Kombinatoriikka, kevät 2011
Harjoitus 6
18.4.2011

1. Olkoon $G = (V, E)$ kaksijakoinen graafi, ja $M \subseteq E$ pariutus (*matching*), joka ei ole suuruudeltaan maksimaalinen. Osoita, että tällöin $G$:ssä on olemassa $M$:n täydennyspolku (*augmenting path*).

2. Todista Hallin lause (Lause 2.1.2) Königin lauseen (Lause 2.1.1) avulla.

3. Olkoon $A$ äärellinen joukko, $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ ja $d_1, \ldots, d_n \in \mathbf{N}$. Osoita, että on olemassa erilliset osajoukot $D_1 \subseteq A_1, \ldots, D_n \subseteq A_n$ s.e. $|D_i| = d_i$ kullakin $i$ jos ja vain jos jokaisella $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ pätee
$$\Big|\bigcup_{i \in I} A_i\Big| \geq \sum_{i \in I} d_i.$$

4. Olkoon $V = A \cup B$, missä $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja $B = \{a, b, c, d, e\}$ ja olkoon $E = \{1a, 1b, 1c, 2b, 2c, 2d, 3a, 3c, 4b, 4c, 5c, 5d, 5e, 6d, 6e\}$. Etsi graafille $G = (V, E)$ minimaalinen solmupeite (*vertex cover*) ja maksimaalinen pariutus.

5. Olkoon $V = A \cup B$, missä $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, ja olkoot $E_1 = \{xy \mid x \in A, y \in B \text{ ja } x - y \text{ on parillinen}\}$ ja $E_2 = \{xy \mid x \in A, y \in B \text{ ja } x + y > 10\}$. Tutki, onko graafeissa $G_1 = (V, E_1)$ ja $G_2 = (V, E_2)$ joukon $A$ pariutusta.

6. Olkoon $V = A \cup B$, missä $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{u, v, w\}$, ja olkoon $E = \{au, av, bu, bw, cu, cv, cw\}$. Olkoot $V$:n solmujen preferenssijärjestykset seuraavat: $u <_a v$, $u <_b w$, $w <_c v <_c u$, $a <_u c <_u b$, $a <_v c$, $c <_w b$. Etsi jokin graafin $G = (V, E)$ vakaa pariutus (*stable matching*).

7. Olkoon $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ ja $E_n = \{xy \mid x, y \in V_n,\ x \text{ ja } y \text{ ovat saman alkuluvun potensseja, tai } x \text{ on alkuluku}\}$. Tutki, onko graafeissa $G_n = (V_n, E_n)$ 1-faktoria, kun (a) $n = 8$ (b) $n = 10$ (b) $n = 16$. Myönteisessä tapauksessa anna 1-faktori, kielteisessä tapauksessa anna paha joukko (*bad set*, kirja s. 42).