Laskettavuuden teoria B, kevät 2009
Harjoitus 2
9.4.2009

1. Olkoot $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funktioita.
   (a) Osoita, että jos $f \notin \mathcal{O}(g)$, niin $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ ei ole olemassa.
   (b) Osoita, että $f \in o(g)$ joss $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

2. Olkoon $L \subseteq \{a, b\}^*$ kieli, joka muodostuu niistä sanoista w, joilla $|w|_a = 2|w|_b$ (tasan 2/3 w:n symboleista on a). Osoita, että $L \in \mathrm{DTIME}(n)$.

3. Olkoon $\mathbf{k} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vakiofunktio $\mathbf{k}(n) = k$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että $\mathrm{DSPACE}(\mathbf{k}) = \mathrm{DSPACE}(\mathbf{0})$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$.

   Toisin sanoen, jos kieli L voidaan tunnistaa Turingin koneella, joka käyttää tilaa vakion verran, niin se voidaan tunnistaa Turingin koneella, jolla ei ole yhtään työnauhaa. (Itse asiassa, $\mathrm{DSPACE}(\mathbf{k}) = \mathcal{R}$.)

4. Olkoot $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funktiot $f(n) = n^2$ ja $g(n) = 2^n$. Osoita suoraan määritelmän perusteella (kuvailemalla sopivat Turingin koneet), että funktiot f ja g ovat aika- ja tilakonstruoituvia.

5. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funktio $f(n) = \lfloor log_2 n \rfloor$. Osoita, että f on tilakonstruoituva.

6. Todista Lause 2.3: Funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on tilakonstruoituva jos ja vain jos on olemassa Turingin kone M, joka syötteellä 1^n tulostaa (ensimmäiselle) työnauhalle sanan $1^{f(n)}$, ja jolla $space_M \in \mathcal{O}(f)$.

7. Osoita, että jokainen aikakonstruoituva funktio on myös tlakonstruoituva.