Kombinatoriikka, kevät 2011
Harjoitus 3
28.3.2011

1. Osoita, että jos $a + b + c = n$, niin
$$\binom{n}{a, b, c} = \binom{n-1}{a-1, b, c} + \binom{n-1}{a, b-1, c} + \binom{n-1}{a, b, c-1}.$$

2. Joukolla $\{a, b, c, d, e, f\}$ on 203 ositusta. Laske kuinka monessa näistä alkiot a ja b ovat eri joukoissa. Entä kuinka monessa alkiot a, b ja c ovat kaikki eri joukoissa?

3. Osoita, että
$$S(n, k) = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} S(r, k-1).$$
Ohje: Tarkastele joukon X ositusta $\mathcal{O}$, ja poista siitä se joukko $A \in \mathcal{O}$, joka sisältää annetun alkion x. Näin syntyy erään osajoukon $Y \subseteq X$ ositus $\mathcal{O}'$, missä $r = |Y| < |X| = n$.

4. Laske niiden surjektioiden $f : [5] \to [4]$ lukumäärä, joilla $f(1) = 1$.

5. Määritellään *Bellin luvut* B_n asettamalla
$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k).$$
Osoita, että
$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

6. Laske niiden kahdeksanalkioisen joukon ositusten lukumäärä, joissa on parillinen määrä osia.

7. Merkitään n-alkioisen joukon kaikkien epäjärjestelyjen lukumäärää symbolilla e_n. Totea, että $e_0 = 1$, $e_1 = 0$ ja $e_2 = 1$. Näytä kombinatorisella päättelyllä, että luvuille e_n pätee palautuskaava:
$$e_n = (n-1)(e_{n-1} + e_{n-2}),$$
kun $n \geq 2$.
Vihje: kiinnitä $i \in [n]$, ja mieti kuinka monella $[n]$:n epäjärjestelyllä f pätee $f(n) = i$.