Kombinatoriikka, kevät 2011
Harjoitus 5
11.4.2011

1. Ratkaise yhtälö $a_n = ba_{n-1} + c \quad (n \geq 1), \quad a_0 = d.$

2. (Hanoin tornit) Käytössä on tangot A, B ja C, sekä n kiekkoa, joiden halkaisijat ovat $1, 2, \ldots, n$ pituusyksikköä. Kiekot ovat tangossa A suuruusjärjestyksessä niin, että suurin on alimpana. Kiekot on siirrettävä tankoon B (käyttäen välillä myös tankoa C) yksitellen siten, että missään vaiheessa suurempi kiekko ei saa olla pienemmän päällä. Olkoon H_n pienin määrä siirtoja, joka tarvitaan n:n kiekon siirtämiseen. Määritä rekursiivinen relaatio jonolle $(H_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$.

3. Kuinka monella tavalla positiivinen kokonaisluku n voidaan esittää summana luvuista 1 ja 2, kun summan järjestys otetaan huomioon?

4. Osoita, että jokaisella $n \geq 1$ pätee: $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

5. Osoita, että
$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$$
kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

6. Osoita, että kaikilla $n \geq 1$,
$$C_{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}.$$
(Vihje: muista, että $C_n = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}$.)

7. Osoita, että
$$C_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} C_n$$
jokaisella $n \geq 1$.