Kombinatoriikka, kevät 2011
Harjoitus 7
2.5.2011

1. Perustele tarkasti, että Ramseyn luku $R(3) = 6$.

2. Osoita, että jokaisella $c \geq 1$ pätee $R(2, c, 3) > 2^c$. (Ramseyn luku $R(k, c, r)$ on määritelty kirjan sivulla 273.)

   Vihje: Määrittele sopiva c-väritys joukolle $[A]^2$, missä $A = \mathcal{P}(\{1, \ldots, c\})$.

3. Osoita, että jokaisella $c \geq 1$ pätee $R(2, c, 3) \leq 3 \cdot c\,!$.

   Vihje: Induktiolla luvun c suhteen.

4. Määritellään vielä yksi muunnelma Ramseyn luvuista seuraavasti: Jokaisella $r, s \in \mathbb{N}$, $R(r, s)$ on pienin luonnollinen luku n s.e. joko K^r tai $\overline{K^s}$ on jokaisen vähintään n-solmuisella graafin G aligraafi.

   Luennoilla todetaan, että $R(r, s) = R(s, r)$, $R(r, 1) = 1$, $R(r, 2) = r$ ja $R(r, s) \leq R(r-1, s) + R(r, s-1)$. Osoita tämän avulla, että kaikilla $r, s \in \mathbb{N}$ pätee $R(r, s) \leq \binom{r+s}{r}$

5. Laske edellisen tehtävän kaavan antamat ylärajat luvuille $R(3, 4)$, $R(4, 4)$ ja $R(3, 5)$. Totea, että näitä ylärajoja voidaan huomattavasti parantaa soveltamalla suoraan kaavaa $R(r, s) \leq R(r-1, s) + R(r, s-1)$ ja tarkkoja arvoja luvuille $R(2, 4)$, $R(2, 5)$ ja $R(3, 3)$. (Huom: $R(3, 3) = R(3) = 6$.)

6. Osoita, että $R(3, 4) > 8$.

7. Osoita, että $R(3, 4) \leq 9$.

   Siis edellisen tehtvän perusteella $R(3, 4) = 9$