G täydellinen suhteikko. Osoita, että on olemassa sellainen joukon P_G ositus $\{P_1, ..., P_k\}$, että
1^o Joukkojen P_i virittämät G:n alisuhteikot ovat vahvasti yhtenäisiä.
2^o Jos $i < j$, niin G:ssä ei ole nuolta joukosta P_j joukkoon P_i.
[Ohje. Valitse P_i:ksi joukon $P_G \setminus \bigcup_{j<i} P_j$ virittämän G:n alisuhteikon juurten joukko.]

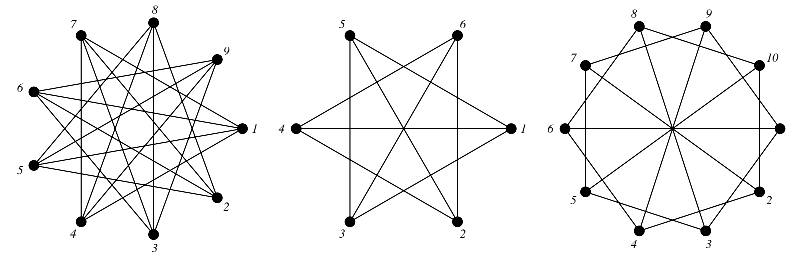
62. Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ "ruudukkoverkko" R_n ottamalla R_n:n pisteiden joukoksi $[n] \times [n]$ ja viivojen joukoksi $\{\overline{(i,j)(k,l)} : |i-k| + |j-l| = 1\}$. Seuraavassa kuvassa on esitetty verkot R_5 ja R_6:



(a) Pane merkille, että $R_n = I_n^2$ (kts tehtävä 33).
(b) Osoita, että jokaisessa verkossa R_n on Hamiltonin kulku.
(c) Osoita, että jokaisella $n > 1$, verkossa R_n on Hamiltonin kierros jos ja vain jos n on parillinen.

63. Osoita, että jos kutsuilla jokaisella vieraalla on muiden joukossa enemmän tuttuja kuin tuntemattomia, niin vieraat voidaan sijoittaa istumaan pyöreän pöydän ääreen siten, että jokainen tuntee molemmat vierustoverinsa.

64. Onko millään alla kuvatuista verkoista Hamiltonin kierrosta? Entä Hamiltonin kulkua? Etsi kunkin verkon tapauksessa Hamiltonin kierros tai kulku jos sellainen on olemassa.



LUKU IV

Verkon renkaat

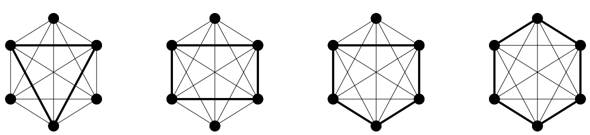
1. Renkaiden olemassaolo.

Olemme jo käyttäneet kulkuja ja kierroksia verkkojen yhtenäisyyden ja eräiden muiden ominaisuuksien tutkimisessa. Nyt määritellään kierrosten avulla renkaan käsite ja tarkastellaan renkaiden olemassaoloa. Tässä jaksossa käsitellään niitä verkkoja, joilla on paljon renkaita ja seuraavassa jaksossa niitä verkkoja, nk. puita, joilla ei ole laisinkaan renkaita.

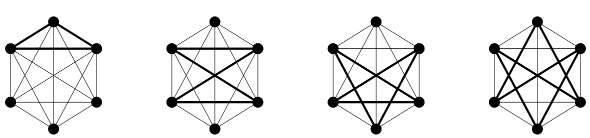
Määritelmä Olkoon G verkko ja olkoon W joukko G:n viivoja. Joukko W on G:n *rengas*, jos on olemassa sellainen yksinkertainen kierros $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ G:ssä, että $n > 2$ ja $W = V(\bar{x})$.

Toisinaan kutsumme 3-renkaita *kolmioiksi* ja 4-renkaita *neliöiksi*.

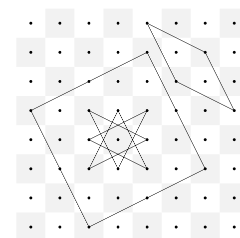
Esimerkkejä (a) "Renkaan" käsitteessä on pohjalla geometrisluontoisia ideoita: tarkastellaan verkon sisältämiä kolmioita, neliöitä, viisi- ja kuusikulmioita jne. Esimerkiksi verkosta K_6 löytyy seuraavannäköisiä viivajoukkoja:



(b) "Neliöt", "viisikulmiot" jne. eivät kuitenkaan aina muistuta geometrisiä vakiomallejansa ja toisinaan niiden tunnistaminen verkosta voi olla vaikeaa:



(c) Jos $p_G > 2$ ja jos $\bar{x}$ on Hamiltonin kierros verkossa G, niin joukko $V(\bar{x})$ on G:n rengas. Täten esimerkiksi edellisessä luvussa kuvattu "ratsun puolimaaginen marssi" määrittää erään renkaan shakkipelin hevosen liikkeiden määräämässä verkossa H. Seuraavassa on kuvattu kolme yksinkertaisempaa rengasta verkossa H.



Yksinkertainen kierros $(x_0, ..., x_n)$, missä $n \leq 2$, on joko muotoa (x) (tapaus $n = 0$) tai muotoa (x, y, x) (tapaus $n = 2$); täten edellisessä määritelmässä asetettu ehto "$n > 2$" sulkee pois tyhjän viivajoukon sekä muotoa $\{v\}$, missä $v \in V_G$, olevat joukot verkon G renkaiden joukosta.

Myöhemmin tarvitsemme seuraavaa yksinkertaista huomiota: jos joukko W on verkon G aliverkon H rengas, niin tällöin W on myös G:n rengas.

Yhtenäisen verkon tapauksessa voimme antaa yksinkertainen luonnehdinnan niille verkon viivoille, jotka kuuluvat johonkin verkon renkaaseen.

Otamme käyttöön seuraavan merkinnän: kun G on verkko ja $v \in V_G$, niin merkitsemme $G - v$:llä sitä G:n aliverkkoa, joka määräytyy ehdoista $P_{G-v} = P_G$ ja $V_{G-v} = V_G \setminus \{v\}$ eli sitä verkkoa, jonka saamme *poistamalla* G:stä *viivan* v.

IV 1.1 Lause *Yhtenäisen verkon G viiva v kuuluu johonkin G:n renkaaseen jos ja vain jos verkko $G - v$ on yhtenäinen.*

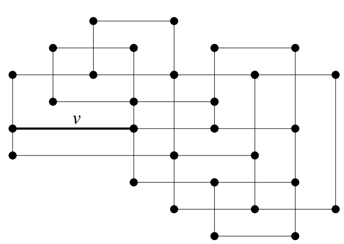
Todistus. Olkoot a ja b viivan v päätepisteet.
Välttämättömyys. Oletamme, että v kuuluu johonkin G:n renkaaseen. Tällöin on olemassa sellainen yksinkertainen kierros $(x_0, ..., x_n)$ G:ssä, että $n > 2$, $x_0 = a$ ja $x_1 = b$. Merkitsemme $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ ja $\bar{z} = (x_n, ..., x_1)$ ja panemme merkille, että $\bar{x}$ on kulku verkossa $G - v$ b:stä a:han ja $\bar{z}$ on kulku $G - v$:ssä a:sta b:hen. Osoitamme nyt verkon $G - v$ yhtenäisyyden Lauseen III 4.7 avulla näyttämällä, että kaikilla verkon $G - v$ pisteillä p ja q, verkossa $G - v$ on kulku p:stä q:hun. Olkoot siis p ja q

verkon $G - v$ pisteitä. Tällöin p ja q ovat verkon G pisteitä ja G:n yhtenäisyydestä seuraa Lauseen III 4.7 ja Lemman III 4.3 nojalla, että G:ssä on yksinkertainen kulku $\bar{y} = (y_0, ..., y_k)$ p:stä q:hun. Jos kulku $\bar{y}$ ei kulje pitkin viivaa v, niin $\bar{y}$ on kulku verkossa $G - v$ p:stä q:hun. Oletetaan, että on olemassa sellainen luku $i \in [k]$, että $\overline{y_{i-1}y_i} = v$. Pannaan merkille, että kulun $\bar{y}$ yksinkertaisuudesta seuraa, että jokaiselle $j \in [k]$ pätee, että jos $j \neq i$, niin $\overline{y_{j-1}y_j} \neq v$. Nyt nähdään, että jos $y_{i-1} = a$ ja $y_i = b$, niin jono $(y_0, ..., y_{i-1}) \star \bar{z} \star (y_i, ..., y_k)$ on kulku $G - v$:ssä p:stä q:hun ja jos $y_{i-1} = b$ ja $y_i = a$, niin jono $(y_0, ..., y_{i-1}) \star \bar{x} \star (y_i, ..., y_k)$ on kulku $G - v$:ssä p:stä q:hun. Olemme osoittaneet, että verkko $G - v$ on yhtenäinen.

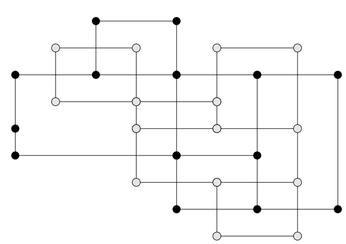
Riittävyys. Oletamme, että verkko $G - v$ on yhtenäinen. Koska on voimassa $a, b \in P_G = P_{G-v}$, niin verkossa $G - v$ on Lauseen III 4.7 ja Lemman III 4.3 nojalla yksinkertainen kulku $(z_0, ..., z_k)$ pisteestä a pisteeseen b. Koska verkossa $G - v$ ei ole viivaa $\overline{ab}$, niin on voimassa $k > 1$. Merkitsemme $n = k + 1$ ja määrittelemme jonon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ asettamalla $x_n = a$ ja $x_j = z_j$ jokaisella $j < n$; tällöin $\bar{x}$ on yksinkertainen kierros verkossa G. Lisäksi v kuuluu joukkoon $V(\bar{x})$ ja tämä joukko on rengas, koska $n > 2$. □

Huomaamme, että jos $v = \overline{ab}$ on yhtenäisen verkon G viiva, niin verkossa $G - v$ on korkeintaan kaksi komponenttia, nimittäin pisteiden a ja b komponentit: jos H olisi kolmas komponentti, niin yhtenäisestä verkosta G löytyisi viiva w joukkojen P_H ja $P_G \setminus P_H$ välille; koska $a \notin P_H$ ja $b \notin P_H$, niin olisi voimassa $w \neq v$ ja w olisi verkon $G - v$ viiva; tämä on mahdotonta, koska H:n piti olla $G - v$:n komponentti.

Esimerkki Seuraavassa vasemmalla kuvatussa verkossa G kaikki muut G:n viivat kuuluvat johonkin G:n renkaaseen paitsi paksulla piirretty viiva v; oikeanpuolisessa kuvassa näkyvät verkon $G - v$ yhtenäiset komponentit.



G



G-v

Jos v on epäyhtenäisen verkon G viiva, niin voimme soveltaa edellisen lauseen tulosta siihen G:n yhtenäiseen komponenttiin, jonka viiva v on; täten saamme lauseelle seuraavan yleistyksen.

IV 1.2 Korollaari *Verkon G viiva v kuuluu johonkin G:n renkaaseen jos ja vain jos verkoilla G ja $G - v$ on sama määrä yhtenäisiä komponentteja.*

Näemme helposti, että verkossa $G - v$ on korkeintaan yksi komponentti enemmän kuin verkossa G. Jos nimittäin $\mathcal{K}$ on G:n kaikkien komponenttien kokoelma ja $H \in \mathcal{K}$ on se komponentti, jolla $v \in V_H$, niin $G - v$:n yhtenäiset komponentit ovat verkot $J \in \mathcal{K} \setminus \{H\}$ sekä verkon $H - v$ komponentit; edellä totesimme, että verkolla $H - v$ on korkeintaan kaksi komponenttia.

Edellisen tuloksen nojalla verkolla on rengas jos ja vain jos sillä on viiva, jonka poistaminen ei lisää yhtenäisten komponenttien lukumäärää. Lauseessa IV 2.7 annamme toisen luonnehdinnan renkaan olemassaololle. Seuraavassa lauseessa annamme erään käyttökelpoisen riittävän, muttei välttämättömän ehdon sille, että verkossa on rengas.

IV 1.3 Lause *Olkoon G epätyhjä verkko, jolle pätee epäyhtälö $v_G \geq p_G$. Tällöin G:llä on rengas.*

Todistus. Todistamme lauseen väitteen induktiolla luvun p_G suhteen. Tapauksessa $p_G = 1$ väite pätee sisällöttömänä, koska tässä tapauksessa on voimassa $v_G = 0 < p_G$. Oletamme, että on voimassa $p_G > 1$ ja että olemme jo todistaneet väitteen sellaisille verkoille H, joilla $p_H < p_G$. On voimassa $v_G \geq p_G > 1$, joten $V_G \neq \emptyset$. Olkoon v G:n viiva. Jos v kuuluu johonkin G:n renkaaseen, niin G:llä on rengas. Oletamme, ettei v kuulu mihinkään G:n renkaaseen. Olkoot $H_1, ..., H_n$ verkon $G - v$ yhtenäiset komponentit, missä $H_i \neq H_j$ kun $i \neq j$. Korollaarin IV 1.2 nojalla on voimassa $n > 1$. Lauseiden III 3.10 ja III 3.8 nojalla on voimassa

$$v_{G-v} = \sum_{i=1}^{n} v_{H_i} \quad \text{ja} \quad p_{G-v} = \sum_{i=1}^{n} p_{H_i}\,.$$

Tästä seuraa, että jollain $i \in [n]$ on voimassa $v_{H_i} \geq p_{H_i}$: muussa tapauksessa olisi voimassa

$$v_G - 1 = v_{G-v} = \sum_{i=1}^{n} v_{H_i} \leq \sum_{i=1}^{n} (p_{H_i} - 1) = p_{G-v} - n = p_G - n$$

ja tästä seuraisi ristiriita oletuksen $v_G \geq p_G$ kanssa. Olkoon $i \in [n]$ sellainen, että $v_{H_i} \geq p_{H_i}$. Tällöin on voimassa $v_{H_i} \geq p_{H_i}$ ja $p_{H_i} < p_{G-v} = p_G$, joten induktio–oletuksen nojalla verkolla H_i on rengas R. Selvästikin R on myös verkon G rengas. □

IV 1.4 Korollaari *Olkoon G epätyhjä verkko, jonka jokaisen pisteen aste on suurempi kuin yksi. Tällöin G:llä on rengas.*

Todistus. Koska jokaiselle $x \in P_G$ pätee, että $d_G(x) \geq 2$, niin Lauseen 2.2.3 nojalla on voimassa

$$2 \cdot v_G = \sum_{x \in P_G} d_G(x) \geq \sum_{x \in P_G} 2 = 2 \cdot |P_G| = 2 \cdot p_G.$$

Näin ollen on voimassa $v_G \geq p_G$ ja Lauseen IV 1.9 nojalla G:llä on rengas. □

Näytämme vielä, että edellistä tulosta on mahdollista hieman vahvistaa.

IV 1.5 Korollaari *Olkoon G verkko, jossa on ainakin kaksi pistettä. Oletetaan, että on olemassa sellainen $a \in P_G$, että jokaisen muun G:n pisteen aste on suurempi kuin yksi. Tällöin G:llä on rengas.*

Todistus. Tarkastelemme kahta eri tapausta.

Oletamme aluksi, että a on G:n eristetty piste. Merkitsemme G':lla joukon $P_G \setminus \{a\}$ virittämää G:n aliverkkoa. Koska a on G:n eristetty piste, niin jokaisella $b \in P_G \setminus \{a\}$ on voimassa $d_{G'}(b) = d_G(b)$. Näin ollen epätyhjän verkon G' jokaisen pisteen aste on suurempi kuin yksi. Korollaarin IV 1.4 nojalla verkossa G' on rengas W. Joukko W on myös verkon G rengas.

Oletamme seuraavaksi, että a ei ole G:n eristetty piste. Tällöin on voimassa $d_G(a) \geq 1$. Koska jokaiselle $x \in P_G \setminus \{a\}$ pätee, että $d_G(x) \geq 2$, niin Lauseen III 2.3 nojalla on voimassa

$$2 \cdot v_G = \sum_{x \in P_G} d_G(x) \geq 1 + \sum_{x \in P_G \setminus \{a\}} 2 = 1 + 2 \cdot |P_G \setminus \{a\}| = 2 \cdot p_G - 1.$$

Näin ollen on voimassa $v_G \geq p_G - \frac{1}{2}$; tästä seuraa, koska v_G on kokonaisluku, että on voimassa $v_G \geq p_G$. Lauseen IV 1.3 nojalla G:llä on rengas. □

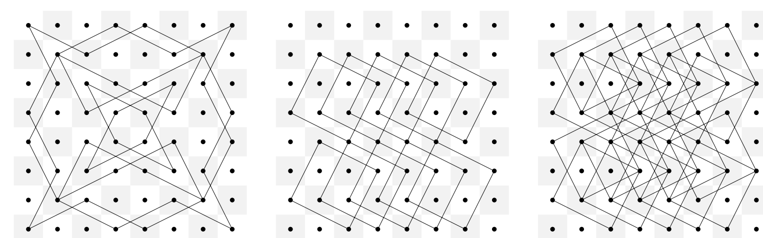
2. Renkaistot.

IV 2.1 Määritelmä Olkoon G verkko. Joukon V_G osajoukko W on G:n *renkaisto*, jos on olemassa sellainen erillinen perhe $\mathcal{R}$ G:n renkaita, että $W = \bigcup \mathcal{R}$.

Merkitsemme verkon G kaikkien renkaistojen muodostamaa perhettä symbolilla $\mathcal{R}(G)$.

Huomaamme, että annetun määritelmän nojalla sekä tyhjä viivajoukko että jokainen G:n rengas on G:n renkaisto.

Seuraavat kuvat esittävät eräitä renkaistoja shakkipelin hevosen liikkeisiin liittyvässä verkossa H:



Olkoon G verkko ja olkoon W joukon V_G osajoukko. Merkitsemme P_W:lla joukkoa $\{x \in P_G : \overline{xy} \in W \text{ jollain } y \in P_G\}$. Tällöin on olemassa verkon G aliverkko H, joka määräytyy ehdoista $P_H = P_W$ ja $V_H = W$; kutsumme verkkoa H *joukon W virittämäksi G:n aliverkoksi.*

Voimme panna merkille, että viivajoukon virittämässä verkossa ei koskaan ole eristettyjä pisteitä.

Seuraavassa luonnehdimme renkaistoja pisteiden asteiden avulla. Todistamme ensin erään aputuloksen.

IV 2.2 Lemma *Olkoon H verkon renkaan virittämä aliverkko. Tällöin jokaisella $x \in P_H$ on voimassa $d_H(x) = 2$.*

Todistus. Olkoon H verkon G renkaan R virittämä G:n aliverkko. Verkossa G on olemassa sellainen yksinkertainen kierros $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$, että $n > 2$ ja $R = V(\bar{x})$. Verkko H määräytyy ehdoista $P_H = \{x_1, ..., x_n\}$ ja $V_H = \{\overline{x_0 x_1}, ..., \overline{x_{n-1} x_n}\}$. Olkoon nyt x verkon H piste. Merkitään $I = \{i \in \{0, ..., n\} : x_i = x\}$. Olkoon i joukon I alkio. Jos $i \notin \{0, n\}$, niin kierroksen $\bar{x}$ yksinkertaisuudesta seuraa, että $I = \{i\}$. Tässä tapauksessa on voimassa $\{y \in P_H : \overline{xy} \in V_H\} = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$; lisäksi kulun $\bar{x}$ yksinkertaisuudesta seuraa yhdessä epäyhtälön $n > 2$ kanssa, että on voimassa $x_{i-1} \neq x_{i+1}$; näin ollen on voimassa $d_H(x) = |\{x_{i-1}, x_{i+1}\}| = 2$. Jos taas $i \in \{0, n\}$, niin $I = \{0, n\}$ ja $\{y \in P_H : \overline{xy} \in V_H\} = \{x_1, x_{n-1}\}$; kulun $\bar{x}$ yksinkertaisuudesta yhdessä epäyhtälön $n > 2$ kanssa seuraa, että $x_1 \neq x_{n-1}$, joten $d_H(x) = |\{x_1, x_{n-1}\}| = 2$. □

IV 2.3 Lause *Olkoon G verkko. Joukon V_G osajoukko W on G:n renkaisto jos ja vain jos joukon W virittämä G:n aliverkko on parillisasteinen.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Oletamme, että W on renkaisto. Tällöin on olemassa sellaiset G:n erilliset renkaat $R_1, ..., R_n$, että $W = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$. Merkitsemme H:lla joukon W virittämää G:n aliverkkoa ja merkitsemme jokaisella $i \in [n]$, H_i:llä joukon R_i virittämää G:n aliverkkoa. Lemman IV 2.2 tuloksen nojalla kaikilla $x \in P_H$ ja $i \in [n]$ on voimassa joko $d_{H_i}(x) = 2$ tai $d_{H_i}(x) = 0$. Koska joukot $R_1, ..., R_N$ ovat erillisiä ja koska pätee, että $W = \bigcup_{i=1}^{n} R_I$, jokaisella $x \in P_H$ on voimassa $d_H(x) = \sum_{i=1}^{n} d_{H_i}(x)$; tästä seuraa, että luku $d_H(x)$ on parillinen.

Riittävyys. Todistamme induktiolla joukon V_G osajoukon alkioiden lukumäärän suhteen, että jos osajoukon virittämä G:n aliverkko on parillisasteinen, niin osajoukko on renkaisto. Jos alkioiden lukumäärä on nolla, niin osajoukko on tyhjä ja täten renkaisto. Olkoon nyt $n > 0$ sellainen luku, että olemme jo todistaneet väitteen niille joukoille $V \subset V_G$, joilla $|V| < n$. Olkoon $W \subset V_G$ sellainen joukko, että $|W| = n$ ja W:n virittämä G:n aliverkko H on parillisasteinen. Jokaisella $x \in P_H$ on voimassa $d_H(x) \geq 2$, joten Korollaarin IV 1.4 nojalla H:ssa on rengas T. Merkitään J:llä viivajoukon T virittämää G:n aliverkkoa. Lemman IV 2.2 nojalla verkko J on parillisasteinen. Merkitään K:lla viivajoukon $W \smallsetminus T$ virittämää G:n aliverkkoa. Jokaisella $x \in P_K$ on voimassa $d_K(x) = d_H(x) - d_J(x)$; tästä seuraa, että verkko K on parillisasteinen. Koska on voimassa $|W \smallsetminus T| < |W| = n$, niin induktio–oletuksesta seuraa, että joukko $W \smallsetminus T$ on G:n renkaisto. Täten on olemassa sellainen erillinen perhe $\mathcal{R}$ G:n renkaita, että $\bigcup \mathcal{R} = W \smallsetminus T$. Koska $\bigcup W \cap T = \emptyset$, niin perhe $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \{T\}$ on erillinen. Lisäksi on voimassa $\bigcup \mathcal{R}' = (\bigcup \mathcal{R}) \cup T = (W \smallsetminus T) \cup T = W$. Olemme osoittaneet, että joukko W on renkaisto. □

IV 2.4 Korollaari *Verkko G on parillisasteinen jos ja vain jos joukko V_G on renkaisto.*

Edellisen lauseen tulos on erittäin käyttökelpoinen kun yritämme päätellä, onko annettu viivajoukko renkaisto vai ei. Esimerkiksi edellisellä sivulla kuvattujen viivajoukkojen tapauksissa on helpompaa tarkistaa niiden virittämien verkkojen parillisasteisuus kuin esittää joukot erillisten renkaiden yhdisteinä.

Olkoon G verkko. Korollaarin I 5.9 nojalla pari $(\mathcal{P}(V_G), \Delta)$ on ryhmä. Osoitamme nyt Lauseen IV 2.3 avulla, että joukon $\mathcal{P}(V_G)$ osajoukko $\mathcal{R}_G$ on ryhmän $(\mathcal{P}(P_G), \Delta)$ aliryhmä.

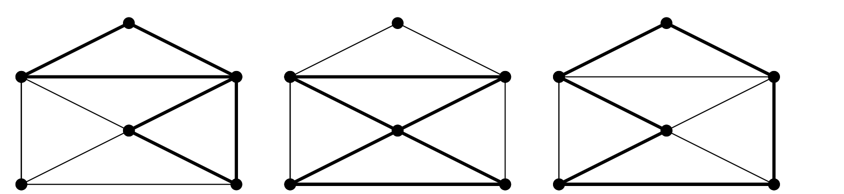
IV 2.5 Lause *Olkoot W_1 ja W_2 verkon G renkaistoja. Tällöin joukko $W_1 \Delta W_2$ on G:n renkaisto.*

Todistus. Merkitään $W_0 = W_1 \Delta W_2$. Jokaisella $i \in \{0, 1, 2\}$ merkitään H_i:llä joukon W_i virittämää G:n aliverkkoa. Lauseen IV 2.3 nojalla pätee, että verkot H_1 ja H_2 ovat parillisasteisia sekä että joukko W_0 on G:n renkaisto, mikäli verkko H_0 on parillisasteinen. Olkoon x verkon H_0 piste. Merkitään V:llä niiden G:n viivojen muodostamaa joukkoa, joilla on x yhtenä päätepisteenä ja pannaan merkille, että $d_{H_i}(x) = |W_i \cap V|$; täten joukoissa $W_1 \cap V$ ja $W_2 \cap V$ on verkkojen H_1 ja H_2 parillisasteisuuden nojalla parilliset määrät alkioita. Koska $W_0 = W_1 \Delta W_2$, niin Lemman I 5.9 nojalla on voimassa

$$W_0 \cap V = (W_1 \cap V) \, \Delta \, (W_2 \cap V) \, .$$

Edellisestä seuraa Korollaarin I 5.16 nojalla, että joukossa $W_0 \cap V$ on parillinen määrä alkioita; täten luku $d_{H_0}(x) = |W_0 \cap V|$ on parillinen. On näytetty, että verkko H_0 on parillisasteinen. □

Esimerkki Seuraava kuva esittää “kirjekuoriverkon” kahta renkaistoa U ja W sekä niiden symmetristä erotusta $U \Delta W$.



U $\qquad$ W $\qquad$ $U \triangle W$

Koska ryhmän $(\mathcal{P}(V_G), \Delta)$ neutraalialkio $\emptyset$ on G:n renkaisto ja koska jokainen ryhmän alkio on itsensä käänteisalkio, niin Lauseen IV 2.5 tuloksesta seuraa, että joukko $\mathcal{R}(G)$ on ryhmän $(\mathcal{P}(V_G), \Delta)$ aliryhmä. Ryhmää $(\mathcal{R}(G), \Delta)$ kutsutaan verkon G *renkaistoryhmäksi.*

Lauseen IV 2.5 avulla voimme todistaa vielä erään luonnehdinnan renkaan olemassaololle verkossa. Todistamme ensin seuraavan apulauseen.

IV 2.6 Lemma *Olkoot a ja b verkon G pisteitä, $a \neq b$ ja olkoot $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ yksinkertaisia kulkuja G:ssä pisteestä a pisteeseen b. Tällöin joukko $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$ on G:n renkaisto.*

Todistus. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ ja $\bar{y} = (y_0, ..., y_k)$. Tarkastellaan neljää eri tapausta.

Tapaus 1 On voimassa $\overline{ab} \in V(\bar{x})$ ja $\overline{ab} \in V(\bar{y})$. Tällöin kulkujen $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ yksinkertaisuudesta seuraa, että on voimassa $\bar{x} = (a, b) = \bar{y}$ ja täten $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y}) = \emptyset$.

Tapaus 2: On voimassa $\overline{ab} \in V(\bar{x})$ ja $\overline{ab} \notin V(\bar{y})$. Tällöin $\bar{x} = (a, b)$ ja kulku $\bar{z} = (y_0, ..., y_k, y_0)$ on yksinkertainen kierros G:ssä. Koska $\overline{ab} \notin V(\bar{y})$, on voimassa $k > 1$ ja tästä seuraa, että kulun $\bar{z}$ askelten lukumäärä on suurempi kuin kaksi. Näin ollen $V(\bar{z})$ on G:n rengas. Lisäksi on voimassa $V(\bar{z}) = V(\bar{x}) \cup V(\bar{y}) = V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$.

Tapaus 3: On voimassa $\overline{ab} \in V(\bar{y})$ ja $\overline{ab} \notin V(\bar{x})$. Tämä tapaus käsitellään aivan samoin kuin Tapaus 2.

Tapaus 4: On voimassa $\overline{ab} \notin V(\bar{x})$ ja $\overline{ab} \notin V(\bar{y})$. Tällöin $n > 1$ ja $k > 1$. Merkitään G':lla ehtojen $P_{G'} = P_G$ ja $V_{G'} = V_G \cup \{\overline{ab}\}$ määräämää verkkoa. Kulut $\bar{x}' = (x_0, ..., x_n, x_0)$ ja $\bar{y}' = (y_0, ..., y_k, y_0)$ ovat yksinkertaisia kierroksia verkossa G' ja kummankin askelten lukumäärä on suurempi kuin kaksi; täten $U = V(\bar{x}')$ ja $W = V(\bar{y}')$ ovat G':n renkaita. Lauseen IV 2.5 nojalla joukko $U\Delta W$ on G':n renkaisto. Koska $U = V(\bar{x}) \cup \{\overline{ab}\}$ ja $W = V(\bar{y}) \cup \{\overline{ab}\}$, on voimassa $U\Delta W = V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$; näin ollen joukko $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$ on renkaisto. □

Luonnehdimme nyt renkaan olemassaoloa kulkujen avulla.

IV 2.7 Lause *Verkossa G on rengas jos ja vain jos on olemassa sellaiset G:n pisteet a ja b, että $a \neq b$ ja G:ssä on ainakin kaksi eri yksinkertaista kulkua pisteestä a pisteeseen b.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Renkaan olemassaolosta seuraa lauseessa mainitun ehdon voimassaolo: jos nimittäin G:ssä on rengas, niin tällöin G:ssä on yksinkertainen kierros $(x_0, ..., x_n)$, missä $n > 2$; tässä tapauksessa voidaan valita $a = x_1$ ja $b = x_0$, jolloin $(x_1, ..., x_n)$ ja (x_1, x_0) ovat kaksi eri yksinkertaista kulkua pisteestä a pisteeseen b.

Riittävyys. Oletetaan, että on olemassa sellaiset G:n pisteet a ja b ja sellaiset G:n yksinkertaiset kulut $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ pisteestä a pisteeseen b, että $a \neq b$ ja $\bar{x} \neq \bar{y}$. Lemman IV 2.6 nojalla joukko $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$ on G:n renkaisto. Lisäksi nähdään, koska $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat yksinkertaisia kulkuja a:sta b:hen ja $\bar{x} \neq \bar{y}$, että $V(\bar{x}) \neq V(\bar{y})$: jos vaikkapa $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ ja $\bar{y} = (y_0, ..., y_k)$ ja jos merkitään $j = \max\{i : (x_0, ..., x_i) = (y_0, ..., y_i)\}$, niin tällöin on voimassa $j < n$ ja $\overline{x_j, x_{j+1}} \in V(\bar{x}) \setminus V(\bar{y})$. Edellisestä seuraa, että G:n renkaisto $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$ on epätyhjä; täten verkossa G on rengas. □

3. Eulerin kulut.

Kuten edellä mainitsimme, ainakaan toistaiseksi ei ole löytynyt mitään välttämättömiä ja riittäviä ehtoja, joiden avulla voisi helposti päätellä onko annetussa verkossa Hamiltonin kulkua vai ei. Tarkastelemme nyt kulkuja, jotka verkon pisteiden asemesta luettelevat yksinkertaisesti verkon viivat; tällaisia kulkuja kutsutaan Eulerin kuluiksi. Osoitamme seuraavassa, että Eulerin kulkujen olemassaololle löytyy luonnehdinta yksinkertaisella ehdolla, jonka voimassaolo on usein helposti tarkastettavissa annetun verkon tapauksessa.

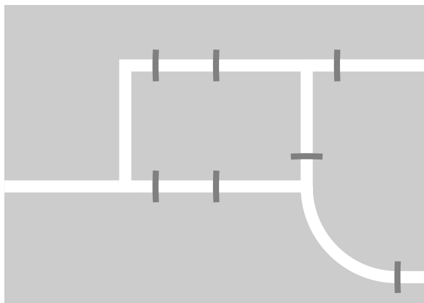
IV 3.1 Määritelmä Olkoon G verkko. *Eulerin kulku* verkossa G on sellainen kulku $(x_0, ..., x_n)$ G:ssä, että jokainen G:n viiva esiintyy täsmälleen yhden kerran jonossa $(\overline{x_0 x_1}, ..., \overline{x_{n-1} x_n})$.

Jos Eulerin kulku $(x_0, ..., x_n)$ on kierros, niin sanomme sen olevan *Eulerin kierros.*

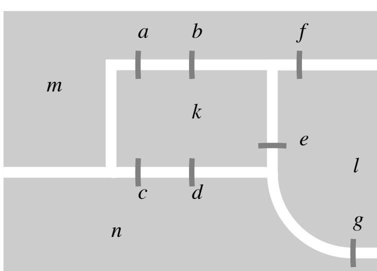
Kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ verkossa G on täten Eulerin kulku G:ssä jos ja vain jos seuraavat kaksi ehtoa toteutuvat:(1) kaikilla $0 < i < j \leq n$ on voimassa $\overline{x_{i-1} x_i} \neq \overline{x_{j-1} x_j}$; (2) $V(\bar{x}) = V_G$.

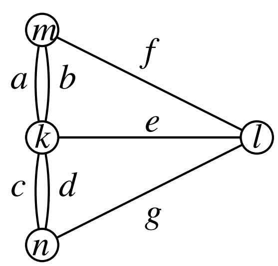
Koko verkkoteorian voi katsoa alkaneen v. 1736 ilmestyneestä artikkelista, jossa L. Euler ratkaisi seuraavan nk. Königsbergin siltojen ongelman.

IV 3.2 Esimerkki Königsbergin kaupungin (nyk. Kaliningrad) läpi virtaavan Pregel–joen ja sen sivuhaaran rantoja sekä Kneiphof in saarta yhdistämään oli rakennettu alla olevan kaavakuvan mukaiset seitsemän siltaa:



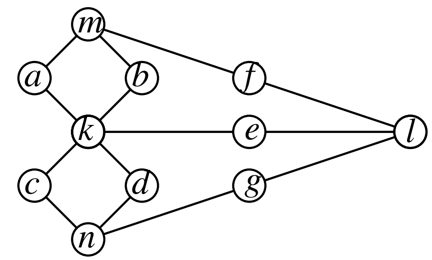
Kaupunkilaiset olivat pohtineet seuraavaa ongelmaa: Olisiko mahdollista kulkea jotakin reittiä pitkin kaikkien seitsemän sillan yli kulkematta minkään sillan yli kahteen kertaan? Ongelman ratkaisemiseksi yritetään kuvata sitä verkkojen avulla. Annetaan aluksi jokien erottamille maa–alueille ja maa–alueita yhdistäville silloille nimet ja muodostetaan tämän jälkeen alla oikeanpuolisen kuvion mukainen "verkko", jonka pisteinä ovat maa–alueet m, n, k, l ja viivoina maa–alueita yhdistävät sillat a, b, c, d, e, f, g.





Valitettavasti kuvion "verkko" ei ole verkko annetun määritelmän mielessä, koska verkon määritelmästä seuraa, että verkon kahden pisteen välillä voi olla vain yksi

viiva. Saamme määritelmän mukaisen verkon ottamalla pisteiksi sekä kaikki maa–alueet että kaikki sillat ja ottamalla viivoiksi kaikki ne viivat $\overline{pi}$, joilla sillan i toinen pää sijaitsee alueella p; tämä verkko on kuvattu alla olevassa kuvassa.



Näemme helposti, että Königsbergin siltojen ongelma palautuu Eulerin kulun etsimiseen yllä kuvatusta verkosta.

Seuraavassa annamme luonnehdinnan Eulerin kulun olemassaololle verkon parillisasteisuuden ja yhtenäisyyden avulla. Kyseisen luonnehdinnan todistamisessa voimme käyttää hyväksi aikaisempia renkaistoja koskevia tuloksia.

IV 3.3 Lemma *Jos verkossa on Eulerin kierros, niin verkon viivat muodostavat renkaiston.*

Todistus. Todistamme väitteen induktiolla verkon viivojen lukumäärän suhteen. Jos viivojen lukumäärä on nolla, niin viivojen joukko on tyhjä ja täten renkaisto. Olkoon nyt $n > 0$ sellainen luonnollinen luku, että väite pätee niille verkoille, joissa on vähemmän kuin n viivaa. Näytämme, että väite pätee tällöin myös n–viivaisille verkoille. Olkoon G n–viivainen verkko, jossa on Eulerin kierros. Jos V_G on rengas, niin väite pätee verkolle G. Oletamme, ettei V_G ole rengas. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ Eulerin kierros verkossa G. Koska V_G ei ole rengas, niin kulku $\bar{x}$ ei ole yksinkertainen. Täten on olemassa sellaiset luvut $0 < i < j \leq n$, että $x_i = x_j$. Merkitsemme $\bar{y} = (x_i, ..., x_j)$ ja $\bar{z} = (x_1, ...x_i)\star(x_j, ..., x_n)$; panemme merkille, että $\bar{y}$ ja $\bar{z}$ ovat kierroksia verkossa G. Koska $\bar{x}$ on Eulerin kulku G:ssä, niin on voimassa $V(\bar{y}) \cap V(\bar{z}) = \emptyset$ ja $V(\bar{y}) \cup V(\bar{z}) = V_G$. Merkitsemme H:lla joukon $V(\bar{y})$ ja K:lla joukon $V(\bar{z})$ virittämää

G:n aliverkkoa; tällöin $V_H = V(\bar{y})$ ja $V_K = V(\bar{z})$. Koska $\bar{x}$ on Eulerin kierros verkossa G, niin $\bar{y}$ on Eulerin kierros verkossa H ja $\bar{z}$ on Eulerin kierros verkossa K. Koska pätee, että $|V_H| = |V(\bar{y})| < n = v_G$ ja $|V_K| = |V(\bar{z})| < n = v_G$, niin induktio–oletuksesta seuraa, että joukot V_H ja V_K ovat renkaistoja. Tästä seuraa, koska $V_H \cap V_K = \emptyset$, että joukko $V_H \cup V_K = V_G$ on renkaisto. □

Yhtenäisen verkon tapauksessa pätee myös edellisen tuloksen käänteistulos.

IV 3.4 Lemma *Jos yhtenäisen verkon viivat muodostavat renkaiston, niin verkossa on Eulerin kierros.*

Todistus. Todistamme induktiolla luvun n suhteen, että jos yhtenäisen verkon viivojen joukko on n:n erillisen renkaan yhdiste, niin verkossa on Eulerin kierros. Väite pätee triviaalisti tapauksissa $n = 0$ ja $n = 1$. Oletamme nyt, että $n > 0$ ja että olemme jo todistaneet väitteen niille yhtenäisille verkoille, joiden viivojen joukko on $n-1$:n erillisen renkaan yhdiste. Olkoon G sellainen yhtenäinen verkko, että sen kaikkien viivojen joukolla on esitys $V_G = \bigcup \mathcal{W}$, missä $\mathcal{W}$ on erillinen perhe G:n renkaita ja $|\mathcal{W}| = n$. Todistamme väitteen verkolle G. Merkitsemme jokaisella $W \in \mathcal{W}$ $G(W)$:llä renkaan W virittämää G:n aliverkkoa; panemme merkille, että verkko $G(W)$ on yhtenäinen. On voimassa $G = \bigvee_{W \in \mathcal{W}} G(W)$ ja tästä seuraa Lemman III 3.11 nojalla, koska G on yhtenäinen, että joukolla $\mathcal{W}$ on sellainen esitys $\mathcal{W} = \{W_i : i = 1, ..., n\}$, että jokaisella $1 < i \le n$ on voimassa $P_{G(W_i)} \cap P_{G(W_j)} \ne \emptyset$ jollain $j < i$. Merkitsemme $G' = \bigvee_{i=1}^{n-1} G(W_i)$. Verkko G' on lemman III 3.12 nojalla yhtenäinen. Induktio–oletuksen nojalla verkossa G' on Eulerin kierros $\bar{x} = (x_0, ..., x_k)$. Olkoon luvulle $j \le n-1$ ja G:n pisteelle p voimassa $p \in P_{G(W_n)} \cap P_{G(W_j)}$. Olkoon $\bar{z}$ sellainen yksinkertainen kierros verkossa G, että $W_n = V(\bar{z})$; voimme olettaa, että $\bar{z}$ on pisteestä p lähtevä kierros. Koska $p \in P(G(W_j)) \subset P_{G'} = P(\bar{x})$, on olemassa sellainen luku $l \le k$,että $x_l = p$. Nyt näemme helposti, että jono $(x_0, ..., x_l) \star \bar{z} \star (x_l, ..., x_k)$ on Eulerin kierros verkosssa G. □

Seuraavassa lauseessa luonnehdimme sellaisia verkkoja, joissa ei ole eristettyjä pisteitä ja joissa on Eulerin kulku. Eristettyjen pisteiden puuttumista koskeva rajoitus ei ole kovin oleellinen, sillä eristetyillä pisteillä ei ole merkitystä Eulerin kulun olemassaololle: jos nimittäin G ja H ovat verkkoja, joille pätee, että $V_G = V_H$, niin verkossa G on Eulerin kulku jos ja vain jos verkossa H on Eulerin kulku.

IV 3.5 Lause *Olkoon G verkko, jossa ei ole eristettyjä pisteitä. Tällöin verkossa G on Eulerin kierros jos ja vain jos G on yhtenäinen ja parillisasteinen.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Jos G:ssä on Eulerin kierros, niin G on Lemman IV 3.3 ja Korollaarin IV 2.4 nojalla parillisasteinen; koska G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä, niin Eulerin kierros käy jokaisessa G:n pisteessä ja G on täten Lauseen III 4.7 nojalla yhtenäinen.

Riittävyys. Lemma IV 3.4 ja Korollaari IV 2.4. □

Luonnehdimme seuraavaksi niitä eristettyjä pisteitä vailla olevia verkkoja, joissa on sellainen Eulerin kulku, joka ei ole kierros.

IV 3.6 Lause *Olkoon G verkko, jolla ei ole eristettyjä pisteitä ja olkoot a ja b G:n pisteitä, $a \ne b$. Tällöin G:ssä on Eulerin kulku pisteestä a pisteeseen b jos ja vain jos G on yhtenäinen, pisteet a ja b ovat paritonasteisia ja kaikki muut G:n pisteet ovat parillisasteisia.*

Todistus. Käytämme todistuksessa hyväksi seuraavaa konstruktiota: valitsemme jonkun "pisteen" q, joka ei kuulu joukkoon P_G ja määrittelemme uuden verkon G' asettamalla $P_{G'} = P_G \cup \{q\}$ ja $V_{G'} = V_G \cup \{\overline{aq}, \overline{qb}\}$. Panemme merkille, että koska G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä, niin myöskään verkolla G' ei ole eristettyjä pisteitä.

Välttämättömyys. Oletamme, että verkossa G on sellainen Eulerin kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$, että $x_0 = a$ ja $x_n = b$. Näemme helposti, että jono $(q, x_0, ..., x_n, q)$ on Eulerin kierros verkossa G'. Näin ollen G' Korollaarin IV 1.9 nojalla parillisasteinen. Jokaisella $x \in P_G \setminus \{x_0, x_n\}$ on voimassa $d_G(x) = d_{G'}(x)$, joten verkko G on parillisasteinen pisteessä x. Toisaalta, jos $y = x_0$ tai $y = x_n$, niin $d_G(y) = d_{G'}(y) - 1$ ja tästä seuraa, että verkko G on paritonasteinen pisteessä y. Näin ollen verkossa G on täsmälleen kaksi paritonasteista pistettä, nimittäin pisteet $x_0 = a$ ja $x_n = b$. Toisaalta, koska G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä, niin Eulerin kulku $\bar{x}$ käy jokaisessa G:n pisteessä. Lauseen III 4.7 nojalla verkko G on yhtenäinen.

Riittävyys. Oletamme, että G on yhtenäinen ja että a ja b ovat ainoat G:n paritonasteiset pisteet. Verkon G' pisteen y aste määräytyy seuraavasti. Jos $y \in P_G \setminus \{a, b\}$, niin $d_{G'}(y) = d_G(y)$. Jos $y \in \{a, b\}$, niin $d_{G'}(y) = d_G(y) + 1$. Jos $y = q$, niin $d_{G'}(y) = 2$. Edellisen nojalla verkko G' on parillisasteinen. Verkon G yhtenäisyydestä seuraa, että myös verkko G' on yhtenäinen. Korollaarin IV 1.9 nojalla verkossa

G' on Eulerin kierros $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$; voidaan olettaa, että $\bar{x}$ on G':n pisteestä q lähtevä kierros eli että $x_0 = x_n = q$. Koska $\bar{x}$ on Eulerin kierros, niin on voimassa $\overline{x_0x_1} \neq \overline{x_{n-1}x_n}$; tästä seuraa, koska $\overline{aq}$ ja $\overline{qb}$ ovat ainoat verkon G' viivat, joilla on piste q toisena päätepisteenä, että on voimassa $\{x_1, x_{n-1}\} = \{a, b\}$ ja $x_i \neq q$ jokaisella $0 < i < n$. Edellisen nojalla pätee, että

$$\{\overline{x_1x_2}, ..., \overline{x_{n-2}x_{n-1}}\} = V_{G'} \setminus \{\overline{qa}, \overline{bq}\} = V_G.$$

Edellä esitetystä seuraa, että jono $\bar{y} = (x_1, ..., x_{n-1})$ on Eulerin kulku verkossa G. Koska $\{x_1, x_{n-1}\} = \{a, b\}$, niin on voimassa joko $x_1 = a$ ja $x_{n-1} = b$ tai $X_1 = b$ ja $x_{n-1} = a$; ensimmäisessä tapauksessa $\bar{y}$ on Eulerin kulku G:ssä pisteestä a pisteeseen b ja jälkimmäisessä tapauksessa $(x_{n-1}, ..., x_1)$ on Eulerin kulku G:ssä pisteestä a pisteeseen b. □

Korollaarin IV 2.4 nojalla verkon paritonasteisten pisteiden lukumäärä on parillinen; erityisesti, jos paritonasteisia pisteitä on korkeintaan kaksi kappaletta, niin joko niitä on täsmälleen kaksi kappaletta tai sitten verkko on parillisasteinen. Näin ollen Lauseiden IV 3.5 ja IV 3.6 tulokset voidaan yhdistää seuraavalla tavalla.

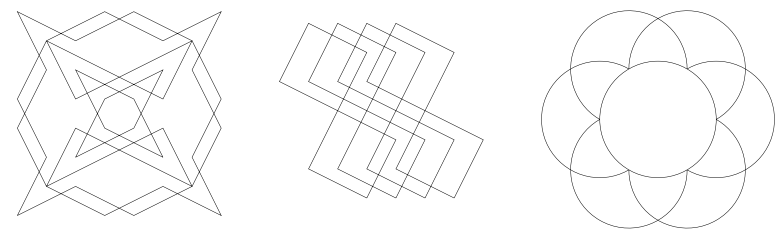
IV 3.7 Korollaari *Eristettyjä pisteitä vailla olevassa verkossa on Eulerin kulku jos ja vain jos verkko on yhtenäinen ja siinä on korkeintaan kaksi paritonasteista pistettä.*

IV 3.8 Esimerkkejä. (a) Korollaarin IV 3.9 tuloksesta seuraa, ettei kaikkia Königsbergin siltoja voi ylittää kulkematta jonkun sillan yli useampaan kertaan, sillä Esimerkissä IV 3.2 mainitussa verkossa on neljä paritonasteista pistettä.

(b) Ongelma: Onko mahdollista suorittaa shakkipelin ratsulla peräkkäin kaikki sallitut siirrot yhteen suuntaan toistamatta mitään siirtoa edes toiseen suuntaan?

Ratkaisu: Ongelma palautuu Eulerin kulun etsimiseen shakkipelin hevoseen liittyvästä verkosta H, jota olemme tarkastelleet edellä mm. Esimerkissä III 2.5. Kyseisessä esimerkissä totesimme, että kullakin verkon H kahdeksalla "nurkkaruudun viereisellä reunaruudulla" on asteena kolme. Täten verkossa H ei ole Eulerin kulkua ja ongelmassa mainittua tehtävää ei ole mahdollista suorittaa.

(c) Tehtävät, joissa pyydetään piirtämään joku kuvio "yhteen kertaan kynää nostamatta", palautuvat Eulerin kulkujen etsimiseen kuvioita vastaavista verkoista. Seuraavassa eräitä tällaisia kuvioita:



4. Verkon yksisuuntaistukset.

Suhteikon sanotaan olevan *yksisuuntainen*, mikäli siinä ei ole kahta "vastakkaista" nuolta $\overrightarrow{ab}$ ja $\overrightarrow{ba}$. Verkko on yksisuuntainen vain siinä triviaalissa tapauksessa, että sillä ei ole yhtään viivaa; kuitenkin myös epätriviaaleihin verkkoihin liittyy yksisuuntaisia suhteikkoja, joiden tarkastelu saattaa selvittää verkon rakennetta.

Määritelmä Olkoon G verkko. Suhteikko $\vec{G}$ on verkon G *yksisuuntaistus*, jos $\vec{G}$ on yksisuuntainen ja $\vec{G}^s = G$.

Määritelmän mukaisesti $\vec{G}$ on siis G:n yksisuuntaistus, mikäli $\vec{G}$ on saatu G:stä valitsemalla jokaisella $\overline{xy} \in V_G$, jompikumpi, mutta ei molempia, nuolista $\overrightarrow{xy}$ ja $\overrightarrow{yx}$ joukkoon N_G.

Jos G on yhtenäinen verkko, niin jokainen G:n yksisuuntaistus on Lauseen III 3.3 nojalla yhtenäinen. Tarkastelemme nyt eräitä yhtenäisyyttä voimakkaampia ominaisuuksia verkkojen yksisuuntaistusten yhteydessä.

Täydellisen verkon jokainen yksisuuntaistus on täydellinen suhteikko, joten Lauseen III 5.4 korollaari osoittaa, että täydellisen verkon jokaisella yksisuuntaistuksella on juuri. Mielivaltaisen yhtenäisen verkon tapauksessa pätee seuraava heikompi tulos.

IV 4.1 Lause *Olkoon G yhtenäinen verkko ja olkoon a G:n piste. Tällöin G:llä on sellainen yksisuuntaistus $\vec{G}$, että a on $\vec{G}$:n juuri.*

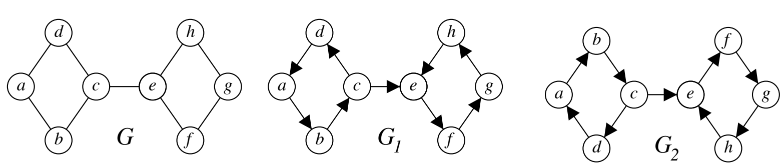
Todistus. Koska G on yhtenäinen, niin jokaisella $y \in P_G$ on olemassa kulku $(x_0, ..., x_n)$ pisteestä a pisteeseen y. Merkitään jokaisella $y \in P_G$, $f(y)$:llä pienintä lukua $n \in \mathbb{N}$, jolla G:ssä on n–askeleinen kulku a:sta y:hyn.

Jokaisella $v \in V_G$ valitaan nuoli $\overrightarrow{a_v b_v}$ siten, että $\overline{a_v b_v} = v$ ja $f(a_v) \leq f(b_v)$. Tällöin suhteikko $\vec{G}$, joka määräytyy ehdoista $P_{\vec{G}} = P_G$ ja $N_{\vec{G}} = \{\overrightarrow{a_v b_v} : v \in V_G\}$, on verkon G yksisuuntaistus.

Osoitetaan, että a on suhteikon $\vec{G}$ juuri. Olkoon y $\vec{G}$:n piste. Tällöin $y \in P_G$, joten G:ssä on kulku $(x_0, ..., x_n)$ a:sta y:hyn, missä $n = f(y)$. Osoitetaan, että $(x_0, ..., x_n)$ on myös kulku suhteikossa $\vec{G}$. Tehdään vastaväite: on olemassa sellainen $i \in [n]$, että $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ ei ole suhteikon $\vec{G}$ nuoli. Koska $\overline{x_{i-1}x_i} \in V_G$ ja $\overrightarrow{x_{i-1}x_i} \notin N_{\vec{G}}$, niin $\overrightarrow{x_i x_{i-1}} \in N_{\vec{G}}$ ja tästä seuraa joukon $N_{\vec{G}}$ alkioiden valinnan nojalla, että on voimassa $f(x_i) \leq f(x_{i-1})$. Koska $(x_0, ..., x_{i-1})$ on $i-1$ – askeleinen kulku G:ssä pisteestä a pisteeseen x_{i-1}, niin on voimassa $f(x_{i-1}) \leq i-1$. Näin ollen pätee, että $f(x_i) \leq f(x_{i-1}) \leq i-1$. Olkoon $(y_0, ..., y_k)$ sellainen kulku G:ssä a:sta x_i:hin, että $k = f(x_i)$. Tällöin on voimassa $k = f(x_i) \leq i-1$. Mutta nyt $(y_0, ..., y_k, x_{i+1}, ..., x_n)$ on kulku G:ssä a:sta y:hyn ja tämän kulun askelten lukumäärä on $k + (n-i) \leq n-1$; tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $n = f(y)$. Edellisen nojalla vastaväite on väärä ja suhteikossa $\vec{G}$ on täten kulku $(x_0, ..., x_n)$ pisteestä a pisteeseen y. $\square$

Yleensä annetulla yhtenäisellä verkolla on useita eri yksisuuntaistuksia, joilla on annettu verkon piste juurena.

IV 4.2 Esimerkki Alla molemmat oikealla puolella olevat suhteikot ovat vasemmalla kuvatun verkon G yksisuuntaistuksia ja kummallakin on G:n piste c juurena.



Tietyissä käytännön tilanteissa haluaisimme löytää annetulle (yhtenäiselle) verkolle G sellaisen yksisuuntaistuksen $\vec{G}$, että suhteikossa $\vec{G}$ voidaan kulkea mistä tahansa pisteestä mihin tahansa muuhun pisteeseen.

Näemme helposti yllä olevassa esimerkissä, että jos $\vec{G}$ on sellainen G:n yksisuuntaistus, jolla on piste a juurena, niin G:ssä on oltava nuoli $\overrightarrow{ce}$; vastaavasti, jos $\vec{G}$ on sellainen G:n yksisuuntaus, jolla on piste g juurena, niin $\vec{G}$:ssä on oltava nuoli $\overrightarrow{ec}$. Emme siis voi yksisuuntaistaa verkkoa G siten, että sekä a että g olisivat juuria. Näin ollen mikään G:n yksisuuntaistus ei ole vahvasti yhtenäinen. Luonnehdimme nyt niitä verkkoja, joilla on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus.

IV 4.3 Määritelmä Verkko G on *kahdesti yhtenäinen*, mikäli jokaisella $v \in V_G$, verkko $G - v$ on yhtenäinen.

Lemman IV 1.2 nojalla saamme seuraavan tuloksen.

IV 4.4 Lause *Verkko on kahdesti yhtenäinen jos ja vain jos verkko on yhtenäinen ja sen jokainen viiva kuuluu johonkin renkaaseen.*

Seuraava tulos antaa perustelun yllä käyttöönottamallemme nimitykselle.

IV 4.5 Lemma *Verkko G on kahdesti yhtenäinen jos ja vain jos jokaisella joukon P_G aidolla, epätyhjällä osajoukolla P, verkossa G on ainakin kaksi viivaa joukkojen P ja $P_G \setminus P$ välillä.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

IV 4.6 Lause *Verkolla on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus jos ja vain jos verkko on kahdesti yhtenäinen.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Oletamme, että verkolla G on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus $\vec{G}$. Osoitamme edellisen lemman avulla, että verkko G on kahdesti yhtenäinen. Olkoon P joukon P_G epätyhjä aito osajoukko. Koska $\vec{G}$ on vahvasti yhtenäinen, $\vec{G}$:ssä on nuoli $\overrightarrow{ab}$ joukkoon P ja nuoli $\overrightarrow{cd}$ joukosta P. On voimassa $\overrightarrow{ab} \neq \overrightarrow{cd}$ ja tästä seuraa, koska $\vec{G}$ on yksisuuntainen, että $\overline{ab} \neq \overline{cd}$. Koska $\vec{G}$ on G:n yksisuuntaistus, niin $\overline{ab}$ ja $\overline{cd}$ ovat G:n viivoja; lisäksi kumpikin näistä viivoista on joukkojen P ja $P_G \setminus P$ välinen viiva. Olemme osoittaneet, että edellisen lemman ehto toteutuu.

Riittävyys. Oletamme, että verkko G on kahdesti yhtenäinen. Osoitamme, että G:llä on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus. Väite pätee triviaalisti jos $|P_G| = 1$, joten voimme olettaa, että $|P_G| \neq 1$. Lauseen IV 4.4 nojalla voimme kirjoittaa $V_G = \bigcup_{i=1}^n R_i$, missä kukin R_i on rengas. Jokaisella $i \in [n]$ on olemassa sellainen yksinkertainen kierros $\bar{x}^i = (x_0^i, ..., x_{n_i}^i)$ verkossa G, että $R_i = V(\bar{x}^i)$. Panemme merkille, että G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä ja että täten on voimassa $P_G = \bigcup_{i=1}^n P(\bar{x}^i)$.

Määrittelemme G:n yksisuuntaistuksen $\vec{G}$ seuraavasti. Olkoon v verkon G viiva. Merkitsemme k:llä epätyhjän lukujoukon $\{i \in [n] : v \in R_i\}$ pienintä lukua. Olkoon $j \in [n_k]$ se luku, jolle pätee, että $v = \overline{x_{j-1}^k x_j^k}$. Suunnistamme viivan v valitsemalla nuolen $\overrightarrow{x_{j-1}^k x_j^k}$ joukkoon $N_{\vec{G}}$.

Osoitamme, että $\vec{G}$ on vahvasti yhtenäinen. Olkoon P joukon $P_{\vec{G}} = P_G$ epätyhjä aito osajoukko. Koska G on yhtenäinen, viivajoukko $V = \{\overline{pq} \in V_G : p \in P \text{ ja } q \in P_G \setminus P\}$ on epätyhjä. Merkitsemme k:lla joukon $\{i \in [n] : V \cap R_i \neq \emptyset\}$ pienintä lukua. Lemman III 4.1(c) nojalla voimme olettaa, että $\overline{x_0^k x_1^k}$ on joukkojen P ja $P_G \setminus P$ välinen viiva. Oletamme, että vaikkapa $x_0^k \in P$ ja $x_1^k \notin P$; tapauksen $x_0^k \notin P$ ja $x_1^k \in P$ voimme käsitellä aivan vastaavasti. Merkitsemme j:llä suurinta niistä luvuista $i \in [n_k]$, joilla $x_i^k \notin P$. Panemme merkille, että on voimassa $j < n_k$, koska $x_{n_k}^k = x_0^k \in P$. Nyt $\overrightarrow{x_0^k x_1^k}$ on nuoli joukosta P ja $\overrightarrow{x_j^k x_{j+1}^k}$ on nuoli joukkoon P. Lisäksi nämä nuolet kuuluvat joukkoon $N_{\vec{G}}$, sillä luvun k minimaalisuudesta seuraa, ettei kumpikaan joukkojen P ja $P_G \setminus P$ välisistä viivoista $\overline{x_0^k x_1^k}$ ja $\overline{x_j^k x_{j+1}^k}$ voi kuulua mihinkään joukkoon R_i, missä $i < k$. Olemme osoittaneet, että suhteikko $\vec{G}$ on vahvasti yhtenäinen. □

Edellisen lauseen tulos antaa esimerkiksi riittävän ja välttämättömän (joskin teoreettisen) ehdon sille, että jossakin kaupungissa kaikki kadut voitaisiin tehdä yksisuuntaisiksi ilman, että estettäisiin pääsyä mistään paikasta mihinkään toiseen paikkaan.

Harjoitustehtäviä Lukuun IV

1. Näytä, että tetraedriin liittyvässä verkossa (eli verkossa K_4) ei ole kahta erillistä rengasta.

2. Näytä, että tetraedriin liittyvän verkon renkaiden lukumäärä on seitsemän.

3. Osoita, että viiden pisteen täydellisessä verkossa K_5 ei ole kahta keskenään erillistä neliötä (eli 4-rengasta).

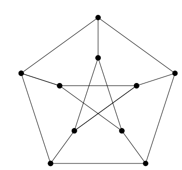
4. Näytä, että jos verkon K_5 jokainen viiva väritetään joko siniseksi tai punaiseksi, niin väritetystä verkosta löytyy yksivärinen rengas. Päteekö vastaava tulos verkolle K_4?

5. Olkoon A joukon $[n]$ k-osajoukko, missä $k > 2$. Näytä, että täydellisessä verkossa K_n:ssä on täsmälleen $\frac{(k-1)!}{2}$ sellaista k-rengasta, joiden viivojen päätepisteet ovat joukossa A.

   [Ohje: jokaiseen sellaiseen renkaaseen liittyy kaksi joukon A syklistä permutaatiota (katso Luvun II harjoitustehtävä 47).]

6. Johda edellisen tehtävän avulla lauseke verkon K_n renkaiden lukumäärälle. Vertaa lausekkeesi antamaa tulosta tapauksessa $n = 4$ yllä tehtävässä 2 annettuun lukuun.

7. Alla olevassa Petersenin verkon P esityksessä näkyy selvästi uloimpien viivojen muodostama 5-rengas. Nähdään myös helposti että sisimpien viivojen muodostama tähtikuvio on P:n 5-rengas, joka on erillinen ulommasta 5-renkaasta. Näytä, että vastaava tilanne pätee verkon P jokaisen 5-renkaan kohdalla (eli että jos R on mielivaltainen P:n 5-rengas, niin P:ssä on R:stä erillinen 5-rengas).



8. Osoita edellisen tehtävän avulla, että Petersenin verkon kaikkien 5-renkaiden joukko voidaan esittää kuuden eri 10-viivaisen renkaiston yhdisteenä.

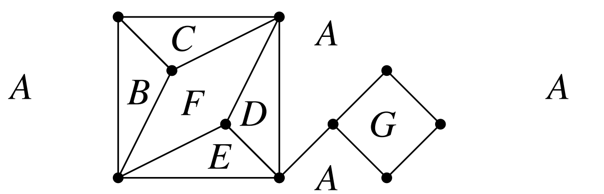
9. Osoita, ettei Petersenin verkossa ole yhtään kolmiota tai neliötä.

10. Osoita, että verkko on kaksijakoinen (katso Luvun III harjoitustehtävä 7) jos ja vain jos verkon jokaisessa renkaassa on parillinen määrä viivoja.

11. Osoita, että verkko G on rengasverkko jos ja vain jos G on yhtenäinen ja 2–säännöllinen (katso Luvun III harjoitustehtävä 24).

12. Osoita, että täydellisen verkon K_{2n+1} kaikkien viivojen joukolle V löytyy sellainen esitys renkaistona: $V = \bigcup_{i=1}^{n} V(\bar{x}_i)$, että kulut $\bar{x}_i$ ovat K_{2n+1}:n Hamiltonin kierroksia.

Oletetaan, että tasoverkko G on esitetty yksinkertaisesti tasossa (katso Harjoitustehtävä III 38). Voidaan osoittaa, että esityksen janat jakavat tason äärellisen moneen osaan, joista kullakin on janojen muodostama murtoviiva "reunana"; näistä osista yksi on rajoittamaton ja muut rajoitettuja. Kyseisiä tason osia kutsutaan tasoverkon *alueiksi*. Esimerkiksi alla kuvattu verkko jakaa tason rajoittamattomaan alueeseen A sekä rajoitettuihin alueisiin B,C,D,E,F ja G.



13. Osoita, että tasoverkon jokaista rajoitettua aluetta reunustavan murtoviivan sisältämien janojen joukko (tarkemmin: näitä janoja vastaavien verkon viivojen joukko) on verkon rengas. Osoita, että kaikki nämä renkaat yhdessä virittävät verkon renkaistoryhmän (toisinsanoen, että jokainen verkon renkaisto voidaan esittää muodossa $R_1 \Delta \cdots \Delta R_k$, missä R_i't ovat alueiden reunoihin liittyviä renkaita). Osoita myös, että nämä "reunarenkaat" ovat toisistaan riippumattomat siinä mielessä, ettei mitään niistä voida esittää muiden reunarenkaiden symmetrisenä erotuksena.

14. Dominopalikan kummassakin päässä on $0 - 6$ pistettä. Todista, että kaikki dominopalikat (yksi kutakin tyyppiä) voidaan sovittaa yhteen umpinaiseksi renkaaksi, jossa palikoiden toisiaan koskettavissa päissä on sama pisteluku. Onko tämä mahdollista, jos pisteitä on $0 - 5$?

Luonnehdimme edellä Eulerin kulun olemassaoloa vain verkkojen tapauksessa, mutta tuloksilla on myös vastineet yleisille suhteikoille. Olkoon S suhteikko ja olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku suhteikossa S. Sanomme, että $\bar{x}$ on *Eulerin kulku pitkin suhteikon S nuolia*, mikäli jokainen S:n nuoli esiintyy täsmälleen yhden kerran jonossa $(\overrightarrow{x_0x_1}, ..., \overrightarrow{x_{n-1}x_n})$; jos $\bar{x}$ on lisäksi kierros, niin sanomme, etta se on *Eulerin kierros pitkin suhteikon S nuolia*.

15. Näytä, että eristettyjä pisteitä vailla olevassa suhteikossa S on nuolia pitkin kulkeva Eulerin kierros jos ja vain jos S on yhtenäinen ja $d_S^+(x) = d_S^-(x)$ jokaisella $x \in P_S$.

    [Ohje: muunna Lauseen IV 3.5 todistusta.]

16. Osoita edellisen tehtävän avulla, että jokaisessa yhtenäisessä verkossa on nuolia pitkin kulkeva Eulerin kierros.

17. Osoita, että jos S on eristettyjä pisteitä vailla oleva suhteikko, niin S:ssä on nuolia pitkin kulkeva Eulerin kulku S:n pisteestä a S:n pisteeseen b, missä $a \neq b$, jos ja vain jos S on yhtenäinen, $d_S^-(a) = d_S^+(a) + 1$, $d_S^+(b) = d_S^-(b) + 1$ ja jokaisella $x \in P_S \setminus \{a, b\}$ on voimassa $d_S^+(x) = d_S^-(x)$.

    [Ohje: Tehtävän 15 tulos ja Lauseen IV 3.7 todistus.]

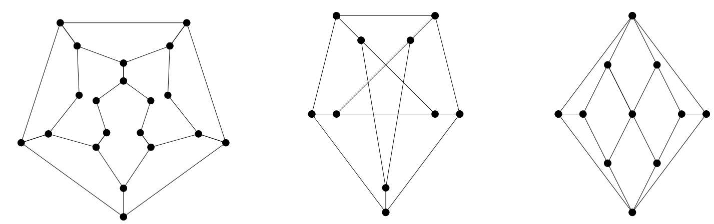
18. Aseta 8 nollaa ja 8 ykköstä renkaaksi niin, että jokainen yhdistelmä $0000, 0001, \ldots, 1111$ esiintyy siinä kerran. (Vihje: Nuolia pitkin kulkeva Eulerin kulku suhteikossa, jonka pisteet ovat $000, 001, \ldots, 111$.)

19. Olkoon S suhteikko, jolla on pistejoukkona [4] ja yhteysmatriisina

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Etsi S:lle a) nuolia pitkin kulkeva Eulerin kulku ja b) Hamiltonin kulku, mikäli sellainen kulku on olemassa.

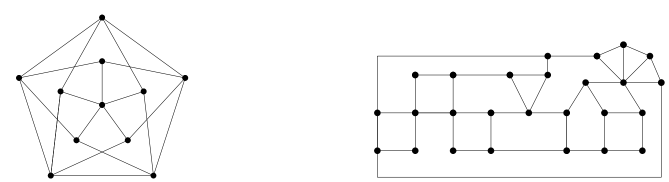
20. Etsi seuraavassa kuvatuille verkoille vahvasti yhtenäiset yksisuuntaistukset.



21. Olkoon G verkko. Osoita Korollaarin III 2.4 avulla, että jos G ei jo valmiiksi ole parillisasteinen, niin G voidaan tehdä parillisasteiseksi "lisäämällä yksi piste", toisin sanoen, on olemassa sellainen parillisasteinen verkko H, että $P_G \subset P_H$, $|P_H \setminus P_G| = 1$ ja G on joukon P_G virittämä H:n aliverkko.

22. Osoita Eulerin Lauseen (IV 3.5) ja edellisen tehtävän avulla, että jokaisella verkolla G on sellainen yksisuuntaistus $\vec{G}$, että jokaisella $x \in P_G$ on voimassa $|d_{\vec{G}}^+(x) - d_{\vec{G}}^-(x)| \leq 1$.

23. Etsi edellisen tehtävän mukainen yksisuuntaistus seuraaville verkoille:



LUKU V

Puut

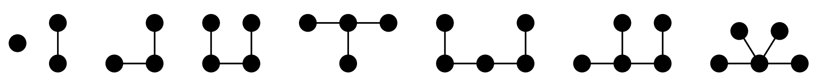
1. Puiden perusominaisuudet.

V 1.1 Määritelmä Olkoon G verkko.

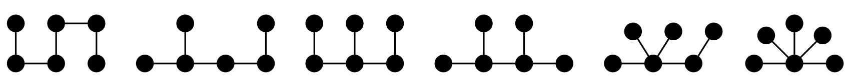
G on *renkaaton*, jos G:llä ei ole yhtään rengasta.

G on *puu*, jos G on renkaaton ja yhtenäinen.

V 1.2 Esimerkki Seuraava kuva esittää puita, joilla on korkeintaan viisi pistettä:



On helppo nähdä, että kuvassa on esitetty siinä mielessä *kaikki* korkeintaan viisipisteiset puut, että jokainen tällainen puu on isomorfinen jonkun kuvassa näkyvän puun kanssa. Seuraavassa kuvassa on puolestaan esitetty isomorfiaa vaille kaikki erilaiset kuusipisteiset puut.



Aikaisempien tulosten avulla voidaan johtaa tärkeä yhtälö, joka vallitsee puun pisteiden ja viivojen lukumäärien välillä.

V 1.3 Lause *Jokaiselle epätyhjälle puulle T on voimassa yhtälö*

$$\boxed{v_T = p_T - 1}$$

Todistus. Olkoon T puu. Koska T on yhtenäinen, niin Lauseen III 3.11 nojalla on voimassa epäyhtälö $v_T \geq p_T - 1$. Toisaalta, koska T on renkaaton, niin Lauseen IV 1.9 nojalla pätee epäyhtälö $v_T < p_T$. Yhdistämällä edelliset kaksi epäyhtälöä saadaan haluttu yhtälö $v_T = p_T - 1$. □

Edellisen lauseen yhtälö ei luonnehdi puita verkkojen joukossa, kuten näemme vaikkapa tarkastelemalla verkkoa $K_3 \vee (\{4\}, \emptyset)$, joka koostuu yhdestä kolmiosta sekä yhdestä eristetystä pisteestä.

V 1.4 Määritelmä Puun T piste x on T:n *lehti*, mikäli $d_T(x) = 1$.

V 1.5 Lause A. *Jos puulla on ainakin kaksi pistettä, niin sillä on ainakin kaksi lehteä.*

B. *Jos epätyhjän puun kaikki pisteet ovat lehtiä, niin puussa on täsmälleen kaksi pistettä.*

Todistus. A. Olkoon T puu, $|P_T| \geq 2$. Korollaarin IV 1.5 nojalla T:llä on sellaiset pisteet x ja y, että $x \neq y$, $d_T(x) \leq 1$ ja $d_T(y) \leq 1$. Koska T on yhtenäinen, T:ssä ei ole eristettyjä pisteitä; tästä seuraa, että $d_T(x) = d_T(y) = 1$.

B. Olkoon T sellainen epätyhjä puu, että jokaisella $x \in P_T$ on voimassa $d_T(x) = 1$. Tällöin on voimassa $\sum_{x \in P_T} d_T(x) = p_T$. Lauseen III 2.3 nojalla pätee, että $\sum_{x \in P_T} d_T(x) = 2 \cdot v_T$. Edellisestä seuraa, että $p_T = 2 \cdot v_T$. Koska Lauseen V 1.3 nojalla pätee, että $v_T = p_T - 1$, niin saadaan yhtälö $p_T = 2 \cdot (p_T - 1)$ ja tästä seuraa vaadittu yhtälö $p_T = 2$. □

Esitetään nyt eräitä välttämättömiä ja riittäviä ehtoja sille, että verkko on puu. Luonnehditaan aluksi puita kulkujen avulla.

V 1.6 Lause *Verkko G on puu jos ja vain jos kaikilla $x, y \in P_G$, missä $x \neq y$, on olemassa täsmälleen yksi yksinkertainen kulku G:ssä pisteestä x pisteeseen y.*

Todistus. Koska G:ssä on jokaisella $z \in P_G$ kulku pisteestä z pisteeseen z, Lauseen III 4.7 ja Lemman III 4.3 tuloksista seuraa, että G on yhtenäinen jos ja vain jos kaikilla $x, y \in P_G$, missä $x \neq y$, G:ssä on ainakin yksi yksinkertainen kulku pisteestä x pisteeseen y. Toisaalta, Lauseen IV 2.7 nojalla, G on renkaaton jos ja vain jos kaikilla $x, y \in P_G$, missä $x \neq y$, G:ssä on korkeintaan yksi yksinkertainen kulku pisteestä x pisteeseen y. Näin ollen G on yhtenäinen ja renkaaton jos ja vain jos lauseen ehto on voimassa. □

Annamme seuraavaksi luonnehdinnat puille "minimaalisina yhtenäisinä verkkoina" ja "maksimaalisina renkaattomina verkkoina". Otamme käyttöön seuraavat nimitykset. Olkoot G ja H verkkoja. Jos on voimassa $P_G = P_H$ ja $V_G \subsetneq V_H$, niin sanomme, että H on saatu *lisäämällä* G:hen *viivoja* tai että G on saatu *poistamalla* H:sta *viivoja*.

V 1.7 Lause *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät verkolle G:*

A. *G on puu.*

B. *G on yhtenäinen, mutta jokainen verkko, joka on saatu poistamalla G:stä viivoja, on epäyhtenäinen.*

C. *G on renkaaton, mutta jokaisella verkolla, joka on saatu lisäämällä G:hen viivoja, on rengas.*

Todistus. A$\Longrightarrow$B ja A$\Longrightarrow$C: Oletetaan, että G on puu. Tällöin G on yhtenäinen ja renkaaton ja Lauseen V 1.3 nojalla on voimassa yhtälö $v_G = p_G - 1$. Olkoon nyt H verkko, joka on saatu poistamalla G:stä viivoja. Tällöin on voimassa $p_H = p_G$ ja $v_H < v_G$, joten $v_H < v_G = p_G - 1 = p_H - 1$. Lauseen III 3.11 nojalla verkko H on epäyhtenäinen. On osoitettu, että ehto B on voimassa. Olkoon H' verkko, joka on saatu lisäämällä G:hen viivoja. Tällöin on voimassa $p'_H = p_G$ ja $v'_H > v_G$, joten $v'_H > v_G = p_G - 1 = p'_H - 1$. Lauseen IV 1.9 nojalla verkolla H' on rengas. On osoitettu, että ehto C on voimassa.

B$\Longrightarrow$A: Oletetaan, että ehto B pätee. Tällöin G on yhtenäinen, joten G on puu, mikäli G on renkaaton. Verkon G renkaattomuus seuraa Lemman IV 1.8 tuloksesta, sillä jokainen muotoa $G - v$, missä $v \in V_G$, oleva verkko on saatu poistamalla G:stä viivoja.

C$\Longrightarrow$A: Oletetaan, että ehto C pätee. Tällöin G on renkaaton, joten G on puu, mikäli G on yhtenäinen. Jos G on täydellinen verkko, niin G on yhtenäinen. Oletetaan,

ettei G ole täydellinen. Tällöin on olemassa sellaiset G:n pisteet x ja y, että $x \neq y$ ja $\overline{xy} \notin V_G$. Merkitään $v = \overline{xy}$ ja määritellään verkko H asettamalla $P_H = P_G$ ja $V_H = V_G \cup \{v\}$. Tällöin verkko H on saatu verkosta G viivoja lisäämällä, joten verkossa H on rengas W. Koska verkko G on renkaaton, nähdään että $v \in W$. Lemman IV 1.8 nojalla verkko $H - v$ on yhtenäinen. Koska $H - v = G$, on osoitettu, että verkko G on yhtenäinen. □

V 1.8 Korollaari *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät verkolle G:*

A. *G on puu.*

B. *G on yhtenäinen ja $v_G \leq p_G - 1$.*

C. *G on renkaaton ja $v_G \geq p_G - 1$.*

Todistus. Puun määritelmän ja Lauseen V 1.3 nojalla on voimassa A$\Longrightarrow$B ja A$\Longrightarrow$C.

B$\Longrightarrow$A: Oletetaan, että ehto B on voimassa. Osoitetaan, että tällöin edellisen lauseen ehto B on voimassa. Olkoon H verkko, joka on saatu poistamalla G:stä viivoja. Tällöin on voimassa $v_H < v_G$ ja $p_H = p_G$, joten $v_H < v_G \leq p_G - 1 = p_H - 1$. Edellisestä seuraa Lauseen III 3.11 nojalla, että verkko H on epäyhtenäinen. On näytetty, että edellisen lauseen ehto B on voimassa; lauseen nojalla verkko G on puu.

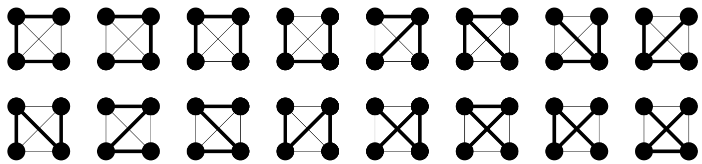
C$\Longrightarrow$A: Oletetaan, että ehto C on voimassa. Osoitetaan, että tällöin edellisen lauseen ehto C pätee. Olkoon H verkko, joka on saatu lisäämällä G:hen viivoja. Tällöin $v_H > v_G$ ja $p_H = p_G$, joten $v_H > v_G \geq p_G - 1 = p_H - 1$. Edellisestä seuraa Lauseen IV 1.9 nojalla, että verkossa H on rengas. On näytetty, että G toteuttaa edellisen lauseen ehdon C; kyseisen lauseen nojalla G on puu. □

2 Virittävät puut.

Puita voidaan käyttää hyväksi myös sellaisten verkkojen tapauksessa, jotka eivät ole puita. Otetaan käyttöön seuraava käsite.

V 2.1 Määritelmä Olkoon G verkko. Verkon G aliverkko H on G:n *virittävä puu*, mikäli H on puu ja $P_H = P_G$.

V 2.2 Esimerkki Alla on esitetty täydellisen neljän pisteen verkon virittäviä puita:



V 2.3 Lause *Verkolla G on virittävä puu jos ja vain jos G on yhtenäinen.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Oletamme, että G:llä on virittävä puu H. Koska H on G:n yhtenäinen aliverkko, jolle pätee, että $P_H = P_G$, näemme verkon G olevan yhtenäinen.
Riittävyys. Oletamme, että G on yhtenäinen. Merkitsemme

$$\mathcal{H} = \{H < G : H \text{ on yhtenäinen ja } P_H = P_G\}.$$

Panemme merkille, että on voimassa $\mathcal{H} \neq \emptyset$ koska $G \in \mathcal{H}$. Merkitsemme n:llä lukujoukon $\{v_H : H \in \mathcal{H}\}$ pienintä lukua. Olkoon T sellainen joukon $\mathcal{H}$ alkio, että $v_T = n$. Osoitamme, että T on G:n virittävä puu. Koska $T \in \mathcal{H}$, on voimassa yhtälö $P_T = P_G$; näinollen T on G:n virittävä puu, mikäli T on puu. Käytämme tämän osoittamiseen Lauseen V 1.7 ehdon B antamaa puiden luonnehdintaa. Koska $T \in \mathcal{H}$, verkko T on yhtenäinen. Olkoon nyt L verkko, joka on saatu poistamalla T:stä viivoja. Tällöin on voimassa $v_L < v_T = n$, joten luvun n määritelmästä seuraa, että $L \notin \mathcal{H}$; tästä puolestaan seuraa, koska $P_L = P_T = P_G$, että verkko L ei ole yhtenäinen. Olemme osoittaneet, että Lauseen V 1.7 ehto B on voimassa. Verkko T on kyseisen lauseen nojalla puu. □

Yllä esitetty todistus antaa seuraavan menetelmän yhtenäisen verkon G virittävän puun löytämiseksi: poistetaan G:stä viivoja niin pitkään kuin tämä on mahdollista tekemättä saatavaa verkkoa epäyhtenäiseksi; viimeiseksi saatu verkko on G:n virittävä puu. Toinen menetelmä, joka perustuu Lauseen V 1.7 ehtoon C, on seuraava: aloitetaan verkosta $(P_G, \emptyset)$ ja lisätään viivoja joukosta V_G niin kauan kuin tämä on mahdollista ilman, että saatavassa verkossa on yhtään rengasta.

Jokaisella puulla on vain yksi virittävä puu, mutta yleensä yhtenäisellä verkolla on useampia eri virittäviä puita. Lasketaan nyt montako virittävää puuta n–pisteisellä yhtenäisellä verkolla voi olla, toisin sanoen, lasketaan täydellisen verkon K_n virittävien puiden lukumäärä. Todistetaan ensin eräitä aputuloksia.

V 2.4 Lemma *Olkoon T puu, jossa on vähintään kolme pistettä ja olkoon $A \subset P_T$ joukko T:n lehtiä. Tällöin joukon $P_T \setminus A$ virittämä T:n aliverkko T' on puu. Lisäksi on olemassa sellainen kuvaus $f : A \to P_T \setminus A$, että $V_T = V_{T'} \cup \{\overline{af(a)} : a \in A\}$.*

Todistus. Osoitamme aluksi kuvauksen f olemassaolon. Olkoon a joukon A alkio. Tällöin a on T:n lehti, joten on olemassa täsmälleen yksi sellainen $x \in P_T$, että $\overline{ax} \in V_T$; merkitsemme tätä alkiota x $f(a)$:lla. Osoitamme, että $f(a) \notin A$. Yhtenäisessä verkossa T on viiva v epätyhjien joukkojen $\{a, f(a)\}$ ja $P_T \setminus \{a, f(a)\}$ välillä. Koska $\overline{af(a)} \in V_T$, T:n lehti a ei voi olla viivan v päätepisteenä ja tästä seuraa, että $f(a)$ on v:n päätepiste. Edellisen nojalla pätee, että $f(a)$ ei ole T:n lehti; täten $f(a) \notin A$. Olemme osoittaneet, että f on kuvaus $A \to P_T \setminus A$. Joukossa $\{\overline{af(a)} : a \in A\}$ ovat kaikki ne T:n viivat, joilla on päätepiste joukossa A; koska kaikki muut T:n viivat ovat joukon $P_T \setminus A$ virittämän T:n aliverkon viivoja, on voimassa $V_T = V_{T'} \cup \{\overline{af(a)} : a \in A\}$.

Renkaattoman verkon T aliverkko T' on renkaaton, joten T' on puu, mikäli T' on yhtenäinen. Olkoon P joukon $P_{T'}$ epätyhjä, aito osajoukko. Merkitsemme $P' = P \cup \{a \in A : f(a) \in P\}$ ja panemme merkille, että P' on joukon P_T epätyhjä ja aito osajoukko. Yhtenäisessä verkossa T on sellainen viiva $\overline{xy}$, että $x \in P'$ ja $y \in P_T \setminus P'$. Jokaisella $a \in A \cap P'$ on voimassa $f(a) \in P'$ ja tästä seuraa, että $x \notin A$; vastaavasti, jokaisella $a \in A \setminus P'$ on voimassa $f(a) \notin P'$ ja tästä seuraa, että $y \notin A$. Edellisen nojalla pätee, että $x \in P$ ja $y \in P_{T'} \setminus P$; koska tästä seuraa myös, että $\overline{xy} \in V_{T'}$, olemme näyttäneet T':n olevan yhtenäinen. □

V 2.5 Lemma *Olkoon S epätyhjä puu, olkoon A sellainen joukko, että $A \cap P_S = \emptyset$ ja olkoon f kuvaus $A \to P_S$. Tällöin ehtojen $P_G = P_S \cup A$ ja $V_G = V_S \cup \{\overline{af(a)} : a \in A\}$ määräämä verkko G on puu ja jokainen A:n alkio on puun G lehti.*

Todistus. Panemme merkille, että on voimassa $p_G = p_S + |A|$ ja $v_G = v_S + |A|$ ja näinollen $p_G - v_G = p_S - v_S$. Lauseen V 1.3 nojalla on voimassa $p_S - v_S = 1$. Edellisen nojalla pätee, että $p_G - v_G = 1$ ja tästä seuraa Korollaarin V 1.8 nojalla, että G on puu, mikäli G on yhtenäinen. Olkoon p joku puun S piste. Osoitamme, että jokaisella $x \in P_G$, G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen p. Jos $x \in P_S$, niin tällöin S:ssä on kulku $\bar{x}$ pisteestä x pisteeseen p ja $\bar{x}$ on myös kulku verkossa G. Jos taas $x \in A$, niin tällöin S:ssä on kulku $(x_0, ..., x_n)$ pisteestä $f(x)$ pisteeseen p ja tässä tapauksessa $(x, x_0, ..., x_n)$ on kulku G:ssä x:stä p:hen. Olemme näyttäneet, että jokaisella $x \in P_G$, G:ssä on kulku x:stä p:hen; tästä seuraa Lauseen III 4.7 nojalla, että G on yhtenäinen.

Edellä esitetyn nojalla G on puu. Jokaisella $a \in A$, piste a on G:n lehti, sillä $\overline{af(a)}$ on ainoa G:n viiva, jolla on a päätepisteenä. $\square$

Käyttämällä hyväksi edellisiä lemmoja sekä summa- ja erotusperiaatetta voimme nyt määrittää täydellisen verkon virittävien puiden lukumäärän.

V 2.6 Lause *Jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$, verkon K_n virittävien puiden lukumäärä on n^{n-2}.*

Todistus. Merkitsemme jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$, π_n:llä verkon K_n virittävien puiden lukumäärää ja panemme merkille, että jokaisessa n–pisteisessä täydellisessä verkossa on sama määrä virittäviä puita. Osoitamme induktiolla luvun n suhteen, että jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$ on voimassa $\pi_n = n^{n-2}$.

Verkot K_1 ja K_2 ovat puita, joten on voimassa $\pi_1 = \pi_2 = 1$; näinollen yhtälö $\pi_k = k^{k-2}$ pätee, kun $k = 1, 2$.

Olkoon nyt $n > 2$ sellainen luku, että jokaisella $k < n$ on voimassa $\pi_k = k^{k-2}$. Osoitamme summa– ja erotusperiaatteen (Lause II 2.3) avulla, että on voimassa $\pi_n = n^{n-2}$. Merkitsemme $\mathcal{T}$:llä verkon K_n kaikkien virittävien puiden muodostamaa kokoelmaa ja merkitsemme $\mathcal{T}_a = \{T \in \mathcal{T} : a \text{ on puun } T \text{ lehti}\}$ jokaisella $a \in [n]$. Merkitsemme edelleen $\mathcal{T}_A = \bigcap_{a \in A} \mathcal{T}_a$ jokaisella $\emptyset \neq A \subset [n]$. Lauseen V 1.5 nojalla on voimassa $\mathcal{T} = \bigcup_{a \in [n]} \mathcal{T}_a$. Summa– ja erotusperiaatteen nojalla on voimassa

$$\pi_n = |\mathcal{T}| = \sum_{\emptyset \neq A \subset [n]} (-1)^{|A|+1} \Big| \mathcal{T}_A \Big|. \tag{$*$}$$

Osoitamme, että jokaisella $\emptyset \neq A \subset [n]$ on voimassa $|\mathcal{T}_A| = (n - |A|)^{n-2}$. Yhtälö pätee, jos $A = [n]$, sillä tässä tapauksessa $\mathcal{T}_A = \emptyset$ Lauseen V 1.5 ja epäyhtälön $n > 2$ nojalla. Olkoon nyt A joukon $[n]$ epätyhjä aito osajoukko. Puu $T \in \mathcal{T}$ kuuluu joukkoon $\mathcal{T}_A$ jos ja vain jos jokainen A:n alkio on T:n lehti. Edellisen ja Lemman V 2.4 nojalla on jokaisella $T \in \mathcal{T}_A$ olemassa sellainen kuvaus $f_T : A \to [n] \smallsetminus A$ ja sellainen puu $S(T)$, että $P_{S(T)} = [n] \smallsetminus A$ ja $V_T = V_{S(T)} \cup \{\overline{af_T(a)} : a \in A\}$. Merkitsemme $\mathcal{S}$:llä täydellisen verkon $K_{[n] \smallsetminus A}$ virittävien puiden muodostamaa joukkoa ja panemme merkille, että jokaisella $T \in \mathcal{T}_A$ on voimassa $S(T) \in \mathcal{S}$. Määrittelemme kuvauksen $\psi : \mathcal{T}_A \to ([n] \smallsetminus A)^A \times \mathcal{S}$ asettamalla $\psi(T) = (f_T, S(T)$ jokaisella $T \in \mathcal{T}_A$. Kuvaus ψ on injektio, koska jokainen $T \in \mathcal{T}_A$ määräytyy kuva–alkiostaan $\psi(T)$ ehtojen $P_T =$

$[n]$ ja $V_T = V_{S(T)} \cup \{\overline{af_T(a)} : a \in A\}$ kautta. Kuvaus ψ on myös surjektio, sillä jokaisella $(f, S) \in ([n] \smallsetminus A)^A \times \mathcal{S}$, jos määrittelemme verkon G kuten Lemmassa V 2.5, niin tällöin kyseisen lemman nojalla pätee, että $G \in \mathcal{T}_A$ ja toisaalta näemme helposti, että on voimassa $\psi(G) = (f, S)$. Edellisen nojalla kuvaus ψ on bijektio. Täten on voimassa $|\mathcal{T}_A| = \big|([n] \smallsetminus A)^A \times \mathcal{S}\big|$ ja näinollen, Luvun II 3 tulosten nojalla, $|\mathcal{T}_A| = (n - |A|)^{|A|} \cdot |\mathcal{S}|$. Lisäksi pätee, että $|\mathcal{S}| = \pi_{n-|A|}$. Koska $0 < n - |A| < n$, induktio–oletuksesta seuraa, että $\pi_{n-|A|} = (n - |A|)^{n-|A|-2}$. Edellä esitetyn nojalla on voimassa

$$|\mathcal{T}_A| = (n - |A|)^{|A|} \cdot (n - |A|)^{n-|A|-2} = (n - |A|)^{n-2}.$$

Koska jokaiselle $\emptyset \neq A \subset [n]$ on voimassa $|\mathcal{T}_A| = (n - |A|)^{n-2}$ ja koska jokaisella $k \in [n]$, joukon $[n]$ k–alkioisten osajoukkojen lukumäärä on $\binom{n}{k}$, saamme yhtälön ($*$) nojalla yhtälön $\pi_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^{n-2}$. Voimme kirjoittaa viimeisen yhtälön oikean puolen muotoon $n^{n-2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{n-2}$. Koska Korollaarin II 3.14 nojalla pätee, että $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{n-2} = 0$, saamme halutun yhtälön $\pi_n = n^{n-2}$. $\square$

Voimme käyttää verkon virittäviä puita hyväksi tutkiessamme verkon renkaita ja renkaistoja.

V 2.7 Lemma *Olkoon T verkon G virittävä puu ja olkoon v joukon $V_G \smallsetminus V_T$ alkio. Tällöin on olemassa sellainen G:n rengas R, että $R \smallsetminus V_T = \{v\}$.*

Todistus. Olkoon $v = \overline{xy}$. Tällöin $x \neq y$ ja $x, y \in P_G = P_T$. Lauseen V 1.6 nojalla verkossa T on yksinkertainen kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ pisteestä x pisteeseen y. Koska T on G:n aliverkko, niin $\bar{x}$ on kulku myös verkossa G. Koska $\overline{x_n x_0} = v \in V_G$, niin jono $\bar{x}' = (x_0, ..., x_n, x_0)$ on kierros verkossa G. Kulun $\bar{x}$ yksinkertaisuudesta seuraa, että myös kierros $\bar{x}'$ on yksinkertainen. Koska $\overline{x_0 x_1} \in V_T$ ja $\overline{x_0 x_n} = v \notin V_T$, niin on voimassa $x_n \neq x_1$ ja täten $n > 1$. Edellisen nojalla kierros $\bar{x}'$ on vähintään kolmiaskeleinen; näin ollen joukko $R = V(\bar{x}')$ on G:n rengas. Lisäksi on voimassa $R \smallsetminus V_T = V(\bar{x}') \smallsetminus V(\bar{x}) = \{\overline{x_n x_0}\} = \{v\}$. $\square$

Osoitamme nyt, että edellisessä lemmassa mainittu rengas on yksikäsitteisesti määrätty.

V 2.8 Lemma *Olkoon T verkon G virittävä puu ja olkoot Q ja Q' sellaisia G:n renkaistoja, että $Q \setminus V_T = Q' \setminus V_T$. Tällöin $Q = Q'$.*

Todistus. Lauseen IV 2.5 nojalla joukko $Q \Delta Q'$ on G:n renkaisto. Koska $Q \setminus V_T = Q' \setminus V_T$, niin $Q \Delta Q' \subset V_T$. Täten $Q \Delta Q'$ on puun T renkaisto. Koska T on renkaaton, niin renkaisto $Q \Delta Q'$ on tyhjä; tästä seuraa Korollaarin I 5.13 nojalla, että $Q = Q'$. □

Olkoon T verkon G virittävä puu. Merkitsemme jokaisella $v \in V_G \setminus V_T$, $R(v, T)$:llä Lemmojen V 2.7 ja V 2.8 yksikäsitteiseksi osoittamaa G:n rengasta. Kutsumme näitä renkaita $R(v, T)$, $v \in V_G \setminus V_T$, verkon G *perusrenkaiksi* virittävän puun T suhteen.

V 2.9 Lause *Olkoon T verkon G virittävä puu ja olkoon V joukon $V_G \setminus V_T$ osajoukko. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi sellainen G:n renkaisto Q, että $Q \setminus V_T = V$.*

Todistus. Renkaiston Q yksikäsitteisyys seuraa Lemman V 2.8 tuloksesta, joten riittää todistaa Q:n olemassaolo. Esitämme joukon V muodossa, $\{v_1, ..., v_n\}$, missä $v_i \neq v_j$ kun $i \neq j$. Merkitsemme $Q = R(v_1, T) \Delta \cdots \Delta R(v_n, T)$ ja panemme merkille, että koska joukot $R(v_i, T)$, $i \in [n]$, ovat G:n renkaita, niin joukko Q on Lauseen IV 2.5 nojalla G:n renkaisto. Osoitamme, että $Q \setminus V_T = V$. Olkoon w joukon $V_G \setminus V_T$ alkio. Tällöin jokaiselle $i \in [n]$ pätee Lemman V 2.7 nojalla, että $w \in R(v_i, T) \iff v_i = w$; tästä seuraa Lemma I 5.14 nojalla, että on voimassa

$$\begin{aligned} w \in Q &\iff |\{i \in [n] : w \in R(v_i, T)\}| \text{ pariton} \\ &\iff |\{i \in [n] : v_i = w\}| = 1 \\ &\iff \exists \text{ sellainen } i \in [n], \text{ että } v_i = w \\ &\iff w \in V \ . \end{aligned}$$

Edellä esitetyn nojalla on voimassa $Q \setminus V_T = V$. □

Yllä oleva todistus osoittaa, että yhtenäisen verkon virittävään puuhun liittyvät perusrenkaat "virittävät" G:n renkaistoryhmän $(\mathcal{R}(G), \Delta)$:

V 2.10 Korollaari *Olkoon T yhtenäisen verkon G virittävä puu ja olkoon Q verkon G renkaisto. Tällöin joukossa $V_G \setminus V_T$ on sellaiset viivat $v_1, ..., v_n$, että $Q = R(v_1, T) \Delta \cdots \Delta R(v_n, T)$.*

Lauseen V 2.9 avulla voimme määrätä yhtenäisen verkon renkaistojen lukumäärän. Olkoon T yhtenäisen verkon G virittävä puu. Lauseen V 2.9 nojalla on olemassa sellainen kuvaus $\varphi : \mathcal{P}(V_G \setminus V_T) \to \mathcal{R}(G)$, että jokaisella $V \in \mathcal{P}(V_G \setminus V_T)$ on voimassa $\{Q \in \mathcal{R}(G) : Q \setminus V_T = V\} = \{\varphi(V)\}$. Kuvaus φ on selvästikin injektio, mutta se on myös surjektio, sillä Lauseen V 2.9 nojalla jokaiselle $Q \in \mathcal{R}(G)$ pätee, että $Q = \varphi(Q \setminus V_T)$. Näinollen kuvaus φ on bijektio ja on voimassa $|\mathcal{R}(G)| = |\mathcal{P}(V_G \setminus V_T)| = 2^{|V_G \setminus V_T|}$. Koska Lauseen V 1.3 nojalla on voimassa $|V_G \setminus V_T| = v_G - v_T = v_G - (p_T - 1) = v_G - p_G + 1$, niin saamme seuraavan tuloksen.

V 2.11 Korollaari *Yhtenäiselle verkolle G on voimassa*

$$\boxed{|\mathcal{R}(G)| = 2^{v_G - p_G + 1}}$$

3. Suunnatut puut.

Puita esiintyy mitä erilaisimmissa yhteyksissä (sukupuut, etsintäpuut,...). Usein puun kaikki pisteet eivät ole tarkastelun kannalta samanarvoisia, vaan joku niistä on valittu "alkupisteeksi" (yhteinen esi–isä tai –äiti, etsinnän alkutilanne,...). "Alkupisteen" valinnan lisäksi on käytännössä esiintyvissä puissa usein myös määrätty puun viivoille suunnistus ja tällöin puu tulisi itse asiassa esittää suhteikkona, jolla on "alkupiste" juurena ja jossa nuolet osoittavat "alkupisteestä poispäin". Seuraavassa lauseessa osoitamme, että kyseisenlainen suunnistus määräytyy yksikäsitteisesti puun rakenteen ja "alkupisteen" valinnan nojalla.

Olkoon a puun T piste. Koska T on yhtenäinen verkko, niin Lause IV 4.1 osoittaa, että T:llä on sellainen yksisuuntaistus $\vec{T}$, että piste a on suhteikon $\vec{T}$ juuri. Osoitamme nyt, että tällaisia yksisuuntaistuksia on ainoastaan yksi.

V 3.2 Lause *Olkoon a puun T piste. Tällöin T:llä on täsmälleen yksi sellainen yksisuuntaistus $\vec{T}$, että a on $\vec{T}$:n juuri.*

Todistus. Yllä jo totesimme, että mainitun kaltaisia yksisuuntaistuksia on ainakin yksi, joten riittää näyttää, ettei niitä ole useampia. Teemme vastaväitteen: T:llä on kaksi eri yksisuuntaistusta R ja S, joilla kummallakin on piste a juurena. Koska $R \neq S$, niin on olemassa sellainen T:n viiva $v = \overline{xy}$, että $\overrightarrow{xy} \in N_R$ ja $\overrightarrow{yx} \in N_S$. Lauseen V 1.7 nojalla verkko $T - v$ on epäyhtenäinen. Merkitsemme C:llä pisteen a yhtenäistä komponenttia verkossa $T - v$. Panemme merkille, että on voimassa $a \in C \subsetneq P_{T-v}$ ja että verkossa $T - v$ ei ole joukkojen C ja $P_{T-v} \setminus C$ välistä viivaa. Koska T on yhtenäinen ja $P_T = P_{T-v}$, verkossa T on joukkojen C ja $P_T \setminus C$ välinen viiva w. Koska w ei ole verkon $T-v$ viiva, on voimassa $w = v$. Näinollen on voimassa joko $x \in C$ ja $y \notin C$ tai $x \notin C$ ja $y \in C$. Oletetaan, että vaikkapa $x \in C$ ja $y \notin C$. Koska a on suhteikon S juuri, suhteikossa S on Lemman III 4.3 nojalla yksinkertainen kulku $\bar{z} = (z_0, ..., z_n)$ pisteestä a pisteeseen y. Koska $z_0 \in C$ ja $z_n \notin P$, on olemassa sellainen $j \in [n]$, että $z_{j-1} \in P$ ja $z_j \notin P$. Näytetään, että $\overline{z_{j-1}z_j} \neq v$. Koska suhteikossa S ei ole nuolta $\overrightarrow{xy}$, niin on voimassa $z_{n-1} \neq x$ ja täten $\overline{z_{n-1}z_n} \neq v$; toisaalta, jos $j < n$, niin kulun $\bar{z}$ yksinkertaisuudesta seuraa, että on voimassa $z_j \neq y$ ja täten $\overline{z_{j-1}z_j} \neq v$. Edellisen nojalla pätee, että $\overline{z_{j-1}z_j} \neq v$. Näin ollen $\overline{z_{j-1}z_j}$ on verkon $T-v$ viiva. Tämä on kuitenkin ristiriidassa sen kanssa, että verkossa $T-v$ ei ole joukkojen C ja $P_{T-v} \setminus C$ välistä viivaa. Tämä ristiriita osoittaa, että vastaväite on väärä; näinollen T:llä on vain yksi yksisuuntaistus, jolla on piste a juurena. □

Lauseen IV 4.1 todistus antaa menetelmän edellisen lauseen yksikäsitteiseksi osoittaman yksisuuntaistuksen löytämiseksi: viiva $v \in V_T$ korvataan sillä nuolella $\overrightarrow{xy}$, jolle pätee, että $\overline{xy} = v$ ja piste x on verkossa T "lähempänä" pistettä a kuin piste y. Havainnollisempi tapa kyseisen yksisuuntaistuksen löytämiseksi on seuraava: otamme puusta kiinni pisteen a kohdalta ja ravistelemme, kunnes kaikki puun viivat roikkuvat pystysuorassa; tämän jälkeen suuntaamme viivat siten, että saamamme nuolet osoittavat alaspäin.

Seuraavassa käytämme merkintää $\vec{T}_{(a)}$ sille puun T yksisuuntaistukselle, jolla on piste a juurena. Kutsumme muotoa $\vec{T}_{(a)}$ olevia suhteikkoja suunnatuiksi puiksi.

V 3.3 Määritelmä *Suunnattu puu* on sellainen yksisuuntainen juurellinen suhteikko J, että J:n määräämä symmetrinen suhteikko J^s on puu.

Suunnatusta puusta käytämme yleensä muotoa $\vec{T}$ olevaa merkintää, jolloin T tarkoittaa jotain puuta ja $\vec{T}$ jotain sen juurellista yksisuuntaistusta. Panemme merkille, että suunnatulla puulla on vain yksi juuri: tämä seuraa yksisuuntaisuudesta sekä siitä tuloksesta (Lause V 1.6), että puun pisteestä toiseen on olemassa vain yksi yksinkertainen kulku.

Termi "juuri" on verraten vakiintunut. Huolimatta tähän terminologiaan liittyvistä mielikuvista, suunnatut puut kuvataan usein siten, että "juuri" tulee piirrettävän kuvion ylimmäiseksi pisteeksi.

Otamme nyt käyttöön lisää suunnattuihin puihin liittyvää havainnollista sanastoa.

V 3.3 Määritelmä Suunnatun puun $\vec{T}$ piste b on $\vec{T}$:n *lehti*, mikäli on voimassa $d^-_{\vec{T}}(b) = 0$.

Olkoon a suunnatun puun $\vec{T}$ juuri. Näemme helposti, että a on $\vec{T}$:n lehti jos ja vain jos a on $\vec{T}$:n ainoa piste. Lukija voi harjoitustehtävänä osoittaa, että jos $\vec{T}$:llä on a:n lisäksi muitakin pisteitä, niin sen piste b on lehti jos ja vain $b \neq a$ ja b on T:n lehti. Näiden tulosten ja Lauseen V 1.5 nojalla saamme seuraavan tuloksen.

V 3.4 Lause *Jokaisella suunnatulla puulla on ainakin yksi lehti.*

Usein on tarpeellista arvioida suunnatun puun lehtien lukumäärää puun muiden ominaisuuksien avulla tai, kääntäen, arvioida muita puuhun liittyviä suureita lehtien lukumäärän avulla. Määrittelemme nyt eräitä suunnattuihin puihin liittyviä tunnuslukuja.

Panemme merkille, että jokaisella suunnatun puun $\vec{T}_{(a)}$ pisteellä c, suhteikossa $\vec{T}_{(a)}$ on yksinkertainen kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_k)$ juuresta a pisteeseen c ja koska $\bar{x}$ on kulku myös puussa T, niin Lauseen V 1.6 tuloksesta seuraa, että $\bar{x}$ on ainoa kulku suhteikossa $\vec{T}_{(a)}$, jolla on vaadittu ominaisuus; tämä osoittaa, että voimme yksikäsitteisesti määritellä pisteen c korkeuden $T_{(a)}$:ssa.

V 3.5 Määritelmä Olkoon $\vec{T}$ suunnattu puu ja olkoon a sen juuri.
A. $\vec{T}$:n piste c on *korkeudella k* $\vec{T}$:ssa, mikäli suhteikossa $\vec{T}$ on yksinkertainen kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_k)$ juuresta a pisteeseen c.
B. $\vec{T}$:n n:s *taso* on joukko $\{c \in P_T : c$ on korkeudella n $\vec{T}$:ssa$\}$.
C. $\vec{T}$:n *korkeus* on suurin luvuista k, joilla $\vec{T}$:n k:s taso on epätyhjä.
D. $\vec{T}$:n *haaraisuus* on suurin luvuista $d^-_{\vec{T}}(c)$, missä c on T:n piste.

Esitämme nyt epäyhtälön, joka vallitsee suunnatun puun lehtien lukumäärän ja edellä määriteltyjen tunnuslukujen välillä.

V 3.6 Lause *Olkoon suunnatun puun $\vec{T}$ pisteiden lukumäärä p, korkeus k, haaraisuus h ja lehtien lukumäärä l. Tällöin on voimassa*

$$\boxed{lh \le p(h-1)+1 \le h^{k+1}}$$

Todistus. Olkoon a $\vec{T}$:n juuri. Epäyhtälöt toteutuvat triviaalisti, jos $\vec{T}$:ssa ei ole muita pisteitä kuin a. Merkitsemme $P_{\vec{T}} = P$ ja oletamme, että $P \neq \{a\}$.

Merkitsemme jokaisella $n \in \mathbb{N}$, L_n:llä $\vec{T}$:n n:ttä tasoa. Osoitamme induktiolla n:n suhteen, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $|L_n| \le h^n$. Koska $L_0 = \{a\}$, niin epäyhtälö toteutuu n:n arvolla 0. Oletamme, että $n > 0$ ja epäyhtälöt on jo todistettu arvolle $n-1$. Jokainen joukon L_n alkio on jonkun joukon L_{n-1} alkion seuraaja suhteikossa $\vec{T}$: jos $s \in L_n$ ja jos $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ on yksinkertainen kulku a:sta s:ään, niin $x_{n-1} \in L_{n-1}$ ja $x_n = s$ on x_{n-1}:n seuraaja $\vec{T}$:ssa. Jokaisella $t \in L_{n-1}$, pisteen t seuraajien lukumäärä $d^-_{\vec{T}}(r)$ on pienempi tai yhtäsuuri kuin luku h. Näinollen on voimassa $|L_n| \le |L_{n-1}| \cdot h$; koska induktio–oletuksen nojalla pätee, että $|L_{n-1}| \le h^{n-1}$, niin saadaan vaadittu epäyhtälö $|L_n| \le h^n$.

Koska $k = \max\{n \in \mathbb{N} : L_n \neq \emptyset\}$, niin on voimassa $P = \bigcup_{n=0}^{k} L_n$ ja täten edelleen

$$p = |P| = \Sigma_{n=0}^{k}|L_n| \le \Sigma_{n=0}^{k} h^n = \frac{1-h^{k+1}}{1-h}.$$

Tästä saadaan lauseen oikeanpuolinen epäyhtälö $p(h-1)+1 \le h^{k+1}$.

Suhteikon $\vec{T}$ nuolien lukumäärä, eli puun T viivojen lukumäärä v_T, voidaan Lemman III 2.1 nojalla esittää muodossa $v_T = \Sigma_{x\in P} d^-_{\vec{T}}(x)$. Merkitään L:llä $\vec{T}$:n lehtien muodostamaa joukkoa. Koska jokaisella $x \in L$ on voimassa $d^-_{\vec{T}}(x) = 0$, niin edellinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $v_T = \Sigma_{x\in P\smallsetminus L} d^-_{\vec{T}}(x)$. Koska jokaisella $x \in P$ on voimassa $d^-_{\vec{T}}(x) \le h$, niin viimeisestä yhtälöstä seuraa epäyhtälö $v_T \le |P \smallsetminus L| \cdot h$. Pannaan merkille, että $|L| = l$ ja $|P \smallsetminus L| = |P| - |L| = p - l$; tästä seuraa, että $v_T \le (p-l)h$. Lauseen V 1.3 nojalla on voimassa $v_T = p_T - 1$ eli $v_T = p - 1$. Edelläesitetystä seuraa epäyhtälö $p - 1 \le (p-l)h$ eli lauseen vasemmanpuolinen epäyhtälö. □

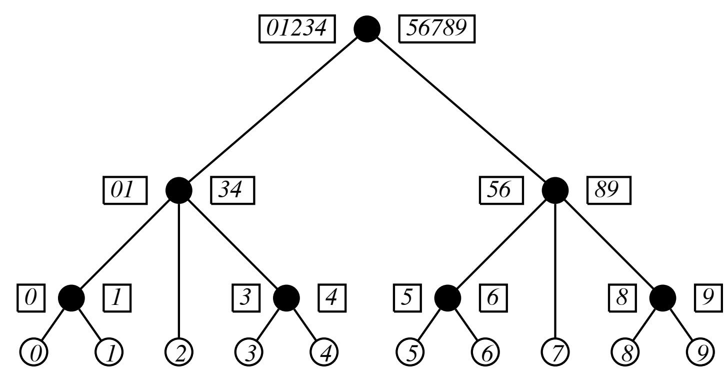
V 3.7 Korollaari *Olkoon suunnatun puun $\vec{T}$ korkeus k, haaraisuus h ja lehtien lukumäärä l. Tällöin on voimassa*

$$\boxed{l \le h^k}$$

Edellisiä epäyhtälöitä voidaan käyttää hyväksi mm. etsintäpuiden yhteydessä:

V 3.8 Esimerkki Niin kutsutussa *väärän kolikon ongelmassa* pitää etsiä annetusta kolikkojoukosta mahdollinen väärä raha kun tiedetään, että väärä kolikko on eripainoinen kuin oikeat, keskenään samanpainoiset, kolikot. Apuvälineenä on tasavarsivaaka, joka näyttää joko punnittavien samanpainoisuuden tai eripainoisten punnittavien painojärjestyksen.

Ongelmasta on monta versiota, mutta tarkastellaan sitä tässä yksinkertaisimmillaan: tiedetään, että joukossa on yksi väärä raha, joka on painavampi kuin muut. Jos rahoja on kymmenen kappaletta, niin kolmella punnituksella voidaan selvittää mikä rahoista on väärä: seuraavassa kuvattu puu osoittaa, miten voidaan menetellä. Tutkittavat kolikot on numeroitu $0 \cdots 9$. Puun mustalla merkityt pisteet vastaavat punnituksia ja niiden viereen on merkitty vaakakuppien sisältö; punnituksen jälkeen haaraudutaan alaoikealle, jos oikeanpuoleisen vaakakupin sisältö osoittautuu painavammaksi kuin vasemmanpuoleisen; alavasemmalle, jos vasemmanpuoleisen kupin sisältö osoittautuu painavammaksi kuin oikeanpuoleisen; suoraan alaspäin, jos kuppien sisällöt osoittautuvat samanpainoisiksi. Puun lehdet vastaavat "etsinnän" lopputulosta: niihin on merkitty vääräksi osoittautuneen kolikon numero.



Korollaarin V 3.7 tuloksesta seuraa, että kaksi punnitusta ei aina riitä väärän kolikon löytämiseen kymmenen kolikon joukosta: kuhunkin etsintämenetelmään liittyvän suunnatun puun haaraisuus on korkeintaan kolme ja jos jossakin menetelmässä selvittäisiin kahdella punnituksella, niin vastaavan suunnatun puun korkeus olisi kaksi, joten sen lehtien lukumäärä olisi korkeintaan yhdeksän.

Harjoitustehtäviä Lukuun V

1. Esitä kaikki (isomorfiaa vaille) erilaiset n–pisteiset puut kun $n = 7$ ja kun $n = 8$.

2. Osoita, että jokainen puu on kaksijakoinen verkko.

3. Olkoon k luonnollinen luku ja olkoon T sellainen puu, että jokaisen T:n pisteen aste on joko 1 tai k. Merkitään p:llä T:n pisteiden lukumäärää ja l:llä T:n lehtien lukumäärää.
(a) Osoita, että jos $k = 3$, niin luku p on parillinen ja on voimassa $l = \frac{p}{2} + 1$.
(b) Osoita, että jos $k \geq 3$, niin $l > \frac{p}{2}$.

4. Olkoon T puu, jonka pisteet ovat korkeintaan 4 asteisia. Laske 3–asteisten pisteiden lukumäärä, kun tiedetään, että 1–asteisia pisteitä on 6, 2–asteisia 1 ja 4–asteisia 1.

5. (a) Näytä, että 10-pisteisessä paritonasteisessa puussa on ainakin kuusi lehteä.
(b) Anna esimerkki 10-pisteisestä paritonasteisesta puusta, jonka lehtien lukumäärä on kuusi.

6. Olkoon G täydellinen neljän pisteen verkko ja olkoon $W \subset V_G$ 3-joukko. Osoita, että joko W on G:n rengas tai W on G:n virittävän puun viivojen joukko.

7. Korollaarin V 2.11 tuloksesta seuraa, että yhtenäisen verkon G renkaiden lukumäärä on yksi jos ja vain jos G:llä on yhtä monta pistettä kuin viivaa; luonnehdi tällaisia verkkoja G renkaiden ja puiden avulla.

8. Luonnehdi renkaiden avulla niitä kahdesti yhtenäisiä verkkoja G, joilla
(a) $v_G = p_G$.
(b) $v_G = p_G + 1$.

9. Olkoon G yhtenäinen verkko. Verkon G *leikkausjoukko* on sellainen osajoukko $Q \subseteq V_G$, jolla verkko $G - Q$ on epäyhtenäinen. Olkoon T G:n virittävä puu. Osoita, että jokainen G:n leikkausjoukko sisältää ainakin yhden T:n viivan.

10. Olkoon T puu, jossa on ainakin kaksi pistettä, joiden aste on suurempi kuin kaksi. Mikä on T:n lehtien pienin mahdollinen lukumäärä?

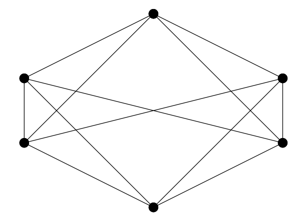
11. Olkoot T ja T' puita, joilla ei ole yhteisiä viivoja. Näytä, että verkko $T \vee T'$ on puu jos ja vain jos puilla T ja T' on täsmälleen yksi yhteinen piste.

12. Olkoon T n–pisteinen puu. Mikä on T:n lehtien pienin ja suurin mahdollinen lukumäärä?

13. Näytä, että jos puussa T on k–asteinen piste, niin T:ssä on ainakin k lehteä.

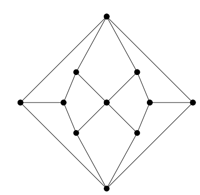
14. Näytä, että jokaiselle verkolle G pätee, että $v_G \geq p_G - k$, missä k on G:n komponenttien lukumäärä, ja että yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos G on renkaaton.
[Ohje jälkimmäiseen kohtaan: Tarkastele G:n komponentteja.]

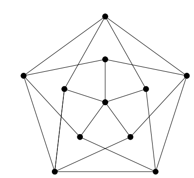
15. Määritä alla kuvatun verkon virittävien puiden lukumäärä.



16. Etsi verkon G:
a : b c d b : a d c : a d d : a b c
virittävät puut.

17. Alla vasemmalla on kuvattu *Herschelin verkko* ja oikealla *Grötzschin verkko*. Selvitä kummankin verkon tapauksessa, onko verkolla kahta virittävää puuta, joilla ei ole yhteisiä viivoja.





18. Luvun IV harjoitustehtävän 13 tuloksesta seuraa Korollaarin V 2.11 nojalla, että tasoverkon G renkaistoryhmän alkioiden lukumäärä on 2^{a-1}, missä a on G:n määräämien tasoalueiden lukumäärä. Johda tästä Korollaarin V 2.11 avulla seuraava tulos: Olkoon G yhtenäinen tasoverkko, jolla on p pistettä, v viivaa ja a aluetta. Tällöin on voimassa

$$p - v + a = 2 \qquad \textit{(Eulerin kaava)}$$

19. Johda Eulerin kaavan avulla yhtälö avaruuden monitahokkaan kärkien, särmien ja tahkojen lukumäärien välille.

20. Laske Petersenin verkon renkaiden lukumäärä.

    [Ohje: Korollaari V 2.11 ja Luvun IV harjoitustehtävät 8 ja 9.]

21. Olkoon S yksisuuntainen suhteikko, jolla on juuri a. Osoita, että S on suunnattu puu jos ja vain jos $d^+_S(a) = 0$ ja $d^+_S(b) = 1$ jokaisella $b \in P_S \setminus \{a\}$.

22. Näytä edellisen tehtävän tuloksen avulla, että jos suunnatulla puulla $\vec{T}$:llä on juuren a lisäksi muitakin pisteitä, niin piste b on $\vec{T}$:n lehti jos ja vain $b \neq a$ ja b on puun T lehti.

23. Olkoon suunnatun puun $\vec{T}$ haaraisuus h ja lehtien lukumäärä ℓ ja olkoon r $\vec{T}$:n haarautumispisteiden lukumäärä (eli niiden pisteiden lukumäärä, jotka eivät ole lehtiä). Osoita, että on voimassa $r \geq \frac{\ell-1}{h-1}$.

24. Olkoon $\vec{T}$ suunnattu puu, jonka jokaisella haarautumispisteellä on d seuraajaa. Näytä, että $\vec{T}$:n haarautumispisteiden lukumäärä r ja lehtien lukumäärä ℓ toteuttavat ehdon

$$(d-1)r = \ell - 1.$$

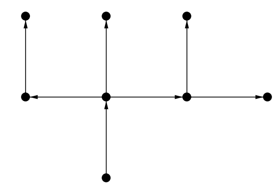
25. Olkoon n luonnollinen luku. Osoita, että on olemassa n–pisteinen suunnattu puu, jonka jokaisella haarautumispisteellä on täsmälleen kaksi seuraajaa, jos ja vain jos n on pariton.

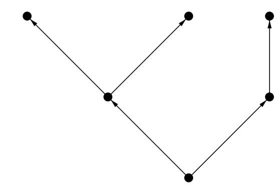
26. Yksi kahdestatoista kolikosta on väärä ja eroaa muista painoltaan (kevyempi tai painavampi). Montako punnitusta tasavarsivaa'alla tarvitaan väärän kolikon löytämiseksi ja sen laadun selvittämiseksi?

27. Olkoon $n \in \{1, 2, \ldots, 40\}$. Tehtävänä on määrittää n kysymyksillä, jotka ovat tyyppiä "onko $n \leq a$?" jollakin $a \in \mathbb{N}$. Montako kysymystä tarvitaan?

Suunnatun puun $\vec{T}$ *Matula–luku* $M(\vec{T})$ määritellään rekursiivisesti puun korkeuden $k(\vec{T})$ suhteen seuraavalla tavalla. Olkoon a $\vec{T}$:n juuri. Jos $k(\vec{T}) = 0$ eli jos $\vec{T}$:llä ei ole a:n lisäksi mitään muita pisteitä, niin asetetaan $M(\vec{T}) = 1$. Oletetaan, että $k(\vec{T}) > 0$ ja että $M(S)$ on jo määritelty kaikille niille suunnatuille puille $\vec{Y}$, joilla $k(\vec{Y}) < k(\vec{T})$. Merkitään N_a:lla pisteen a seuraajien muodostamaa joukkoa ja pannaan merkille, että joukon $P_{\vec{T}} \setminus \{a\}$ virittämä aliverkko on esitettävissä muodossa $\bigvee_{b \in N_a} S_b$, missä S_b on kyseisen aliverkon pisteen b yhtenäinen komponentti. Jokaisella $b \in N_a$, suhteikon $\vec{T}$ alisuhteikko S_b on suunnattu puu, jolle on voimassa $k(S_b) < k(\vec{T})$; täten luku $M(S_b)$ on määritelty. Nyt määritellään luku $M(\vec{T})$ tulona, jonka tekijöinä ovat luvut $p(M(S_b))$, $b \in N_a$; tässä merkintä $p(i)$ tarkoittaa i:nnettä alkulukua, siis i:nnettä lukua jonossa $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$

28. Laske seuraavien suunnattujen puiden Matula–luvut.





29. Konstruoi sellaiset suunnatut puut $\vec{T}$ ja $\vec{Y}$, että $M(\vec{T}) = 7$ ja $M(\vec{Y}) = 12$.