Kombinatoriikka, kevät 2007
Harjoitus 2
25.1.2007

1. Olkoon $f : \mathcal{P}_k[n] \to \mathcal{P}_{k-1}[n-1] \cup \mathcal{P}_k[n-1]$ funktio $f(A) = A \setminus \{n\}$. Osoita, että f on bijektio.

   (Pascalin identiteetin todistus.)

2. Olkoot s ja n positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että

$$\binom{s-1}{0} + \binom{s}{1} + \cdots + \binom{s+n-2}{n-1} + \binom{s+n-1}{n} = \binom{s+n}{n}.$$

   (Vihje: Käytä Pascalin identiteettiä.)

3. Laske termin x^3 kerroin polynomissa $(3+4x)^6$.

4. Johda yhtälö

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

   (a) laskemalla

   (b) kombinatorisella päättelyllä (vasen puoli vastaa sitä, että ensin valitaan joukon $[n]$ osajoukko, ja edelleen osajoukon osajoukko; oikea puoli vastaa sitä, että pienempi osajoukko valitaan ensin, ja sitten valitaan isomman osajoukon puuttuva osa).

5. Olkoon X joukko, jolla $|X| = n$, ja olkoon $k \leq n$. Osoita, että on olemassa joukko $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}_k(X)$ siten, että $|\mathcal{K}| = \binom{n-1}{k-1}$ ja $A \cap B \neq \emptyset$ kaikilla $A, B \in \mathcal{K}$.

6. Olkoon X joukko, jolla $|X| = 2n$. Osoita, että on olemassa joukko $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ siten, että $|\mathcal{K}| = \binom{2n}{n}$ ja kaikilla $A, B \in \mathcal{K}$ pätee: jos $A \neq B$, niin $A \not\subseteq B$.

7. Jokaisella $n \in \mathbf{N}$ on voimassa yhtälö $\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Perustele tämä yhtälö kombinatorisesti.

   (Ohje: Kirjoita yhtälö ensin muotoon $\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.)

8. Laske termin $x^3y^4z^2$ kerroin polynomissa $(x+y+z)^9$.