Laskettavuuden teoria B, kevät 2009
Harjoitus 1
2.4.2009

1. Olkoon $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \beta, F)$ 2-nauhainen Turingin kone s.e. $Q = \{q_0, q_1, p_0, p_1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \sharp, \beta\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_1\}$ ja $\delta(q_0, 0, \beta) = (p_0, \sharp, S, R)$, $\delta(q_0, 1, \beta) = (p_1, \sharp, S, R)$, $\delta(p_0, 0, \beta) = (p_0, 0, R, R)$, $\delta(p_0, 0, 0) = (p_0, 0, S, R)$, $\delta(p_0, 1, \beta) = (p_0, \beta, S, L)$, $\delta(p_0, 1, 0) = (p_0, \beta, R, L)$, $\delta(p_0, 1, \sharp) = (p_1, \sharp, S, R)$, $\delta(p_1, 1, \beta) = (p_1, 1, R, R)$, $\delta(p_1, 1, 1) = (p_1, 1, S, R)$, $\delta(p_1, 0, \beta) = (p_1, \beta, S, L)$, $\delta(p_1, 0, 1) = (p_1, \beta, R, L)$, $\delta(p_1, 0, \sharp) = (p_0, \sharp, S, R)$, $\delta(p_0, \beta, \sharp) = (q_1, \sharp, S, S)$, $\delta(p_1, \beta, \sharp) = (q_1, \sharp, S, S)$.

   Selvitä, minkä kielen $L(M) \subseteq \{0, 1\}^*$ M tunnistaa!

2. Kuvaile 2-nauhainen Turingin kone M, joka syötteellä $w \in \{a, b\}^*$ tuottaa työnauhalle sanan w^2, ja pysähtyy sen jälkeen.

   Siirtymäfunktiota ei tarvitse kirjoittaa auki, idean kuvaus riittää!

3. Kuvaile Turingin kone, joka syötteellä $1^n \in \{1\}^*$ tuottaa työnauhalle sanan 1^{n^2}. (Saa käyttää useita työnauhoja.)

4. Määritellään aakkoston $\Sigma = \{a, b\}$ sanoille $u = u_1 \dots u_n$ ja $v = v_1 \dots v_m$ järjestys asettamalla $u \preceq v$, jos $u_i = a$ ja $v_i = b$, missä i on pienin indeksi s.e. $u_i \neq v_i$, tai jos $u_i = v_i$ jokaisella $1 \leq i \leq n$. Kuvaile Turingin kone M, jolla $L(M) = \{u\sharp v \mid u \preceq v\}$.

5. Tutki, onko $f \in \mathcal{O}(g)/g \in \mathcal{O}(f)$, kun $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ovat seuraavat funktiot

   (a) $f(n) = n^2$ ja $g(n) = n^3$ (b) $f(n) = n^3$ ja $g(n) = 2^n$

   (c) $f(n) = 2^n$ ja $g(n) = n^{\log n}$ (d) $f(n) = 2^{n^2}$ ja $g(n) = n^n$

6. Osoita, että jokaisella funktiolla $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pätee $o(g) \subseteq \mathcal{O}(g)$. Osoita, että jos $g(n) > 0$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, niin $o(g) \subset \mathcal{O}(g)$.

7. Anna esimerkki funktioista $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, joilla $f \notin \mathcal{O}(g)$ ja $g \notin \mathcal{O}(f)$.