Laskettavuuden teoria B, kevät 2009
Harjoitus 6
7.5.2009

1. *Koodaus* on funktio $\kappa : \Sigma \to \Sigma$. Jos $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$, merkitään $\kappa(w) = \kappa(a_1) \dots \kappa(a_n)$. Edelleen, jos $L \subseteq \Sigma^*$, merkitään $\kappa(L) = \{\kappa(w) \mid w \in L\}$.

   Osoita, että NP on suljettu koodauksien suhteen: jos $L \in \mathrm{NP}$, niin $\kappa(L) \in \mathrm{NP}$.

2. Osoita, että P on suljettu koodauksien suhteen jos ja vain jos $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

   Vihje: etsi kieli $L \in \mathrm{P}$ ja koodaus κ s.e. $\kappa(L)$ on NP-kova. (Esim. $\mathrm{SAT} \leq_m \kappa(L)$.)

3. (Lauseen 4.2 todistuksen täydennys.) Olkoon φ propositiokaava ja $(A_\varphi, E_\varphi, L_\varphi)$ sitä vastaava struktuuri. Oletetaan, että φ on negaationormaalimuodossa: jos $L_\varphi(a) = \neg$ ja $(a, b) \in E_\varphi$, niin $L_\varphi(b) = p_i$ jollain $i \in \mathbb{N}$.

   Muodosta konjunktiivisessa normaalimuodossa oleva kaava ψ, jolla pätee: ψ on toteutuva jos ja vain jos φ on toteutuva.

4. Olkoon φ konjunktiivisessa normaalimuodossa oleva propositiolause, jonka jokaisessa disjunktiossa on tasan kaksi disjunktia. Määritellään graafi $G_\varphi = (V, E)$, missä V on kaikkien propositiosymbolien ja niiden negaatioiden esiintymien joukko kaavassa φ, ja $(a, b) \in E$ joss jokin φ:n disjuntio on ekvivalentti implikaation $a \to b$ kanssa. Osoita, että φ ei ole toteutuva jos ja vain jos graafissa G_φ on polku jostain propositiosymbolista p_i sen negaatioon $\neg p_i$.

5. Päättele edellisen tehtävän avulla, että ongelma 2–SAT on luokassa NLOG.

6. Graafi $G = (V, E)$ on 2-värittyvä, jos on olemassa funktio $f : V \to \{0, 1\}$ s.e. kaikilla $u, v \in V$ pätee $(u, v) \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$. Olkoon 2–COL = {G | G on 2-värittyvä}. Anna jokin konkreettinen palautus 2–COL $\leq_m$ 2–SAT.