Laskettavuuden teoria A, kevät 2009
Harjoitus 5
26.2.2009

1. Osoita, että luokka $\mathcal{CF}$ on suljettu toiston suhteen: Jos $L \in \mathcal{CS}$, niin ja $L^* \in \mathcal{CF}$.

2. Osoita, että luokka $\mathcal{CS}$ on suljettu yhdisteen, ketjun ja toiston suhteen: Jos $L, K \in \mathcal{CS}$, niin $L \cup K \in \mathcal{CS}$, $LK \in \mathcal{CS}$ ja $L^* \in \mathcal{CS}$.

3. Olkoot $L = L(G_1)$ ja $K = L(G_2)$, missä $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$ ja $G_2 = (N_2, T_2, P_2, S_2)$ ovat kieliopit, joilla $N_1 = \{S_1, A, B\}$, $N_2 = \{S_2, C\}$, $T_1 = T_2 = \{a, b\}$, $P_1 = \{S_1 \to AB, A \to aAA|b, B \to bBa|\varepsilon\}$ ja $P_2 = \{S_2 \to \varepsilon|S_2aC, C \to Cb|a\}$.

   Muodosta kieliopit $G_\cup$ ja G_k s.e. $L(G_\cup) = L \cup K$ ja $L(G_k) = LK$.

4. Olkoon $G = (N, T, P, S)$ tyypin 1 kielioppi, missä $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ ja $P = \{S \to SAa, A \to ab, B \to b, Aa \to aBB, AaB \to bABa\}$. Muodosta tyypin 1' kielioppi G' s.e. $L(G') = L(G)$.

   (Tyypin 1' kieliopeissa säännöt ovat kontekstisia, paitsi että sääntö $S \to \varepsilon$ sallitaan, jos S ei esiiiny minkään säännön vasemmalla puolella.)

5. Tarkastellaan CF-kielioppia $G = (N, T, P, S)$, missä $N = \{S\}$, $T = \{0, 1\}$ ja $P = \{S \to 0|0S|1SS|S1S|SS1\}$. (Vertaa luentojen esimerkkiin!) Todista, että $L(G) = \{w^* \mid |w|_0 > |w|_1\}$.

6. Olkoon G kuten edellisessä tehtävässä. Esitä sanalle 0101010 kaksi eri jäsennyspuuta, ja niitä vastaavat johdot.

7. Lauselogiikan kaavojen joukko F määritellään yleensä seuraavaan tyyliin: F on pienin joukko s.e.

   (i) $p_n \in F$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$,
   (ii) jos $\varphi \in F$, niin $(\neg\varphi) \in F$,
   (iii) jos $\varphi, \psi \in F$, niin $(\varphi \vee \psi) \in F$.

   F voidaan tulkita aakkoston $\{p, \neg, \vee, (,)\}$ kieleksi L_F, kun kukin symboli p_n korvataan sanalla p^n. Muodosta CF-kielioppi G s.e. $L(G) = L_F$.