Aikalogiikan alkeita

Tero Tulenheimo

31. tammikuuta 2007

Käytän termiä 'aikalogiikka' viittaamaan sellaisiin modaalilogiikkaan rinnastuviin logiikoihin, joista käytetty nimitys ei ole englanniksikaan täysin vakiintunut. Uusiseelantilainen Arthur Prior (1914–1969), joka on 1900-luvulla muotonsa saaneen aikalogiikan alullepanija, käytti tutkimusaiheestaan termiä 'tense-logic'. Tämä termi johtaa huomion luonnollisten kielten aikamuotorakenteisiin, minkä toisinaan voi havaita herättävän hämmennystä ainakin matemaatikkojen keskuudessa. Toisaalta termi 'tense-logic' on ymmärrettävä varsinkin jos tutkimuksen lähtökohtana nimenomaan on pyrkimys ymmärtää luonnollisen kielen aikailmaisujen (erityisesti aikamuotojen) formaaleja ominaisuuksia. Englannin kielessä 'temporal logic' on ehkä suositeltavin termi, vaikka ei kyse tietenkään ole logiikan, vaan sen asian, mistä tällä logiikalla puhutaan, ajallisuudesta.[1] Myös termiä 'logic of time' käytetään toisinaan, vaikka se tutkiikin aikaa koskevan kielen logiikkaa. (Mitään asiaa tuskin voisi kutsua logiikaksi, jota aika noudattaa — ei ainakaan sanan 'logiikka' siinä merkityksessä, joka sille filosofiassa ja matematiikassa annetaan.)

1 Mitä aikalogiikka voisi olla ja minkälaisia luonnollisen kielen lauseita sen kaavat vastaavat?

Puhuminen samalla kertaa logiikasta ja ajasta saattaa jo itsessään kuulostaa oudolta. Jos paradigmaattisena esimerkkinä logiikasta pidetään ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaa, ja kun siinä minkä hyvänsä lauseen totuus-

[1] Tosin tietojenkäsittelytieteessä termillä 'temporal logic' on erityinen merkityksensä. Tyypillinen tuollainen temporaalilogiikka on CTL (computation tree logic). Tuossa logiikassa on käytössä paitsi sellaisia tavanomaisia modaalioperaattoreita kuin 'seuraavaksi' ja 'kunnes' (joiden semantiikka edellyttää tarkasteltavan Kripke-strukturin tilojen yli kvantifioimista), myös ns. polkukvanttorit 'kaikille saavutetusta tilasta alkaville poluille pätee, että' ja 'jollekin saavutetusta tilasta alkavalle polulle pätee, että' (joiden semantiikka siis edellyttää tiloista koostuvien transitioiden – polkujen – yli kvantifioimista).

arvo on joko kertakaikkisesti tosi tai kertakaikkisesti epätosi, ei ajalle näyttäisi löytyvän roolia logiikassa. On epäilemättä historiallisestikin niin, että sen osan todellisuutta, josta logiikka voi puhua, on ajateltu olevan *staattinen*.

Toisaalta ajan mukaantuominen logiikkaan voi tapahtua hyvin ilmeisellä tavalla — tavalla, joka on johdettavissa suoraan siitä, miten ymmärrämme ajan ja useiden kielen lauseiden suhteen: lauseen totuus voi vaihdella ajan mukana. Loogisesti tätä vastaa se, että *suhteutamme* puheemme emme ainoastaan johonkin malliin, vaan johonkin tämän mallin 'tilaan': siihen, millainen tämä malli on jonakin ajankohtana. Intuitiivisesti katsoen saamme siis yhden mallin $\mathcal{M}$ sijasta ajankohtien joukon T suhteen indeksoidun joukon malleja, eli malliperheen, $(\mathcal{M}_t)_{t \in T}$. Aikalogiikalla on muitakin analogioita modaalilogiikkaan — oikeastaan se *on* eräs modaalilogiikka, kuten tulemme näkemään — mutta yksi niistä on se, että aikalogiikan *ajankohdat* ja modaalilogiikan *mahdolliset maailmat* suoraviivaisesti vastaavat toisiaan. Kummassakin tapauksessa on kyse siitä, että lauseiden totuus on suhteellistettu jonkin *indeksijoukon* indekseihin. Muodollisesti katsoen on täysin yhdentekevää ymmärretäänkö ne jonkin systeemin abstrakteiksi tiloiksi, aktuaalisen maailmanhistorian ajankohdiksi tai kuviteltavissa oleviksi reaalimaailman vaihtoehdoiksi.

Voitaisiin omaksua matemaattinen näkökulma ja luetella joitakin logiikoita, joiden kaikkien kerrottaisiin kuuluvan luokkaan $\mathcal{L}$. Sitten voitaisiin koettaa eristää näistä yhteisiä piirteitä ja ilmoittaa, että luokkaan $\mathcal{L}$ kuuluvat ne ja vain ne logiikat, jotka toteuttavat näin löydetyt ehdot. Lopulta sanottaisiin, että $\mathcal{L}$ on kaikkien 'aikalogiikoiden' luokka. Näin voitaisiin tehdä ilman mitään varsinaisesti filosofisiksi katsottavia tarkasteluja. Yhtäältä juuri tällainen mahdollisuus täytyy ollakin olemassa, koska olemme tekemisissä logiikan kanssa, jonka tarkastelut ovat muodollisia. Toisaalta, jos määrittelisimme aikalogiikan tällaisella menettelyllä, jäisi oleellisesti epäselväksi miksi päätimme kutsua ko. logiikkaa aikalogiikaksi eikä joksikin muuksi.

Katsotaan nyt siis filosofisemmasta näkökulmasta, millaiset tarkastelut ovat motivoineet aikalogiikan kehittämiseen. Tarkastellaan kahdentyyppisiä lauseita:

1. p (nyt);

2. p hetkellä t_0.

Esimerkeiksi näitä lausetyyppejä edustavista lauseista voimme ottaa vastaavasti vaikkapa lauseet

> Sokrates nukkuu (nyt);
>
> Sokrates nukkuu 1. joulukuuta 400 eKr.

Lauseet tyyppiä 2 ovat kronologiaan (objektiiviseen aikaskaalaan) sidottuja. Ajankohta (t_0), johon tällainen lause viittaa, on spesifioitu lauseen lausumistapahtumasta riippumatta, jollakin julkisella, objektiivisella kriteerillä. Tällainen ajankohta vastaa jotakin nimenomaista asemaa julkisessa aikaskaalassa. (Jäljempänä tulemme huomaamaan luontevan yhteyden tällaisen aikaskaalan ja aikalogiikan vaihtoehtorelaation välillä.)

Lauseista typpiä 1 käytettäisiin englanniksi termiä 'token-reflexive'. Tällainen *esiintymäsidonnainen* lause viittaa esiintymäänsä — yksittäiseen käyttöyhteyteensä — sikäli, että se mitä se sanoo (väittää todellisuudesta) riippuu siitä, missä yhteydessä se lausutaan. Tässä suhteessa lauseet tyyppiä 1 rinnastuvat sellaisiin indeksikaalisia (deiktisiä) ilmauksia sisältäviin lauseisiin kuin '*minä* kirjoitan' tai '*täällä* sataa'. Tyyppiä 1 olevassa lauseessa viittauksen lausumisajankohtaan (sanalla 'nyt') ei tarvitse olla eksplisiittinen. (Tästä syystä merkitsin sen sulkeisiin ilmaistessani lausetyypin 1.) Huomattakoon, että lauseen aikamuoto ei sinänsä paljasta lauseen ominaisuutta *esiintymäsidonnaisuus* ('token-reflexivity'), koska olipa aikamuoto mikä hyvänsä, esiintymäsidonnainen viittaus on viittaus lauseen lausumishetkeen. Oikeastaan tämä esiintymäsidonnaisuus ei ole lainkaan lauseen itsensä ominaisuus, vaan sinänsä kieliopillisesti 'valmiin' lauseen lausumistapahtumassa saama semanttinen määre (joka kertoo että lauseella väitetään jotakin lausumishetkestä). Yhteenvedonomaisesti voisi sanoa, että lauseet tyyppiä 1 ovat perspektiivisidonnaisia, kun taas lauseilla tyyppiä 2 on 'julkinen', kontekstista riippumaton merkitys.

Esimerkiksi lauseen 'Sokrates nukkuu (nyt)' totuusarvo vaihtelee sen lausumisajankohdan mukaan: se on tosi hetkellä t, jos ja vain jos hetkellä t asiat ovat niin kuin lause lausuttuna tuona hetkenä väittäisi niiden olevan, eli: jos ja vain jos Sokrates nukkuu hetkellä t.

Lauseilla tyyppiä 2 on ominaisuus, jonka perusteella Quine kutsuisi niitä *ikuisiksi lauseiksi*, nimittäin se, että mikäli tällainen lause on kerran tosi (epätosi), on se aina tosi (epätosi).[2]

Lause 'Sokrates nukkuu 1. joulukuuta 400 eKr.' on tyyppiä 2. Mikäli on yksikin mennyt, tuleva tai nykyinen ajankohta, jona tämä lause on totta, on tämä lause totta aina. Se, että jotakin tapahtui tai ei tapahtunut minä hyvänsä annettuna ajankohtana, on itse omnitemporaalisesti totta (eli totta kaikkina aikoina). Mistä hyvänsä lauseesta voi tehdä ikuisen lauseen, kun sen merkitykseen vaikuttavat ei-objektiivisesti määräytyneet tekijät spesifioidaan niin, että niistä tulee 'julkisesti evaluoitavia', eli sellaisia, että niiden merkitys määräytyy julkisin eikä perspektiivisidonnaisin kriteerein.

Aikalogiikka sellaisena kuin Arthur Prior sen muotoili syntyi hänen pyrkimyksestään muotoilla formaali logiikka lauseille tyyppiä 1, joiden hän katsoi paremmin edustavan aikaa koskevaa kielenkäyttöä kuin tyypin 2 lausei-

[2] Ks. [17], ss. 193-5, 208; ja [18], pp. 13-4. Tarkkaan ottaen ikuisen lauseen statuksen ansaitsemiseksi kaikki lauseen merkitykseen vaikuttavat ei-objektiivisesti määrätyt komponentit on spesifioitava objektiivisesti: paitsi ajankohdat, myös persoonat ja paikat; lisäksi lauseessa esiintyvien verbien aikamuodot on korvattava preesensin kaltaisella verbimuodolla, joka on merkitykseltään ei-ajallinen.

den.[3] Aikalogiikan kaavat vastaavatkin luonnollisen kielen lauseita tyyppiä 1. Nämä ovat siis lauseita, joiden totuusarvo voi vaihdella ajan mukana. Ne eivät itse mainitse eksplisiittisesti mitään ajankohtaa, vaan ne määräytyvät ajallisilta ominaisuuksiltaan ikään kuin ulkoa käsin, nimittäin sen mukaan milloin ne lausutaan. Kun aikalogiikan kaavoille — niin kuin luonnollisen kielen lauseille tyyppiä 1 — annetaan semantiikka, *tämä* tehdään suhteessa julkiseen kronologiaan. Näin siis aikalogiikan kaavojen totuutta koskevat arvostelmat metakielessä ovat lauseita tyyppiä 2!

Eräät lingvistit, esimerkiksi Hans Kamp ja Uwe Reyle [14], ovat kritisoineet priorilaista aikalogiikkaa (sellaista aikalogiikkaa, jota Arthur Prior tutki ja jota tässäkin kirjoituksessa tarkastelemme) muun muassa siitä, että tämä logiikka ei pysty käsittelemään luonnollisen kielen lauseita, jotka eksplisiittisesti viittaavat ajankohtiin. Kritiikin aihe on todellinen, mutta se, missä määrin fataalina tätä kritiikkiä voi pitää priorilaiselle aikalogiikalle riippuu siitä, kuinka vakavasti otamme tyypin 1 ja tyypin 2 lauseiden välisen eron. Jos näiden lauseiden katsotaan esittävän aivan eritasoisia, kategorisesti erilaisia väitteitä, ei ole ainakaan automaattisesti selvää, että niillä täytyisi ylipäätään olla yhtenäistä loogista analyysia.

Priorilainen aikalogiikka kohtaa – kieliteorian välineenä – muitakin ongelmia. Erityisesti Norbert Hornstein [11, 12] on kiinnittänyt huomiota siihen, että luonnollisen kielen analysoimiseen sovelletun priorilaisen aikalogiikan peruslähtökohta – luonnollisen kielen aikamuotojen esittäminen aikamuoto-operaattorien avulla – on kieliteorian kannalta sikäli epäonnistunut, ettei sen avulla itse asiassa voi luonnehtia eroa kieliopillisten ja ei-kieliopillisten aikamuotoja sisältävien lauseiden välillä. Paitsi että aikalogiikan puitteissa voidaan esittää monien kieliopillisten lauseiden looginen muoto, on hyvinmuodostettuja aikalogiikan kaavoja, jotka vastaavat *ei-kieliopillisia* luonnollisen kielen lauseita.[4] Aikalogiikan sisällä rajanveto kieliopillisen ja ei-kieliopillisen välille ei onnistu tavalla joka tekisi oikeutta luonnolliselle kielelle. Tällaisen kritiikin arvioimiseksi on aikamuotojen semantiikkaa tarkasteltava lähemmin; näin tehtäessä on mahdollista argumentoida, että priorilainen aikalogiikka kyllä tarjoaa oikean tyyppisen välineen aikamuotojen välisten *loogisten* riippuvuuksien analyysille, vaikka se – Hornsteinin mainitsemista syistä – epäonnistuukin aikamuotojen välisten *tukinnallisten* tai *ajallisten* riippuvuuksien analyysissa. (Hornsteinin

[3]Priorin motiiveista tarkemmin, ks. Prior (1967) ss. 15–17.

[4]Esimerkiksi englannin lause **John said that Harry believes that Fred would be here* ei ole kieliopillinen. Seuraava priorilaista aikalogiikkaa yleistämällä saadun logiikan hyvinmuodostettu kaava kuitenkin esittää sen loogisen muodon:

$$P\ says_{John}\ NOW\ \ believes_{Harry}\ F(Fred\ is\ here),$$

missä 'P' merkitsee 'joskus menneisyydessä', 'F' merkitsee 'joskus tulevaisuudessa', ja *'NOW'* on operaattori, joka pakottaa evaluaation jatkumaan kaavan alkuperäsestä evaluaatiohetkestä.

argumentin arvioimisesta, ks. [19].)

2 Modaalilogiikan ja aikalogiikan suhde

Miten aikalogiikka sitten muotoillaan modaaliloogisesta näkökulmasta? Itse asiassa aikalogiikka on sellaista modaalilogiikkaa, jossa vaihtoehtorelaatiolta (saavutettavuusrelaatiolta) R vaaditaan eräitä nimenomaisia ominaisuuksia. Ajatuksena nimittäin on, että vaihtoehtorelaation intuitiiviseksi tulkinnaksi asetetaan ajallinen *aikaisempi kuin* -suhde *ajankohtien* joukossa. Tästä johtuen aikalogiikan vaihtoehtorelaatiolta vaaditaan yleensä ainakin ominaisuudet *irrefleksiivisyys* ja *transitiivisuus*. (Asian voi yhtäpitävästi ilmaista sanomalla, että ko. relaation vaaditaan tyypillisesti olevan *irrefleksiivinen osittainjärjestys*.) Ajatellaan siis, että ainakaan mikään ajankohta ei ole itseään aiempi; ja että mielivaltaista ajankohtaa (t_0) myöhempää ajankohtaa (t_1) myöhempi ajankohta (t_2) on alkuperäistä ajankohtaa (t_0) myöhempi, eli jos $t_0 < t_1 < t_2$, niin $t_0 < t_2$.

Kun siis tarkastellaan aikalogiikkaa modaalilogiikan erikoistapauksena, modaalilogiikka ymmärretään abstraktilla tavalla — tavalla jolla se matemaattisesti formuloidaan. Tällöin ei käsitteellisesti sitouduta siihen, että modaalilogiikan kaavat aina puhuisivat välttämättömyydestä tai mahdollisuudesta. Jos ehdottomasti tahdotaan säästää termi 'modaalilogiikka' sellaiselle semantiikassaan Kripke-kehyksiä käyttäville logiikoille, joiden kaavojen intuitiivinen tulkinta liittyy välttämättömyyden ja mahdollisuuden käsitteisiin, voidaan puhua vaikkapa 'intensionaalisesta logiikasta' kun tahdotaan viitata yleisesti logiikoihin, jotka ovat (sekä syntaksiltaan että semantiikaltaan) 'strukturaalisesti' modaalilogiikan kaltaisia. Modaalilogiikan tutkijat kuitenkin ymmärtävät modaalilogiikan nimenomaan abstraktisti.[5]

Tässä kirjoituksessa käsittelemme sellaista aikalogiikkaa, joka muodollisesti muistuttaa modaalilogiikkaa ja jonka (yhtenä) erona välttämättömyyden ja mahdollisuuden käsitteistä puhuvaan modaalilogiikkaan on se, minkälaisia ominaisuuksia käytetyltä vaihtoehtorelaatiolta oletetaan.[6] Täysin yleisellä käsitteellisellä tasolla ei tietenkään ole syytä (eikä liioin oikeutusta) lyödä etukäteen lukkoon, että kaiken aikalogiikan tarvitsisi olla juuri tällaista. On täysin mahdollista muotoilla logiikoita, jotka eivät muistuta modaalilogiikkaa ja joita olisi aivan luontevaa kutsua aikalogiikoiksi. Yksinkertainen esimerkki tällaisesta logiikasta olisi ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka, jossa kvanttorien vaihteluala (engl. *range*) on kaikkien ajankohtien

[5] Abstraktista näkökulmasta modaalilogiikkaan, ks. esim. [4]. Huomattakoon, että abstrakti modaalilogiikka ei välttämättä ole intensionaalista logiikkaa, vaikka se usein sitä onkin. Ns. deskriptiologiikka (engl. *description logic*) on ekstensionaalista logiikkaa, mutta toisaalta se on muodollisesti katsoen modaalilogiikkaa (vrt. esim. [5]).

[6] Aikalogiikka eroaa modaalilogiikasta myös toisessa suhteessa: kuten jälkempänä näemme, sen avulla voidaan puhua paitsi vaihtoehtorelaatiosta, myös sen käänteisrelaatiosta.

joukko — eli jossa 'kvantifioidaan ajankohtien yli' — ja jossa yksilömuuttujat saavat arvonsa ajankohtien joukosta. Kyseessä olisi siis aivan tavallinen predikaattilogiikka, jonka kaavojen totuusarvo määritetään suhteessa malliin, jonka yksilöalue (engl. *domain*) ymmärretään ajankohtien joukoksi.

Yllä mainittujen ominaisuuksien *irrefleksiivisyys* ja *transitiivisuus* lisäksi temporaaliselta vaihtoehtorelaatiolta voidaan olettaa monenlaisia muita ominaisuuksia. Eri kombinaatiot tällaisia oletettuja ominaisuuksia vastaavat erilaisia mahdollisia ominaisuuksia, joita aikajärjestyksellä voi olla. Voidaan tutkia erityyppisiä aikajärjestyksiä; tarkasteltava järjestys voi tällöin riippua esimerkiksi siitä ajatellaanko koettua aikaa vai fysikaalista aikaa, vai mallinnetaanko ajallista toimintaa ottaen huomioon mitä vaihtoehtoisia tapahtumakulkuja eri teoista voisi seurata. Toisaalta tällaisia erilaisia mahdollisia aikajärjestyksiä voidaan tarkastella täysin riippumatta oletuksista, joita meillä on tai voi olla koskien esimerkiksi todellista fysikaalista aikaa. Tällöin aikalogiikan puitteissa voidaan tutkia millaiset päättelyt ovat korrekteja, jos käytetty aikastruktuuri toteuttaa tarkastellut aikajärjestyksen ominaisuudet. Ennen kuin siirrymme puhumaan lähemmin erilaisista tällaisista ominaisuuksista, määritellään priorilaisen aikalogiikan kieli; myös erään toisen aikalogiikan syntaksi mainitaan.

3 Aikalogiikoiden kieliä

Seuraavassa keskitytään yksinomaan *propositionaaliseen aikalogiikkaan*, so. sellaiseen aikalogiikkaan, joka on saatu *lauselogiikasta* (*propositiologiikasta*) laajentamalla sen muodostussääntöjen joukkoa.[7] Minkä hyvänsä aikalogiikan lauseen totuusehto määrää erään asiaintilan, nimittäin asiantilan, joka vallitsee täsmälleen silloin kun tuo lause on tosi. Esimerkiksi lausetta 'satoi vettä' vastaa asiaintila *että satoi vettä*. Kaksi lausetta ilmaisevat saman asiaintilan jos ja vain jos niillä on sama totuusehto. Niinpä esimerkiksi lauseet 'satoi vettä' ja 'det regnade' ilmaisevat saman asiantilan. Käytän termiä 'atominen asiaintila' viittaamaan sellaiseen asiaintilaan, jonka ilmaisee propositionaalinen atomi. Koska mitkä hyvänsä kaksi propositionaalista atomia ovat keskenään loogisesti riippumattomia (kummankaan totuus tai epätotuus ei riipu toisen totuudesta tai epätotuudesta), eivät kaksi atomia koskaan vastaa samaa asiaintilaa. Huomattakoon, että esimerkiksi luonnollisen kielen analyysissa riippuu tarkastelun tavoitteista, mitä lauseita tahdotaan tarkastella atomisina. Jonkin tarkastelun tarpeisiin vaikkapa lausetta 'Joku rakastaa jotakuta toista tai itseään' voidaan tarkastella atomisena lauseena p, jossain toisessa tarkastelussa sitä voisi tarkastella disjunktiona $p \vee q$,[8] vaikka kolmannessa tarkastelussa voitaisiin vaatia tarkkuutta, joka edellyttää predikaattilogiikan välineistöä: $\exists x[\exists y(x \neq y \wedge Rxy) \vee Rxx]$.

[7] Kvantifioidusta aikalogiikasta (ensimmäisen kertaluvun aikalogiikasta), ks. esim. [9].

[8] Semanttisesti 'joku' on distributiivinen disjunktion 'tai' suhteen.

Lähdemme siitä, että meillä on käytössämme epätyhjä joukko **prop** propositiosymboleja (eli propositionaalisia atomeja). Oletetaan erityisesti, että ainakin symboli p_0 aina sisältyy joukkoon **prop**. Joukon **prop** kardinaliteetista ei tarvitse olettaa mitään erityistä. Usein sen ajatellaan olevan numeroituvasti ääretön (sellainen, että jokaista luonnollista lukua kohden on oma propositionaalinen atominsa), mutta voimme tarkastella myös tapausta, että joukko **prop** on äärellinen. Mikäli propositiosymbolien joukko on äärellinen, on olemassa äärellinen yläraja niiden atomisten asiaintilojen lukumäärälle, joista yksittäinen lauselogiikan lause voi puhua. Jos joukon **prop** koko on n, voi kyseessä oleva logiikka — erityisesti yksittäinen ko. logiikan lause — puhua korkeintaan n atomisesta asiaintilasta. Jos **prop** on numeroituvasti ääretön, ei ole olemassa mitään äärellistä ylärajaa sille, kuinka monesta atomisesta asiaintilasta lauselogiikan lause voi puhua. Joka tapauksessa yksittäinen lauselogiikan lause puhuu kerrallaan *äärellisestä* määrästä atomisia asiaintiloja, mutta nyt se voi olla mikä tahansa äärellinen lukumäärä. Vasta jos muodostettaisiin *infinitaarinen* lauselogiikka, esimerkiksi ottamalla käyttöön mahdollisuus muodostaa äärettömän monen lauseen konjunktio, voisi yksittäinen lause puhua äärettömän monesta atomisesta asiaintilasta — ja vasta tällöin olisi mielekästä tarkastella ylinumeroituvia propositiosymbolien joukkoja.

Jatkossa käytämme lauselogiikkaa, jonka lausekonnektiiveina ovat konjunktio ($\wedge$) ja negaatio ($\neg$). Disjunktio ($\vee$), implikaatio ($\rightarrow$) ja ekvivalenssi ($\leftrightarrow$) voidaan määritellä näiden avulla, kuten voidaan itse asiassa mikä hyvänsä lauselogiikan totuusfunktio.

3.1 Priorilainen aikalogiikka

Annan seuraavassa muodostussäännöt *priorilaisen aikalogiikan* **PTL** kaavoille. Kutsumme **PTL**:ää priorilaiseksi aikalogiikaksi siitä huolimatta, että Prior itse muotoili teoksissaan niin monta eri aikaloogista formalismia, ettei tämän nimityksen perusteella ole syytä tehdä kovin pitkälle meneviä päätelmiä Priorin työstä aikalogiikassa. Logiikkaa **PTL** voidaan myös kutsua *propositionaaliseksi aikalogiikaksi*; tämä ei suinkaan tarkoita, etteikö olisi muitakin lause- eli propositiologiikkaa laajentavia aikalogiikoita.

Aikalogiikkaa varten otamme käyttöön kaksi uutta yksipaikkaista operaattoria, G ja H. *Nämä molemmat* vastaavat omalla tavallaan modaalilogiikan välttämättömyysoperaattoria $\Box$. Operaattorit G ja H vastaavat (semanttisesti) kumpainenkin operaattoria $\Box$ sikäli, että niiden molempien totuusehto on muodoltaan universaalinen väite: väite, että jotakin pätee kaikille tietyn ehdon toteuttaville ajankohdille. Aikalogiikassa meillä on kaksi tällaista operaattoria yhden sijaan siksi, että olemme kiinnostuneita sekä menneisyydestä että tulevaisuudesta. Toinen näistä operaattoreista (G) saa semantiikan, joka sanoo, että jokin pätee kaikkina tulevina ajankohtina. (Kirjain 'G' viittaakin fraasiin 'it is always *going* to be that...'.) Toinen operaattoreista (H) taas väittää, että jokin pätee kaikkina menneinä ajankohtina. (Kirjain 'H' viittaa fraasiin 'it *has* always been that. . . '.) Toisin sanoen toinen näistä operaattoreista käyttää semantiikassaan sen relaation käänteisrelaatiota, jota toinen operaattoreista käyttää. Välttämättömyydestä puhuvassa modaalilogiikassa ei samalla tavalla ole intuitiivista sisältöä vaihtoehtorelaation käänteisrelaatiota käyttävälle operaattorille, mistä syystä modaalilogiikassa ei yleensä oteta käyttöön operaattoreille käänteisoperaattoreita.[9]

Kun propositiosymbolien joukko **prop** on annettu, **PTL** määritellään joukoksi kaavoja, jotka on saatu seuraavilla muodostussäännöillä:

1. $p \in \mathbf{prop} \;\Rightarrow\; p \in \mathbf{PTL}$,
2. $A \in \mathbf{PTL} \;\Rightarrow\; \neg A \in \mathbf{PTL}$,
3. $A, B \in \mathbf{PTL} \;\Rightarrow\; (A \wedge B) \in \mathbf{PTL}$,
4. $A \in \mathbf{PTL} \;\Rightarrow\; \mathrm{G}A, \mathrm{H}A \in \mathbf{PTL}$.

Kuten edellä todettiin, ovat G ja H siis intuitiivisesti toistensa *käänteisoperaattorit*. Tämä tulee olemaan myös formaalisti totta, kunhan saamme määritellyksi semantiikan näille operaattoreille. Kumpaakin näistä operaattoreista kohden on lisäksi sen *duaalioperaattori*, joka vastaa modaalilogiikan mahdollisuusoperaattoria. Määrittelemme:

$$\mathrm{F}A \overset{\text{def}}{=} \neg\mathrm{G}\neg A,$$
$$\mathrm{P}A \overset{\text{def}}{=} \neg\mathrm{H}\neg A.$$

Sanomme, että

operaattorit G ja F ovat toistensa duaalit

ja että

operaattorit H ja P ovat toistensa duaalit.

Operaattorien F ja P totuusehdoissa alla tulee esiintymään eksistentiaalinen väite siinä missä operaattorien G ja H totuusehdoissa esiintyy universaalinen väite. Kirjain F tulee sanasta 'future'; ja kirjain P sanasta 'past'. Intuitiivisesti kaavan FA voi lukea 'joskus tulevaisuudessa (tulee olemaan niin, että)

[9] Multimodaalilogiikassa, eli modaalilogiikassa jossa voidaan puhua n eri vaihtoehtorelaatiosta $R_1, \ldots, R_n$ otetaan käyttöön kutakin relaatiota kohden oma universaalinen ja oma eksistentiaalinen modaalioperaattorinsa: $\Box_1, \Diamond_1, \ldots, \Box_n, \Diamond_n$. Tällaisessa logiikassa voidaan toki tarkastella tilannetta, jossa yksi vaihtoehtorelaatio R_i on toisen vaihtoehtorelaation R_j käänteisrelaatio. Formaalisti aikalogiikka **PTL** voidaankin ymmärtää juuri tällaiseksi kahden modaliteettityypin multimodaalilogiikaksi ($n := 2$).

A' ja kaavan PA voi lukea 'joskus menneisyydessä (on ollut niin, että) A'. Myös operaattorit F ja P ovat toistensa käänteisoperaattoreita.

Otetaan vielä käyttöön erikoissymbolit $\top$ ('*verum*') ja $\bot$ ('*falsum*') asettamalla seuraava määritelmä:

$$\top \stackrel{\text{def}}{=} p_0 \vee \neg p_0,$$
$$\bot \stackrel{\text{def}}{=} \neg\top.$$

Kun semantiikka kielelle **PTL** saadaan alla määritellyksi, voidaan todeta, että lause $\top$ on tosi kaikkien mallien kaikissa pisteissä (tosi riippumatta valuaatiosta), kun taas lause $\bot$ ei ole tosi minkään mallin missään pisteessä (on epätosi riippumatta valuaatiosta). Muistettakoon, että aiemman sopimuksemme nojalla atomi p_0 on aina tarkastelemiemme propositiosymbolien joukossa.

3.2 Logiikka US

Mainittakoon tässä yhteydessä erään toisenkin aikalogiikan syntaksi. Omalta osaltaan tämä havainnollistaa, että sanan yleisessä merkityksessä *aikalogiikka* on pikemminkin kokoelma syntaksiltaan ja semantiikaltaan eriäviä logiikoita kuin jokin yksittäinen logiikka.

Otamme käyttöömme kaksi kaksipaikkaista konnektiivia U (lue: 'until') ja S (lue: 'since'). Syntaksiltaan logiikka **US** ('The logic of *Until* and *Since*') määritellään joukoksi kaavoja, jotka on saatu seuraavilla muodostussäännöillä:

1. $p \in \mathbf{prop} \;\Rightarrow\; p \in \mathbf{US}$,
2. **US** on suljettu negaation ($\neg$) ja konjunktion ($\wedge$) suhteen,
3. $A, B \in \mathbf{US} \;\Rightarrow\; \mathrm{U}(A, B), \mathrm{S}(A, B) \in \mathbf{US}$.

Intuitiivisesti $\mathrm{U}(A, B)$ luetaan 'B siihen asti että A' ja $\mathrm{S}(A, B)$ taas luetaan 'B siitä lähtien kun A'. Tarkemmin, kaava $\mathrm{U}(A, B)$ on totta hetkellä t täsmälleen silloin kun A on tosi jonakin hetkeä t myöhempänä ajankohtana t', ja kaikkina hetkinä ajankohtien t ja t' välissä B on totta. Vastaavasti kaava $\mathrm{S}(A, B)$ on totta ajankohtana t jos ja vain jos A on tosi jonakin hetkeä t aiempana ajankohtana t', ja ajankohtien t' ja t välissä B on totta.

Määritellään symbolit $\top$ ja $\bot$ kuten edellä logiikan **PTL** tapauksessa. Sitten asetetaan:

$$\mathrm{F}A \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{U}(A, \top),$$
$$\mathrm{P}A \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{S}(A, \top),$$
$$\mathrm{G}A \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathrm{F}\neg A,$$

$$\mathrm{H}A \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathrm{P}\neg A.$$

Logiikka **US** on oleellisesti vahvempi kuin **PTL**. Erityisesti konnektiiveja U ja S ei voi määritellä logiikassa **PTL**. Itse asiassa logiikka **US** kykenee ilmaisemaan täsmälleen samat asiat Dedekind-täydellisistä lineaarijärjestyksistä (näistä ks. kohta 5.2 alla) kuin ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan yhden vapaan muuttujan fragmentti, olettaen, että jälkimmäisen aakkostossa on vain yksipaikkaisia predikaattisymboleja kaksipaikkaisen predikaattisymbolin $<$ ohella. Hans Kamp todisti tämän väitöskirjassaan [13] vuonna 1968.[10]

4 PTL:n ja US:n semantiikat

Aikalogiikan malli on kolmikko $M = \langle T, <, P\rangle$, missä T on epätyhjä joukko; $<$ on kaksipaikkainen relaatio joukossa T; ja P on valuaatio, eli kuvaus joukolta **prop** joukolle $\mathcal{P}(T)$.[11] Mallin 'yksilöalue' T on intuitiivisesti joukko *ajankohtia*, ja relaatio $<$ on näiden ajankohtien joukossa määritelty *aikaisempi kuin* -suhde. Käytämme jäljessä termejä 'ajankohta', 'hetki' tai 'piste' puhuessamme mallin yksilöalueen alkioista. Jos q on propositiosymboli, on valuaation P antama joukko $P(q)$ intuitiivisesti niiden ajankohtien joukko, joina propositiosymboli q on tosi. Paria $\langle T, <\rangle$ kutsutaan modaalilogiikasta tutulla terminologialla *Kripke-kehykseksi* tai yksinkertaisesti *kehykseksi.* Jos $t \in T$, niin kutsumme paria $\langle M, t\rangle$ *pisteelliseksi malliksi.*

Kuten olemme edellä todenneet, relaatiosta $<$ oletetaan ainakin että se on irrefleksiivinen ja transitiivinen. Merkitsemme relaation $<$ käänteisrelaatiota symbolilla $>$.[12] Yleisesti voimme merkitä minkä hyvänsä kaksipaikkaisen relaation R käänteisrelaatiota symbolilla 'R^{-1}', joka on määritelmänsä mukaan relaatio $\{\, \langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \,\}$. Huomattakoon, että käänteisrelaation käänteisrelaatio on lähtökohtarelaatio itse: $(R^{-1})^{-1} = R$.

Jos $A \in \mathbf{PTL}$ (kuten myös jos $A \in \mathbf{US}$), merkintä

$$M, t \vDash A$$

tarkoittaa, että A on tosi mallissa M ajankohtana t; vastaavasti merkintä

$$M, t \nvDash A$$

tarkoittaa, että A on epätosi mallissa M ajankohtana t. (Kirjallisuudessa käytetään relaatiolle $M, t \vDash A$ myös merkintöjä $M \vDash A[t]$, $M \vDash_t A$ ja $\|A, M, t\| = \mathit{tosi}$.)

[10] **US**-logiikasta, ks. myös [7, 10].

[11] Symbolia P valuaatioon viittaavana terminä ei tule sekoittaa **PTL**:n (määriteltyyn) menneisyysoperaattoriin $\mathrm{P} = \neg\mathrm{H}\neg$. Jos S on joukko, on $\mathcal{P}(S)$ joukon S potenssijoukko eli sen kaikkien osajoukkojen joukko.

[12] Tämä merkintähän on tuttu jo koulumatematiikasta tapauksesta, jossa relaatio $<$ on reaalilukujen välinen suhde *olla pienempi kuin.*

PTL-kaavojen semantiikka määritellään rekursiivisesti (induktiivisesti) **PTL**:n syntaksin antaman **PTL**-kaavan rakenteen suhteen:

$$\begin{aligned} M, t \vDash p &\Leftrightarrow t \in P(p); \\ M, t \vDash \neg A &\Leftrightarrow M, t \nvDash A; \\ M, t \vDash (A \wedge B) &\Leftrightarrow (M, t \vDash A \text{ ja } M, t \vDash B); \\ M, t \vDash \mathrm{G}A &\Leftrightarrow \text{jokaiselle } t', \text{ jolle } t < t'\text{: } M, t' \vDash A; \\ M, t \vDash \mathrm{H}A &\Leftrightarrow \text{jokaiselle } t', \text{ jolle } t' < t\text{: } M, t' \vDash A. \end{aligned}$$

Kaavojen $\mathrm{G}A$ ja $\mathrm{H}A$ totuusehdot eroavat toisistaan siis vain siinä, että toinen käyttää sen relaation käänteisrelaatiota, jota toinen käyttää. Juuri tästä syystä operaattoreita G ja H kutsutaan toistensa käänteisoperaattoreiksi. Määriteltyjen kaavojen $\mathrm{F}A$ ja $\mathrm{P}A$ totuusehdoiksi saadaan:

$$\begin{aligned} M, t \vDash \mathrm{F}A &\Leftrightarrow \text{jollain } t', \text{ jolle } t < t'\text{: } M, t' \vDash A; \\ M, t \vDash \mathrm{P}A &\Leftrightarrow \text{jollain } t', \text{ jolle } t' < t\text{: } M, t' \vDash A. \end{aligned}$$

Näin ollen myös operaattoreita F ja P on luontevaa kutsua toistensa käänteisoperaattoreiksi.

Havainnollistetaan kielen **PTL** semantiikkaa esimerkein.

Esimerkki 1. Tutkitaan kaavan $\mathrm{GP}q$ evaluoimista mallissa $M = \langle \mathbb{Q}, <, P \rangle$ ajankohtana 0, kun valuaatio P on määritelty seuraavasti:[13]

$$\{P(q) = \{ \tfrac{1}{n} \mid n := 1, 2, 3, \ldots \}.$$

Valuaatio on määritelty niin, että q on tosi täsmälleen ajankohtina 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ jne. Näin ollen siis q ei ole tosi minään hetkeä 0 aiempana ajankohtana, eikä hetkellä 0, mutta toisaalta se on totta *mielivaltaisen lähellä* hetkeä 0, hetkeä 0 myöhempien ajakohtien joukossa: otettiinpa mikä hyvänsä ajakohta $t > 0$, on olemassa ajankohta t', joka toteuttaa ehdon $0 < t' < t$ *ja* joka lisäksi tekee propositiosymbolin q todeksi. Tuollaisen t':n löytää vaikkapa seuraavalla päättelyllä: t on positiivinen rationaaliluku, joten se on muotoa $t = \frac{m}{n}$ joillain $m, n \in \mathbb{N}$ (missä $m \neq 0 \neq n$). Koska $0 < t$, on $0 < t \cdot \frac{1}{2m} < t$, missä $t \cdot \frac{1}{2m} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2n}$, joten valitsemalla $t' = \frac{1}{2n}$ olemme löytäneet haluttua muotoa olevan luvun 0:n ja t:n välistä. Väitämme, että pätee:

$$M, 0 \vDash \mathrm{GP}q.$$

Mitä tämä sitten edellyttää mallilta M? Että jokaista ajankohtaa $t > 0$ kohden on olemassa sellainen ajankohta $t' < t$, joka toteuttaa propositiosymbolin q. Mutta olemme juuri nähneet, että itse asiassa vielä vahvempikin ehto pätee: jokaista hetkeä 0 myöhempää ajankohtaa t kohden todella on sitä aiempi ajankohta t', joka tekee propositiosymbolin q todeksi — ja joka sitäpaitsi itse on hetkeä 0 myöhempi. □

[13] $\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko, ja $<$ on joukossa $\mathbb{Q}$ tavanomaisella tavalla määritelty *pienempi kuin* -relaatio.

Esimerkki 2. Tarkastellaan vielä saman kaavan $\mathrm{GP}q$ evaluoimista toisessa mallissa, nimittäin mallissa $M = \langle \mathbb{Z}, <, P \rangle$ ajankohtana 0, kun P on seuraava valuaatio:[14]

$$P(q) = \{\ t \mid 0 < t\}.$$

Päteekö nytkin

$$M, 0 \vDash \mathrm{GP}q\ ?$$

Tilannehan on siinä suhteessa samanlainen edelliseen esimerkkiin nähden, että nytkin mielivaltaisen lähellä hetkeä 0 on, sitä myöhempien ajankohtien joukossa, hetkiä jotka tekevät propositiosymbolin q todeksi. Itse asiassa tässä tapauksessa kaikki hetkeä 0 myöhemmät ajankohdat tekevät q:n todeksi. Väite *ei* kuitenkaan pidä paikkaansa; edellisessä esimerkissä rationaalilukujen järjestyksen *tiheysominaisuus* oli oleellinen kaavan $\mathrm{GP}q$ totuudelle pisteessä 0 (siis se tosiasia, että minkä hyvänsä kahden rationaaliluvun välistä löytyy rationaaliluku: jos $x < y$, on olemassa sellainen z, että $x < z < y$). Kokonaislukujen järjestys taas ei ole tiheä, vaan *diskreetti*: erityisesti jokaisella kokonaisluvulla on *välitön seuraaja*. (Kokonaisluvun t välitön seuraaja on luku $t + 1$.) Nyt taas näemme, että itse asiassa on

$$M, 0 \nvDash \mathrm{GP}q,$$

koska muutoin pätisi erityisesti $M, 1 \vDash \mathrm{P}q$ (onhan nimittäin $1 > 0$), ja siis olisi jokin kokonaisluku $t \leq 0$, joka toteuttaa q:n. Kuitenkin valuaation P määritelmän mukaan 1 on pienin luku, joka toteuttaa q:n. Siis $\mathrm{GP}q$ ei ole totta mallin M pisteessä 0. $\square$

Annamme vielä semantiikan konnektiivien *Until* ja *Since* logiikalle eli **US**-logiikalle:

$$\begin{aligned} M, t \vDash \mathrm{U}(A, B) \Leftrightarrow\ & \text{on olemassa } t' > t, \text{ jolle pätee } M, t' \vDash A \\ & \text{ja jokaiselle } s, \text{ jolle } t < s < t' \text{ pätee } M, s \vDash B; \\ M, t \vDash \mathrm{S}(A, B) \Leftrightarrow\ & \text{on olemassa } t' < t, \text{ jolle pätee } M, t' \vDash A \\ & \text{ja jokaiselle } s, \text{ jolle } t' < s < t \text{ pätee } M, s \vDash B. \end{aligned}$$

Atomikaavoille sekä negaatio- ja konjunktiomuotoisille kaavoille totuusehdot ovat samat kuin **PTL**-logiikassa.

Katsotaan vielä esimerkkejä **US**-kaavojen evaluoimisesta.

Esimerkki 3. Tarkastellaan kaavan $\mathrm{U}(q, \neg q)$ totuusarvoa mallissa $M = \langle \mathbb{Q}, <, P \rangle$ ajankohtana 0, kun valuaatio P on määritelty seuraavasti:

$$P(q) = \{\ t \in \mathbb{Q} \mid t^2 \geq 2\}.$$

[14] $\mathbb{Z}$ on rationaalilukujen joukko, ja $<$ on joukossa $\mathbb{Z}$ normaalilla tavalla määritelty *pienempi kuin* -relaatio.

Väitämme, että

$$M, 0 \not\models \mathrm{U}(q, \neg q).$$

Miksi kaava ei sitten ole tosi pisteessä 0? Kaava väittää, että on olemassa ajankohta $t > 0$, joka toteuttaa propositiosymbolin q, ja kaikkina 0:n ja tuon t:n välisinä hetkinä q on epätotta. Mikä yksilöalueen $\mathbb{Q}$ alkio tuollainen piste t sitten voisi olla? Selvästikään ei mikään sellainen t, jolle $0 < t^2 < 2$, koska valuaation P määritelmän mukaan p on epätosi kaikkina tällaisina ajankohtina.

Voisimmeko sitten valita t:n niin, että se toteuttaisi ehdon $t^2 > 2$? Emme, koska tällön olisi olemassa sellainen toinen ajankohta, s, että $t^2 > s^2 > 2$, mikä olisi ristiriidassa sen kanssa, että kaavan $\mathrm{U}(q, \neg q)$ mukaan q on epätosi 0:n jälkeen aina hetkeen t asti: nyt kuitenkin se olisi tosi myös pisteessä $s < t$. Perustelemme miksi tuollainen s olisi olemassa. Tarkastellaan rationaalilukuja $t - \frac{1}{n}$, missä $n := 1, 2, \ldots$. Olkoon $r < t$ mielivaltainen rationaaliluku. Selvästikin on olemassa pienin k siten, että kaikille $m \geq k$ pätee: $(t - \frac{1}{m})^2 > r$. Siis erityisesti on olemassa rationaaliluku (itse asiassa äärettömän monta rationaalilukua) muotoa $t - \frac{1}{n}$ siten, että $2 < (t - \frac{1}{n})^2 < t^2$. Mikä tahansa tuollainen luku $t - \frac{1}{n}$ voidaan valita luvuksi s.

Ainoa vielä näköjään tarkastelematon tapaus olisi ajankohta t, joka toteuttaa ehdon $t^2 = 2$. Mutta tuollaista ajankohtaa ei ole! Yksilöaluemme on rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$, ja mikään rationaaliluku t ei toteuta ehtoa $t^2 = 2$; reaaliluku $t = \sqrt{2}$ joka tuon ehdon toteuttaa, on irrationaaliluku. □

Esimerkki 4. Tutkitaan vielä saman kaavan $\mathrm{U}(q, \neg q)$ evaluoimista toisessa struktuurissa: mallissa $M = \langle \mathbb{R}, <, P \rangle$ ajankohtana 0, kun P on seuraava valuaatio:[15]

$$P(q) = \{\ t \in \mathbb{R} \mid t^2 \geq 2\}.$$

Päteekö nyt

$$M, 0 \models \mathrm{U}(q, \neg q)\ ?$$

Kyllä. Näin on seuraavasta syystä: $\sqrt{2} > 0$ ja kaikkina ajankohtaa $\sqrt{2}$ aiempina mutta hetkeä 0 myöhempinä ajankohtina propositiosymboli q on epätotta. Toisaalta q on totta hetkellä $\sqrt{2}$. Siis kaava $\mathrm{U}(q, \neg q)$ on totta hetkellä 0. Huomattakoon, että mallin yksilöalueen ollessa reaalilukujen joukko, valuaatiolle P pätee: $P(q) = \{\ t \in \mathbb{R} \mid t^2 \geq 2\} = \{\ t \in \mathbb{R} \mid t \geq \sqrt{2}\}$. □

5 Aikajärjestysten mahdollisia ominaisuuksia

Muodollisesti kaksipaikkainen *relaatio R joukossa S* on mikä hyvänsä joukon $S \times S$ osajoukko, siis mikä hyvänsä joukko pareja (x, y), missä alkiot x ja y kummatkin kuuluvat joukkoon S. Jos R on relaatio joukossa S, niin joukkoa

[15] $\mathbb{R}$ on reaalilukujen joukko, ja $<$ on joukossa $\mathbb{R}$ tavanomaisella tavalla määritelty *pienempi kuin* -relaatio.

$$dom(R) = \{ \ x \in S \mid \text{jollain } y \in S : (x, y) \in R\}$$

sanotaan relaation R *määritysjoukoksi* (engl. *domain*); ja joukkoa

$$rng(R) = \{ \ y \in S \mid \text{jollain } x \in S : (x, y) \in R\}$$

relaation R *arvojoukoksi* (engl. *range*). Näin siis $dom(R)$ on niiden joukon S alkioiden joukko, jotka ovat suhteessa R johonkin joukon S alkioon; ja $rng(S)$ niiden joukon S alkioiden joukko, joihin jokin joukon S alkio on suhteessa R. Yleisesti ei ole mitään syytä, miksi sen paremmin joukko $dom(R)$ kuin joukko $rng(R)$:kaan aina olisi koko joukko S.

Jos 'R' vaikkapa edustaa relaatiota *rakastaa* kaikkien ihmisten joukossa, on $dom(R)$ niiden ihmisten joukko, jotka rakastavat jotakuta, ja $rng(R)$ niiden ihmisten joukko, joita joku rakastaa. Voi hyvin olla niin, että $dom(R) \neq rng(R)$. Näin on, jos joku ei rakasta ketään, ei edes itseään, mutta tästä huolimatta joku rakastaa häntä. Tai jos on joku, jota kukaan ei rakasta, mutta hän silti rakastaa jotakuta. Joukot $dom(R)$ ja $rng(R)$ eivät yhdessäkään tyhjennä kaikkien ihmisten joukkoa, jos on joku, jota kukaan ei rakasta ja joka ei liioin itse rakasta ketään. Toisen esimerkin relaation määritysjoukon ja arvojoukon eriävyydestä tarjoaa relaatio $R_0 = \{(0, 1), (1, 2)\}$ joukossa $S_0 = \{0, 1, 2\}$. Tälle relaatiolle pätee:

$$dom(R_0) = \{0, 1\} \neq \{1, 2\} = rng(R_0).$$

Huomattakoon vielä, että joukot $dom(R_0)$ ja $rng(R_0)$ yhdessä tyhjentävät joukon S_0, vaikka kumpikaan noista joukoista yksin ei sitä tyhjennäkään. Kun jatkossa puhumme *järjestyksistä* $\langle T, R\rangle$, tarkoitamme pareja, jotka koostuvat kaksipaikkaisesta relaatiosta R ja joukosta T jossa tuo relaatio on määritelty. Emme edellytä, että $T = dom(R) \cup rng(R)$.

Melkein kaikki vaihtoehtorelaatiot, joita tarkastelemme tässä kirjoituksessa ovat *osittainjärjestyksiä* (engl. *partial orders*).[16] Järjestys $\langle T, <\rangle$ on osittainjärjestys jos $<$ on *antisymmetrinen* ja *transitiivinen* järjestys joukossa T. Relaation $<$ antisymmetrisyys merkitsee seuraavan ehdon voimassaoloa:

$$\forall x \, \forall y \colon (x \neq y \wedge x < y) \rightarrow \neg(y < x).$$

Tämän ehdon voi kirjoittaa yhtäpitävään muotoon

$$\forall x \, \forall y \colon (x < y \wedge y < x) \rightarrow x = y.$$

Olemme edellä todenneet, että aikalogiikan semantiikassa Kripke-kehyksen vaihtoehtorelaatiolta vaaditaan ainakin ominaisuudet irrefleksiivisyys ja transitiivisuus:

$$\forall x \colon \neg(x < x),$$

[16] Ainoan poikkeuksen muodostavat luvussa 5.5 tarkastellut syklit.

$$\forall x\, \forall y\, \forall z \colon (x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z.$$

On helppo harjoitustehtävä osoittaa, että tämä vaatimus on yhtäpitävä sen vaatimuksen kanssa, että Kripke-kehyksen on oltava irrefleksiivinen osittainjärjestys.

Jos $<$ on kaksipaikkainen relaatio jossain joukossa T, sanomme relaatiota

$$< \;\cup \{\, \langle x, x\rangle \mid x \in dom(<)\}$$

relaation $<$ *refleksiiviseksi sulkeumaksi* ja merkitsemme sitä symbolilla '$\leq$'. Siis $x \leq y$ jos ja vain jos $x < y$ tai (x kuuluu relaation $<$ määritysjoukkoon ja $x = y$).

Koska aikalogiikassa vaihtoehtorelaation on tarkoitus olla ajallisen *aikaisempi/myöhempi*-suhteen formaali vastine, on tässä yhteydessä perusteltua katsoa, minkälaisia lisäominaisuuksia tällaiselta suhteelta voisi olla järkevää vaatia.

5.1 Lineaarijärjestyksistä

On erityisen luontevaa ajatella aikajärjestystä *lineaarijärjestyksenä*. Lineaarijärjestys (eli kokonaisjärjestys) on kaksipaikkainen relaatio tässä tapauksessa ajankohtien joukossa T, joka toteuttaa seuraavat kolme ehtoa: *antisymmetrisyys*, *transitiivisuus* ja *yhtenäisyys*. Relaation $<$ yhtenäisyyden ilmaisee ehto

$$\forall x\, \forall y \colon\; x < y \;\vee\; x = y \;\vee\; y < x.$$

Näin yhtenäisyys tarkoittaa, että kaikki tarkasteltavat alkiot ovat keskenään *vertailukelpoisia* relaation $<$ suhteen siinä merkityksessä, että mitkä tahansa eriävät alkiot ovat keskenään joko suhteessa $<$ tai muutoin suhtautuvat sen käänteisrelaation $>$ mukaisesti toisiinsa.

Järjestyksen $\langle T, <\rangle$ sanotaan olevan *lineaarinen vasemmalle*, mikäli kaikille relaation $<$ arvojoukon $rng(<)$ alkioille t pätee, että relaatio $<$ järjestää tuon alkion *menneisyyden* eli joukon

$$S_t^- \stackrel{\text{def}}{=} \{\, s \mid s < t\}$$

lineaarisesti, so. että relaation $<$ rajoittuma $<_t^-$ joukkoon S_t^-, siis relaatio

$$<_t^- \stackrel{\text{def}}{=} < \cap\, (S_t^- \times S_t^-),$$

on antisymmetrinen, transitiivinen ja yhtenäinen. Järjestys on *lineaarinen oikealle*, jos vastaavalla tavalla jokaiselle relaation $<$ määritysjoukon $dom(<)$ alkiolle t pätee, että relaatio $<$ järjestää lineaarisesti sen *tulevaisuuden* eli joukon

$$S_t^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\, s \mid t < s\}.$$

Sanomme järjestyksen olevan *pisteittäin lineaarinen*, jos sen jokainen piste on sekä lineaarinen vasemmalle että lineaarinen oikealle. Helposti havaitaan, että on järjestyksiä, jotka ovat lineaarisia vasemmalle mutteivät lineaarisia oikealle, ja kääntäen, järjestyksiä, jotka ovat lineaarisia oikealle mutteivät lineaarisia vasemmalle. Esimerkiksi jos $1 \neq 1'$, on relaatio $\{(0,1),(0,1')\}$ lineaarinen vasemmalle — koska molemmat relaatioista $\{(0,1)\}$ ja $\{(0,1')\}$ ovat triviaalisti lineaarijärjestyksiä — mutta relaatio $\{(0,1),(0,1')\}$ ei ole lineaarien oikealle, koska alkiot 1 ja $1'$ eivät ole tämän relaation suhteen vertailukelpoiset. Vastaavasti nähdään, ettei lineaarisuus oikealle ole riittävä ehto sille, että järjestys olisi lineaarinen vasemmalle. Toisaalta on helppoa nähdä, että seuraava tulos pätee:

Tosiasia 1. Järjestys $\langle T, < \rangle$ on pisteittäin lineaarinen jos ja vain jos se on lineaarinen vasemmalle ja lineaarinen oikealle.

Edelleen on kuitenkin huomattava, että pisteittäinen lineearisuus ei takaa lineaarisuutta!

Tosiasia 2. On olemassa pisteittäin lineaarisia järjestyksiä, jotka eivät ole lineaarisia.

Todistus. Olkoot T ja T' ovat epätyhjiä keskenään pistevieraita joukkoja (siis $T \cap T' = \varnothing$) ja olkoot $\langle T, R \rangle$ ja $\langle T', R' \rangle$ kummatkin lineaarijärjestyksiä. Tällöin on järjestys $\langle T \cup T', R \cup R' \rangle$ pisteittäin lineaarinen, muttei lineaarinen. Olkoot nimittäin pisteet $t \in T$ ja $t' \in T'$ mielivaltaiset. Tällöin joukkojen T ja T' erillisyyden nojalla $t \neq t'$ ja $(t, t') \notin R \cup R'$ ja $(t', t) \notin R \cup R'$, eli pisteet t ja t' eivät ole vertailukelpoiset relaation $R \cup R'$ suhteeen. Näin ollen tämä relaatio ei voi olla lineaarijärjestys. ∎

Lineaarijärjestyksillä voi olla erilaisia lisäominaisuuksia antisymmetrisyyden, transitiivisuuden ja yhtenäisyyden ohella. Koska tarkastelemme tässä lineaarijärjestyksiä aikalogiikan Kripke-kehysten relaatioina, oletamme ne aina *irrefleksiivisiksi*. Esimerkkejä irrefleksiivisistä lineaarijärjestyksistä ovat:

- $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ eli luonnollisten lukujen joukon luonnollinen järjestys (so. lukujen suuruuden mukainen järjestys)
- $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ eli kokonaislukujen joukon luonnollinen järjestys
- $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ eli rationaalilukujen joukon luonnollinen järjestys
- $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ eli reaalilukujen joukon luonnollinen järjestys
- $\mathbb{N}$:n äärellisen alkusegmentin $\{0, \ldots, n\}$ luonnollinen järjestys.

Kaikki nämä järjestetyt lukujoukot ovat tuttuja matematiikasta, ja mitä tahansa niistä voidaan tarkastella mahdollisena aikajärjestyksenä. Tarkemmin sanoen mahdollisena aikajärjestyksenä voidaan tarkastella mitä hyvänsä Kripke-kehystä, joka on *isomorfinen* minkä tahansa edellä mainitun järjestetyn lukujoukon kanssa. Järjestettyjen joukkojen $\langle T, < \rangle$ ja $\langle T', <' \rangle$ isomorfisuus tarkoittaa, että joukkojen T ja T' alkiot voidaan asettaa vastaavuuteen jonkin bijektion $f \colon T \to T'$ avulla niin, että T:n alkiot x ja y toteuttavat ehdon $x < y$ jos ja vain jos T':n alkiot $f(x)$ ja $f(y)$ toteuttavat ehdon $f(x) <' f(y)$. Isomorfia tarkoittaa siis yksinkertaisesti kehysten *strukturaalista samankaltaisuutta* — sitä, että ne eivät eroa toisistaan lainkaan rakenteensa suhteen. (Tämän 'rakenteen' tekijöinä on kummankin kehyksen kohdalla joukko objekteja ja tässä joukossa määritelty kaksipaikkainen relaatio.)

Edellä mainitut järjestetyt lukujoukot ovat siis kaikki lineaarijärjestyksiä. Toisaalta noista järjestetyistä lukujoukoista millä hyvänsä kahdella, vaikkapa järjestetyillä joukoilla $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ ja $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, on rakenteellisia lisäominaisuuksia, jotka erottavat ne toisistaan.

Matematiikkaa opiskelleille puheena olevat ominaisuudet ovat hyvinkin tuttuja, mutta niitä varten, jotka eivät ole matematiikkaa opiskelleet, on syytä tuoda nämä ominaisuudet esiin. Useimmat ominaisuuksista on helppo mieltää, vaikkei matematiikan kanssa juuri olisi tekemisissä ollutkaan. (Mahdollisen poikkeuksen muodostavat *täydellisyysominaisuus* ja *hyvinjärjestysominaisuus*, joista lisää alla.) Seuraavassa esitetään luettelonomaisesti erilaisia ominaisuuksia, joita osittainjärjestyksillä voi olla. Huomattakoon, että mikä hyvänsä noista ominaisuuksista — paitsi hyvinjärjestysominaisuus — voi esiintyä myös muilla osittainjärjestyksillä kuin lineaarijärjestyksillä.

5.2 Osittainjärjestysten ominaisuuksia

Kaikissa seuraavissa tapauksissa tarkastelemme järjestystä $\langle T, < \rangle$, missä T on epätyhjä joukko.

Maksimin ja minimin olemassaolo

Alkiota M sanotaan järjestyksen $<$ suhteen *maksimaaliseksi* alkioksi joukossa T (eli joukon T $<$-maksimaaliseksi alkioksi), jos M kuuluu joukkoon T, eikä ole olemassa sellaista alkiota $x \in T$, että $M < x$. Vastaavasti alkio m on järjestyksen $<$ suhteen *minimaalinen* alkio T:ssä, mikäli $m \in T$, eikä ole sellaista alkiota $x \in T$, että $x < m$. Helposti havaitaan, että sen paremmin maksimaalisen kuin minimaalisenkaan alkion ei tarvitse olla yksikäsitteinen. (Maksimaalisten alkioiden osalta riittää tarkastella vaikkapa äärellistä *puurakennetta* ja sen *lehtiä*; asian toteamiseksi minimaalisille alkioille riittää kääntää tuo puu ylösalaisin!) Joukon T *maksimiksi* järjestyksen $<$ suhteen sanotaan sellaista joukon T alkiota M, joka toteuttaa ehdon

$$\forall x \in T \colon (x < M \vee x = M).$$

Maksimi on siis *mihin tahansa* T:n alkioon nähden 'suurempi tai yhtäsuuri', so. sellainen, että mikä hyvänsä muu T:n alkio on sen edeltäjä relaatiossa $<$. Tämä ehto on vahvempi kuin ehto, että M olisi maksimaalinen. Maksimin on oltava maksimaalinen ja lisäksi verrattavissa *kaikkiin* T:n alkioihin. Joukon T *minimi* järjestyksen $<$ suhteen on vastaavasti joukon T alkio m, joka toteuttaa ehdon

$$\forall x \in T \colon (m < x \vee x = m).$$

Havaitaan helposti, että mikäli maksimi (minimi) on olemassa, se on yksikäsitteinen — eli tuolloin on olemassa täsmälleen yksi maksimi (minimi). Lisäksi on helppo nähdä, että lineaarijärjestysten kohdalla maksimaalinen alkio on automaattisesti maksimi (ja minimaalinen alkio minimi). Tämä johtuu yksinkertaisesti lineaarijärjestysten yhtenäisyysominaisuudesta: jos olisi $M_1 \neq M_2$, mutta molemmat alkiot M_1 ja M_2 olisivat maksimaalisia alkioita lineaarijärjestyksen $<$ suhteen, pätisi yhtenäisyysominaisuuden nojalla joko $M_1 < M_2$ tai $M_2 < M_1$, eivätkä molemmat siis olisikaan maksimaalisia.

Esimerkkijärjestyksistämme järjestyksillä $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ ja $\langle \{0, \ldots, n\}, < \rangle$ on minimi ja jälkimmäisellä näistä myös maksimi. Millään järjestyksistä $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ ja $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ ei ole sen paremmin minimaalista alkiota kuin maksimaalista alkiotakaan, eikä siis tietenkään erityisesti minimiä eikä maksimia.

Ei maksimaalisia tai minimaalisia alkioita

On täysin mahdollista, että osittainjärjestyksellä ei ole sen paremmin minimaalista kuin maksimaalistakaan alkiota, tai että sillä on yhtä tyyppiä oleva ääripiste, muttei toista tyyppiä olevaa ääripistettä. Järjestyksellä voi esimerkiksi olla maksimaalinen alkio ilman että sillä olisi minimaalista alkiota. Erityisesti on lineaarijärjestyksiä, joilla ei ole minimiä eikä maksimia, ja sellaisia lineaarijärjestyksiä, joilla on vain toinen näistä ääripisteistä. Esimerkkijärjestyksistämme järjestyksellä $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ on, kuten juuri totesimme, minimi, mutta sillä ei ole maksimia. Järjestykset $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ ja $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ taas ovat siinä suhteessa samanlaisia, että niistä yhdelläkään ei ole sen paremmin minimiä kuin maksimiakaan.

Diskreettisyys

Tarkastellaan aluksi havainnollisuuden vuoksi *pisteittäin lineaarisia* järjestyksiä, ja vasta tämän jälkeen yleisiä osittainjärjestyksiä. Pisteittäin lineaarisen järjestyksen diskreettisyys tarkoittaa sitä, että jokaisella pisteellä sen määritysjoukossa on *välitön seuraaja* ja *välitön edeltäjä*.[17] Epäformaalisti ilmaisten edellytetään siis, että jokaisesta pisteestä siirrytään eteen- ja taaksepäin hyppäyksenomaisesti, *ei* asteittain. Tarkkaan ottaen vaaditaan kahta asiaa (jäljessä kvanttorien vaihteluala on T ja relaatio $<$ pisteittäin lineaarinen):

$$\begin{aligned} &\forall x\, \exists y\colon\ x < y \ \wedge\ \neg\exists z(x < z < y) && (\textit{diskreettisyys oikealle}),\\ &\forall x\, \exists y\colon\ y < x \ \wedge\ \neg\exists z(y < z < x) && (\textit{diskreettisyys vasemmalle}). \end{aligned}$$

Diskreettisyyttä voidaan luonnehtia myös sanomalla järjestyksen olevan diskreetti silloin, kun sen jokaisella pisteellä x on *ympäristö*, johon kuuluu tuo piste x eikä mikään muu piste. (Tätä emme kuitenkaan ota diskreettisyyden määritelmäksi, koska ympäristön käsite edellyttää *etäisyyden* käsitteen, mitä emme tässä määrittele.) Sanomme yksittäisen *pisteen* $t \in T$ — erotuksena kokonaisesta järjestyksestä $\langle T, <\rangle$ — olevan diskreetti oikealle, jos se toteuttaa ehdon

$$\exists y\colon\ t < y \ \wedge\ \neg\exists z(t < z < y)$$

ja diskreetti vasemmalle, mikäli se toteuttaa ehdon

$$\exists y\colon\ y < t \ \wedge\ \neg\exists z(y < z < t).$$

Näin siis pisteittäin lineaarinen järjestys $\langle T, <\rangle$ on diskreetti vasemmalle (oikealle), jos kaikki pisteet $t \in T$ ovat diskreettejä vasemmalle (oikealle).

Esimerkeistämme $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ on diskreetti *par excellence*. $\langle \mathbb{N}, <\rangle$ ei ole diskreetti, koska pisteellä 0 ei ole edeltäjää lainkaan eikä siten myöskään välitöntä edeltäjää: 0 ei siis ole vasemmalle diskreetti. Toisaalta $\langle \mathbb{N}, <\rangle$ on oikealle diskreetti jokaisessa pisteessään. Järjestys $\langle \{0, \ldots, n\}, <\rangle$ ei ole diskreetti sen paremmin vasemmalle kuin oikeallekaan: näin siksi, että 0 ei ole vasemmalle, eikä n oikealle diskreetti. Toisaalta kaikki pisteistä $0, \ldots, n-1$ ovat diskreettejä oikealle ja kaikki pisteistä $1, \ldots, n$ ovat diskreettejä vasemmalle.

Diskreettisyys oikealle ei siis takaa diskreettisyyttä vasemmalle. Huomattakoon, että näin olisi silloinkin jos omaksuttaisiin diskreettisyyden heikko muotoilu, jonka mukaan pisteittäin lineaarinen järjestys on diskreetti mikäli jokaisella *sellaisella* pisteellä, jolla ylipäätään on seuraaja (edeltäjä), on välitön edeltäjä (välitön seuraaja). Seuraava konstruktio todistaa väitteen. Tarkastellaan joukkoja $\{t_0, t_1, \ldots\}$ ja $\{s_0, s_1, \ldots\}$, joiden otaksumme olevan pistevieraita. Määritellään relaatio $<$ näiden joukkojen yhdisteessä seuraavasti: vaaditaan, että $<$ on transitiivinen ja että se toteuttaa ehdon

$$t_0 < t_1 < \ldots < s_0 < s_1 < \ldots.$$

[17] Toisinaan diskreettisyys määritellään väljemmin, ja pisteittäin lineaarista järjestystä sanotaan diskreetiksi jos jokaisella *sellaisella* pisteellä, jolla ylipäätään on seuraaja (edeltäjä), on välitön edeltäjä (välitön seuraaja).

Tällöin $<$ on diskreetti oikealle: olipa x mikä hyvänsä tarkastellun joukon piste, on sellainen i, että joko $x = t_i$ tai $x = s_i$. Edellisessä tapauksessa x:n välitön seuraaja on t_{i+1} ja jälkimmäisessä s_{i+1}. Toisaalta $<$ ei ole diskreetti vasemmalle. Koska sovellamme diskreettisyyden heikkoa määritelmää, tämä ei seuraa vielä siitä, että pisteellä t_0 ei ole lainkaan edeltäjiä. Toisaalta pisteellä s_0 on kylläkin edeltäjiä, muttei välitöntä edeltäjää!

Entä sitten diskreettisyyden määritelmä mielivaltaisille osittainjärjestyksille? Tällaisessahan tapauksessa annetulla pisteellä voi olla vertailukelvottomia seuraajia tai edeltäjiä. Nyt erityisesti diskreettisyys oikealle edellyttää sitä, että valiittinpa mikä hyvänsä pisteen x seuraaja y, löytyy sellainen pisteen x seuraaja z, joka totettaa ehdon $x < z \leq y$.[18] Yleisesti diskreettisyys edellyttää kahta asiaa (jäljessä kvanttorien vaihteluala on T ja relaatio $<$ mielivaltainen irrefleksiivinen osittainjärjestys):

Diskreettisyys oikealle:

$$\forall x\,\exists y\colon\ x < y \ \wedge\ \forall x\,\forall y\colon\ x < y \ \rightarrow\ \big(\exists z\colon (x < z \leq y) \ \wedge\ \neg\exists w(x < w < z)\big)$$

Diskreettisyys vasemmalle:

$$\forall x\,\exists y\colon\ y < x \ \wedge\ \forall x\,\forall y\colon\ y < x \ \rightarrow\ \big(\exists z\colon (y \leq z < x) \ \wedge\ \neg\exists w(z < w < x)\big)$$

Tämän määritelmän mukaan järjestys on diskreetti silloin kun missä hyvänsä mielivaltaisesta pisteestä t lähtevässä 'haarassa' pisteellä t on välitön seuraaja, ja lisäksi missä hyvänsä mielivaltaiseen pisteeseen t johtavassa 'polussa' pisteellä t on välitön edeltäjä.

Tiheys

Tiheys on diskreettisyyden kontraarinen vastakohta. Siinä missä diskreettisyyttä luonnehtii se, että jokaisella määritysjoukon pisteellä on välitön edeltäjä ja välitön seuraaja, edellyttää tiheys, ettei *millään* pisteellä ole sen paremmin välitöntä edeltäjää kuin välitöntä seuraajaakaan. Jos järjestys $<$ on tiheä ja annetulla pisteellä on seuraajia (edeltäjiä), niin tällä pisteellä on itse asiassa seuraajia (edeltäjiä) mielivaltaisen 'lähellä' itseään: jos pisteellä x ylipäätään on seuraajia (edeltäjiä), niin x:n ja minkä hyvänsä tuollaisen seuraajan (edeltäjän) y välissä on jokin kolmas piste. Määrittelemme tiheyden seuraavasti. Järjestys $\langle T, <\rangle$ on tiheä, jos

$$\forall x\,\forall y\colon \big(x < y \rightarrow \exists z(x \neq z \neq y \ \wedge\ x < z < y)\big).$$

Tiheys siis tarkoittaa, että minkä hyvänsä kahden toisiaan (relaation $<$ suhteen) seuraavan pisteen *välistä* löytyy kolmas piste. Huomattakoon, että jos määritellään ilmeisellä tavalla pisteen ominaisuudet 'tiheä vasemmalle' ja 'tiheä oikealle', niin järjestys on kaikissa pisteissään tiheä vasemmalle jos ja vain jos se on kaikissa pisteissään tiheä oikealle.

[18] Tässä $\leq$ on relaation $<$ refleksiivinen sulkeuma.

Rationaalilukujen järjestys $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ on tiheä, kuten myös reaalilukujen järjestys $\langle \mathbb{R}, < \rangle$. Toisaalta esimerkiksi luonnollisten lukujen järjestys $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ *ei* ole tiheä: tämän toteamiseksi riittää havaita, että vaikkapa luonnollisten lukujen 6 ja 7 välissä ei ole ainoatakaan luonnollista lukua. Annettu tiheyden määritelmä soveltuu selaisenaan mielivaltaisiin osittainjärjestyksiin.

Täydellisyys

On olemassa ominaisuus, joka erottaa reaalilukujen joukon rationaalilukujen joukosta. Molemmat ovat tiheitä joukkoja, mutta pelkästään tiheys ei riitä 'täyttämään' reaalilukusuoraa. Tähän tarvitaan reaalilukujen *täydellisyysominaisuudeksi* (engl. *completeness*, *Dedekind-completeness*) kutsuttu ominaisuus.

Sanomme joukon T (epätyhjää) osajoukkoa S *ylhäältä rajoitetuksi*, mikäli on olemassa sellainen T:n alkio x, että ehto

$$\forall y \in S \colon y \leq x$$

on voimassa. Pisteen x ei tietenkään tarvitse olla joukossa S. Mitä hyvänsä alkiota $x \in T$ joka toteuttaa tämän ehdon sanomme osajoukon S (erääksi) *ylärajaksi*. Sanomme alkiota $x_0 \in T$ osajoukon S *pienimmäksi ylärajaksi* eli *supremumiksi*, mikäli x_0 on S:n yläraja, ja lisäksi jokaiselle S:n ylärajalle x pätee, että

$$x_0 < x \qquad \text{tai} \qquad x_0 = x.$$

Joukon S supremumia järjestyksen $<$ suhteen merkitsemme symbolilla '$\sup_< S$', tai, jos on selvää mitä järjestystä tarkoitamme, yksinkertaisesti symbolilla '$\sup S$'. Lukija voi harjoitustehtävänä todistaa, että jos joukolla S on maksimi M, niin $\sup_< S = M$. Toisaalta sellaisellakin joukolla voi olla supremum, jolla ei ole maksimia. Esimerkiksi rationaalilukujoukolla $\{\, x \in \mathbb{Q} \mid x < 1 \,\}$ ei ole maksimia, mutta luku 1 on tämän joukon supremum.

Supremumin käsitteen avullla voimme määritellä järjestyksen täydellisyyden käsitteen. Järjestys $\langle T, < \rangle$ on *täydellinen*, jos jokaisella ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä T:n osajoukolla on pienin yläraja eli supremum, joka kuuluu joukkoon T. Esimerkiksi rationaalilukujoukolla $\{\, x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \,\}$ ei ole supremumia rationaalilukujen joukossa. Reaalilukujoukolla $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \,\}$ taas on supremum. Itse asiassa $\sup_<\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \,\} = \sqrt{2}$.

Esimerkkijärjestyksistämme järjestyksillä $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ ja $\langle \{0, \ldots, n\}, < \rangle$ on triviaalisti täydellisyysominaisuus: näissä tapauksissa millä hyvänsä epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla osajoukolla on itse asiassa maksimi. Järjestys $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ on täydellinen 'epätriviaalista' syystä: tässä tapauksessa täydellisyys ei perustu siihen että kaikilla kyseessä olevan joukon epätyhjillä ylhäältä rajoitetulla osajoukoilla olisi maksimi.

Huomattakoon, että täydellisyydestä voidaan — yllä esitetyn määritelmän puitteissa — mielekkäästi puhua muidenkin kuin (pisteittäin) lineaaristen järjestysten kohdalla. Jäljempänä puheeksi tulevat hilat ovat yksi esimerkki osittainjärjestyksistä, joiden ei tarvitse olla lineaarisia ja joiden yhteydessä supremumin käsitteellä on tärkeä rooli.

Hyvinjärjestykset

Tarkastellessamme hyvinjärjestyksiä, rajoitumme yksinomaan lineaarijärjestyksiin: suoraan määritelmällisesti kaikki hyvinjärjestykset ovat lineaarijärjestyksiä. *Hyvinjärjestykseksi* (engl. *well-ordering*) sanotaan lineaarijärjestystä $\langle T, < \rangle$, joka toteuttaa seuraavan ehdon:

> Jokaisella joukon T epätyhjällä osajoukolla S on minimi relaation $<$ suhteen.

Huomattakoon, että yllä esitetyn ehdon nojalla hyvinjärjestyksen määritelmässä riittäisi rajoittua lineaarjärjestysten sijaan pelkästään antisymmetrisyys- ja transitiivisuusehdot toteuttaviin järjestyksiin. Lineaarisuuteen vaadittava yhtenäisyysehto nimittäin seuraa esitetystä lisävaatimuksesta. Olkoot x ja y mielivaltaiset sellaiset T:n alkiot, että $x \neq y$. Nyt $\{x, y\}$ on joukon T osajoukko, joten hyvinjärjestyksiltä vaaditun ehdon nojalla joukolla $\{x, y\}$ on siis erityisesti oltava minimi. Jos m on tuon joukon minimi, on $m = x$ tai $m = y$. Näin siis joko $x < y$ tai $y < x$. Täten joukolla T ei voi olla relaation $<$ suhteen vertailukelvottomia alkioita. Siispä relaatio $<$ on yhtenäinen.

Havaitaan, että hyvinjärjestetyn joukon jokaisella pisteellä, jolla ylipäätään on seuraaja, on kyseessäolevan hyvinjärjestyksen suhteen *välitön* seuraaja. Olkoon nimitttäin $\langle T, < \rangle$ epätyhjä hyvinjärjestys, ja olkoon $x \in T$. Mikäli x ei ole joukon T maksimi,[19] tarkastellaan joukkoa $S_x = \{y \in T \mid x < y\}$. Tämä joukko on oletuksen nojalla epätyhjä: muutoin olisi $x = \max T$. Siis, järjestyksen $\langle T, < \rangle$ hyvinjärjestysominaisuuden nojalla joukolla S_x on minimi. Tuo minimi kuuluu joukkoon S_x ja siten erityisesti joukkoon T. Jos nyt olisi jokin sellainen alkio $y \in T$, että $x < y < \min S_x$, ei alkio $\min S_x$ olisi joukon S_x minimi. Tällaista alkiota y ei siis ole, ja $\min S_x$ on T:n alkion x välitön seuraaja.

Ei ole välttämätöntä, että hyvinjärjestyksen määritysjoukon jokaisella pisteellä olisi välitön *edeltäjä*. Toki silti x:n välittömällä seuraajalla on välitön edeltäjä, nimittäin x. Mutta siitä, että jokaisella pisteellä on välitön seuraaja, ei seuraa että jokainen piste on jonkin pisteen välitön seuraaja. (Itse asiassa tarkastelimme esimerkkiä tästä jo keskustellessamme edellä diskreettisyydestä.) Ensinnäkin, jokaisella epätyhjällä hyvinjärjestyksellä $\langle T, < \rangle$ on minimi (koska erityisesti epätyhjä joukko T on oma epätyhjä osajoukkonsa, on joukolla T on hyvinjärjestysominaisuuden nojalla minimi) eikä tuolla minimillä ole lainkaan edeltäjiä eikä siis erityisesti välitöntä edeltäjää. Toiseksi, niin kutsutussa ordinaalilukujen teoriassa kohdataan vieläpä alkioita, joilla kyllä on tarkastellussa hyvinjärjestyksessä $0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots$ edeltäjiä,

[19] Näin on tietenkin erityisesti silloin kun joukolla T ei ole maksimia.

muttei silti välitöntä edeltäjää: raja-ordinaalit, kuten pienin ääretön ordinaali ω, ovat sellaisia, että niillä kyllä on välitön seuraaja ja niillä on edeltäjiä, mutta ne itse eivät ole minkään ordinaalin välittömiä seuraajia.

Hyvinjärjestysominaisuutta ei pidä sekoittaa täydellisyysominaisuuteen. Näiden eron ja toisaalta yhtäläisyydet havaitsee parhaiten vertaamalla ensin mainittua ehtoa jälkimmäisen ehdon seuraavaan, yhtäpitävään muotoiluun:

> Järjestys $\langle T, < \rangle$ on täydellinen, jos jokaisella alhaalta rajoitetulla epätyhjällä T:n osajoukolla on suurin alaraja eli *infimum*, joka kuuluu joukkoon T.

Ja siis järjestys $\langle T, < \rangle$ on hyvinjärjestys, mikäli

> jokaisella T:n epätyhjällä osajoukolla S on minimi relaation $<$ suhteen.

Hyvinjärjestysehto ei siis pelkästään edellytä suurimman alarajan olemassaoloa, vaan edellyttää nimenomaan minimin olemassaolon. (Huomaa, että alkion $\inf S$ ei tarvitse kuulua joukkoon S, mutta $\min S$ tietenkin kuuluu joukkoon S.) Lisäksi hyvinjärjestysehto koskee *kaikkia* T:n epätyhjiä osajoukkoja *eikä* ainoastaan T:n *alhaalta rajoitettuja* epätyhjiä osajoukkoja.

Esimerkkijärjestyksistämme ainoastaan $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ ja $\langle \{0, \ldots, n\}, < \rangle$ ovat hyvinjärjestyksiä. Kaikilta muilta esimerkkijärjestyksiltä — nimittäin järjestyksiltä $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ ja $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ — *puuttuu minimi*, mikä riittää siihen, etteivät ne voi olla hyvinjärjestyksiä. Kaikkien ei-negatiivisten reaalilukujen järjestys $\langle \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}, < \rangle$ on täydellinen ja sillä on minimi. Se ei kuitenkaan ole hyvinjärjestys: esimerkiksi epätyhjällä osajoukolla $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < 2 \cdot x\}$ ei ole pienintä alkiota.

5.3 Puut

Aikajärjestystä ei välttämättä tarvitse ajatella lineaarijärjestykseksi. Tarkastellaan seuraavaksi *puita*, jotka muodostavat tärkeän osittainjärjestysten osaluokan.

Toisinaan pidetään luontevana mallintaa aikaa puurakenteella — järjestyksellä, joka haarautuu kunkin pisteen kohdalla jonkin äärellisen tai äärettömän määrän kertoja tulevaisuuden suunnassa. Tällöin ajatellaan eri haarojen edustavan toisistaan eroavia mahdollisia tulevaisuuden realisaatioita. Tämä ajattelutapa ei ehkä ole erityisen syvällinen itse ajan representaationa, mutta epistemologisesta näkökulmasta (sen kannalta mitä tiedämme tulevasta ajasta) voi tämä tapa mallintaa aikaa olla joka tapauksessa hyödyllinen.

Järjestystä $\langle T, < \rangle$ sanotaan *puuksi* (engl. *tree*), jos $<$ on osittainjärjestys joukossa T ja $\langle T, < \rangle$ toteuttaa seuraavat ehdot: (i) joukossa T on minimi järjestyksen $<$ suhteen; ja (ii) T:n minkä hyvänsä alkion $<$-edeltäjät ovat keskenään vertailukelpoisia.

Kohdan (i) perusteella olemassa olevaa alkiota $\min_< T$ sanotaan puun $\langle T, < \rangle$ *juureksi* (engl. *root*). Ehto (ii) tarkoittaa, että olipa $x \in T$ mikä hyvänsä alkio, niin mikäli $y < x$ ja $z < x$, niin y ja z ovat vertailukelpoiset eli niille pätee $y < z$ tai $z < y$ tai $y = z$. Tästä seuraa, että minkä hyvänsä T:n alkion *edeltäjien* joukko (eli minkä tahansa pisteen *menneisyys*) on lineaarisesti järjestetty. Annetun alkion *seuraajien* joukko (eli sen *tulevaisuus*) taas nimenomaan yleensä ei ole puussa lineaarijärjestetty, sillä eri haaroissa olevat annetun alkion seuraajat eivät ole puun järjestysrelaation suhteen vertailukelpoisia. Jos $x < y$ ja $x < z$, mutta alkiot y ja z ovat keskenään vertailukelvottomia, kuuluvat y ja z eri oksiin; näistä oksista kumpikin sisältää pisteen x. Tämä siis merkitsee, että pisteen x yläpuolella (tai pisteen x itsensä kohdalla) puu *haarautuu* ainakin kahteen *haaraan*, josta yksi käsittää pisteen y ja toinen pisteen z. Huomattakoon, että lineaarijärjestykset ovat 'surkastunut' tapaus puista: lineaarijärjestykset ovat puita, joissa jokaisen pisteen tulevaisuuskin on lineaarijärjestetty.

Jos puun $\langle T, < \rangle$ järjestys on diskreetti, sanomme, että puun alkion x *haarautuma-aste* (engl. *out-degree*) on x:n välittömien $<$-seuraajien joukon kardinaaliluku.[20]

Mitä hyvänsä joukon T $<$-maksimaalista alkiota sanotaan puun T *lehdeksi* (engl. *leaf*). Sanomme puuta $\langle T, < \rangle$ *äärettömäksi*, mikäli joukko $dom(<) \cup rng(<)$ on ääretön. Huomaa, ettei äärettömällä puulla tarvitse olla yhtään lehteä, mutta sillä voi niitä olla. Ääretön puu voi olla äärettömän *korkea*. Näin on silloin, jos puussa on ääretön oksa, eli jos puussa on jotkin sellaiset alkiot $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, että $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$.[21] Toisaalta äärettömän puun *ei tarvitse* olla äärettömän korkea: myös mikä hyvänsä puu, jonka jollain alkiolla on äärettämän monta parittain

[20] Voisimme tarkastella myös puita, joiden järjestysrelaatio on tiheä, jolloin emme voisi määritellä haarautuma-astetta näin. Sanotaan, että joukko S_x on pisteen x *vertailukelvottomien seuraajien maksimaalinen joukko*, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa: (i) jos $y \in S_x$, niin $x < y$; (ii) jos $y, z \in S_x$ ja $y \neq z$, niin $y \not< z$ ja $z \not< y$; ja (iii) jos $v \notin S_x$ mutta $x < v$, niin on sellainen $w \in S_x$, että joko $v < w$ tai $w < v$. Tällainen joukko S_x ei ole suinkaan yksikäsitteisesti määrätty. Minimoimalla sen koko saadaan pisteen x haarautuma-aste: Jos $\mathbb{S}_x$ on pisteen x vertailukelvottomien seuraajien maksimaalisten joukkojen joukko, voimme määritellä pisteen x haarautuma-asteen $deg(x)$ joukon $\{|S| : S \in \mathbb{S}_x\}$ minimiksi, missä $|S|$ merkitsee joukon S kokoa eli sen kardinaalilukua. (Yleisesti pisteen haarautuma-aste siis voi olla jokin ääretönkin kardinaaliluku.)

Jos relaatio $<$ on määritelty numeroituvasti äärettömässä joukossa, on $deg(x) \leq \aleph_0$. Jos se taas on määritelty esimerkiksi reaalilukujen joukossa (joka on ylinumeroituva), on $deg(x) \leq 2^{\aleph_0}$ ja päädymme sikäli erikoiseen tilanteeseen, ettemme tiedä mitkä kaikki kardinaaliluvut voivat tulla kyseeseen suureen $deg(x)$ arvoina: joukko-opin aksioomista riippumattoman kontinuumihypoteesin totuusarvosta nimittäin riippu, onko $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, vai onko kardinaalilukujen $\aleph_1$ ja $2^{\aleph_0}$ välissä kardinaalilukuja.

[21] Huomaa, ettei puussa voi esiintyä sykliä. Sellaisen esiintyminen rikkoisi antisymmetrisyysoletusta vastaan.

ei-vertailukelpoista seuraajaa, on ääretön. Esimerkistä käy puu, jolla on juuri 0, ja tällä juurella on välittömät seuraajat $1, 2, 3, \ldots$. Kyseessä on siis puu $\langle \mathbb{N}, \{\langle 0, n\rangle \mid n \geq 1\}\rangle$. Kunkin oksan korkeus on 1, mutta puu on ääretön. Ääretöntä diskreettiä puuta, jonka jonkin alkion haarautuma-aste on ääretön, sanotaan äärettömän *leveäksi*.

Tunnettu kombinatorinen tulos, *Königin lemma*, sanoo, että puu $\langle T, <\rangle$, jonka kaikkien alkioden haarautuma-aste on äärellinen, on ääretön jos ja vain jos puu $\langle T, <\rangle$ on äärettömän korkea (eli jos puulla $\langle T, <\rangle$ on ainakin yksi ääretömän korkea oksa).

Luonteva esimerkki puurakenteesta on *binaarinen puu*, eli diskreetti puu, jonka kaikilla alkioilla on täsmälleen kaksi välitöntä seuraajaa. Tämän puu kaikki oksat ovat siis äärettömiä (sillä jos jollain oksalla olisi maksimaalinen alkio, olisi tällä kaksi välitöntä seuraajaa, mikä on mahdotonta). Täsmällinen määritelmä on seuraava. *Binaarinen merkkijono* on mikä hyvänsä äärellinen jono, jonka jäsenet ovat joukosta $\{0, 1\}$. Esimerkiksi 001, 0101010111 ja 1 ovat binaarisia merkkijonoja. Lisäksi tyhjä merkkijono, joka koostuu nollasta kappaleesta symboleja 0 ja 1, on binaarinen merkkijono. Tyhjän merkkijonon symbolina käytetään symbolia λ. Kaikkien binaaristen merkkijonojen joukkoa

$$\{i_1 \ldots i_n \mid n \geq 0 \text{ ja kaikilla } 1 \leq j \leq n \text{ pätee } i_j \in \{0, 1\}\}$$

merkitään symbolilla $\{0, 1\}^*$. (Tapaus $n = 0$ vastaa tyhjää merkkijonoa.) Binaarinen puu on yksinkertaisesti järjestys $\langle \{0, 1\}^*, <\rangle$, missä binaaristen merkkijonojen välinen relaatio $<$ on määritelty seuraavasti:

$$i_1 \ldots i_n < i'_1 \ldots i'_m,$$

jos: $n < m$, ja $i_1 \ldots i_n = i'_1 \ldots i'_n$. Siis: merkkijono $\bar{j}$ on merkkijonon $\bar{i}$ seuraaja, mikäli jono $\bar{j}$ on saatu jonosta $\bar{i}$ lisäämällä jonon $\bar{i}$ perään jokin epätyhjä binaarinen merkkijono $\bar{k}$ (siis jos $\bar{j}$ on saatu konkatenoimalla $\bar{i}$ ja tuollainen $\bar{k}$).

Konkreettinen esimerkki tällaisesta puurakenteesta on annetun henkilön esivanhempien joukko: jokaisella henkilöllä on kaksi vanhempaa, kullakin näistä kaksi vanhempaa ja niin edelleen. Jos binaarisessa puussa rajoitutaan korkeutta n oleviin oksiin, saadaan henkilön n:n polven esivanhempien joukko esitettyä strukturaalisesti.

Ajallisen toiminnan representaationa binaarinen puu voi toimia, jos oletetaan, että kunakin hetkenä on kaksi toisensa poissulkevaa vaihtoehtoa sen suhteen, miten asiat voivat kehittyä kun siirrytään tuon hetken välittömään tulevaisuuteen. (Yleisesti puurakenteella tietenkin voitaisiin mallintaa tilannetta, jossa kullakin hetkellä olisi jokin tuosta hetkestä mahdollisesti riippuva, äärellinen tai ääretön määrä toisensa poissulkevia vaihtoehtoja, joista jokin realisoituisi riippuen siitä mitä kyseessäolevalla hetkellä tehdään.)

5.4 Hilat

Osittainjärjestystä $\langle T, <\rangle$ sanotaan *hilaksi* (engl. *lattice*), jos mille hyvänsä kahdelle joukon T alkiolle x ja y pätee, että joukolla $\{x, y\}$ on sekä *supremum* (pienin yläraja) että *infimum* (suurin alaraja) järjestyksen $<$ suhteen.

Seuraava on yksinkertainen esimerkki hilarakenteesta. Tarkastellaan neljän alkion joukkoa $\{1, a, b, 0\}$. Olkoon $<$ seuraavat ehdot toteuttava relaatio tässä joukossa: $<$ on transitiivinen ja lisäksi pätee: $0 < a < 1$, $0 < b < 1$. Käymällä läpi kaikki joukon $\{1, a, b, 0\}$ kahden alkion osajoukot, on helppo todeta, että $\langle\{1, a, b, 0\}, <\rangle$ todellakin on hila. Erityisesti $\inf\{a, b\} = 0$ ja $\sup\{a, b\} = 1$. Edelleen, kaikilla $x \neq 0$, $\inf\{x, 0\} = 0$ ja $\sup\{x, 0\} = x$; ja kaikilla $x \neq 1$, $\sup\{x, 1\} = 1$ ja $\inf\{x, 1\} = x$.

Pantakoon merkille, että erityisesti kaikki lineaarijärjestykset $\langle T, <\rangle$ ovat hiloja.[22] Jos $<$ on lineaarijärjestys ja x ja y ovat kaksi joukon T alkiota, niin $\inf\{x, y\}$ on yksinkertaisesti se alkioista x ja y, joka järjestyksen $<$ suhteen edeltää toista alkioista, eli $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$. Vastaavasti $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.

Aikajärjestyksen representaationa hila voisi tulla kyseeseen silloin, jos haluttaisiin sallia haarautumia tulevaisuudessa vain sillä ehdolla että haarautumat aina johtavat lopulta takaisin yhteen (mahdollisesti haarautuakseen taas, ja niin edelleen). Tämä mahdollistaisi sen, että voitaisiin puhua joidenkin eri tapahtumakulkuihin kuuluvien tulevien ajankohtien *samuudesta*. Jos aikaa mallinnettaessa ajankohdat identifioidaan tapahtumajoukkojen kanssa — intuitiivisesti, kutakin ajankohtaa vastaa niiden tapahtumien joukko, jotka sattuvat tuona ajankohtana[23] — voisi tällainen mallintaminen tulla kyseeseen. Jos nimittäin ajankohtien identiteettikriteerit ovat tällaiset, voi hyvinkin käydä niin, että kaksi tapahtumakulkua johtaa samaaan ajankohtaan — tilanteeseen, jossa täsmälleen samat tapahtumat sattuvat. Toisaalta tällaisesta näkökulmasta oletus, että minkä hyvänsä kahden ajankohdan muodstamalla joukolla olisi supremum ja infimum vaikuttaisi melko satunnaiselta. Ajatellaan, että hetkellä t voin päätökselläni aikaansaada, että seuraavaksi joko p tai $\neg p$ pätee. Ajallisen toiminnan mallissamme hetkellä t siis on kaksi seuraajaa s ja s', joista hetkellä s pätee p ja hetkellä s' pätee $\neg p$. Jos aikarakenteemme on erityisesti hila, täytyy nyt hetkillä s ja s' olla yhteinen seuraaja c. On kuitenkin mahdollista, että hetkillä s ja s' vallitsevat asiantilat, vastaavasti p ja $\neg p$, ovat niin vahvasti toisensa poissulkevia, ettei tuollaista seuraaja c voi olla. Ääriesimerkki olisi tapaus jossa $p = G\bot$, eli tapaus jossa hetki s olisi lokaali maailmanloppu.

[22] Refleksiivisiä lineaarijärjestyksiä kutsutaan hilateoriassa yleensä *ketjuiksi* (engl. *chain*).

[23] Tätä ei tietenkään voi pitää määritelmänä, koska ilmauksen 'ajankohta' määritelmä ei voi sisältää ilmausta 'tuona ajankohtana'.

5.5 Muita järjestyksiä: esimerkkinä syklinen aika

Esittelemme vielä lyhyesti melko radikaalisti tavanomaisia ajallisia intuitioitamme rikkovan järjestysluokan — *syklit* — joiden yhteydessä luovutaan sekä irrefleksiivisyydestä että antisymmetrisyydestä. Tällaiset järjestykset eivät siis ole osittainjärjestyksiä.

Puhuttaessa syklisestä ajasta ajatuksena on, että tarkasteltiinpa mitä hyvänsä ajankohtaa, enemmin tai myöhemmin tuohon samaan ajankohtaan päädytään uudelleen temporaalisen *aikaisempi kuin* -suhteen myötä. Tätä ajatusta voi koettaa formaalein välinen täsmäntää usealla eri tavalla (ks. esim. [15]). Yksinkertaisin tapa perustuu epäilemättä ajatukseen, jonka mukaan syklisesti järjestetyt ajankohdat on järjestetty jonkin ympyrän kehälle, ja tuolle kehälle on kiinnitetty jompikumpi kahdesta mahdollisesta suunnasta relaation *aikaisempi kuin* suunnaksi. Tästä näkökulmasta omaksumme seuraavan määritelmän. Järjestys $\langle T, < \rangle$ on *syklinen* yksinkertaisesti jos relaatio $<$ joukossa T on transitiivinen ja symmetrinen.

Relaation $<$ symmetrisyys merkitsee sitä, että jos $t < t'$, niin $t' < t$. Juuri näinhän syklisessä ajassa tuleekin olla. Jos ajankohta t' on myöhempi kuin t, niin t':sta vuorostaan päädytään t:hen, kunhan annetaan ajan riittävästi kulua. On helppoa havaita, että jos $\langle T, < \rangle$ on syklinen, on relaatio $<$ auttamatta refleksiivinen. Jos nimittäin oletetaan, että relaation $<$ määritysjoukossa olisi ajankohta t, jolle pätisi $t \not< t$, voimme johtaa ristiriidan. Koska $t \in dom(<)$, on olemassa sellainen $s \in T$, että $t < s$. Symmetrisyyden nojalla $s < t$. Siis transitiivisuuden nojalla pätee kuin päteekin $t < t$. Itse asiassa syklinen relaatio on siis *ekvivalenssirelaatio*, eli refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen kaksipaikkainen relaatio. Huomattakoon, että syklinen relaatio ei ole osittainjärjestys: koska tämä relaatio on symmetrinen, se ei ole antisymmetrinen, mikä taas on osittainjärjestyksen välttämätön ehto.

Järjestyksen $\langle T, < \rangle$ syklisyys ei suinkaan merkitse sitä, että relaatio $<$ järjestäisi, kuvaannollisesti puhuaksemme, kaikki joukon T alkiot yhden ja saman ympyrän kehälle. Itse asiassa on kyse siitä, että relaatio $<$ järjestää kaikki määritysjoukkonsa alkiot ekvivalenssiluokkiin: se siis luo yhtä monta ympyrää kuin tuolla relaatiolla $<$ on ekvivalessiluokkia. Syklisen relaation ekvivalenssiluokkia voimme kutsua *sykleiksi*.

Koska syklisyys yllä esitetyllä tavalla määriteltynä johtaa siihen, että kunkin syklin pisteet ovat suhteessa saman syklin kaikkiin pisteisiin, syntyy helposti vaikutelma, että tällaisessa analyysissa menetetään jotain sykliselle struktuurille olennaista. Mark Reynoldsin artikkelissa [15] esitetään kiinnostava vaihtoehtoinen matemaattisesti formuloitu näkökulma sykliseen aikaan.

6 Vastaavuusteoriaa

Olemme edellisessä luvussa kiinnittäneet lukijan huomion useisiin eri ominaisuuksiin, jotka voivat tulla kyseeseen aikalogiikassa käytettävien Kripke-kehysten $\langle T, < \rangle$ ominaisuuksina. Tässä viimeisessä luvussa liitämme nuo järjestysten ominaisuuksien tarkastelut aikalogiikkaan.

Sanomme, että **PTL**-kaava A on *validi kehyksessä* $\langle T, < \rangle$, jos kaikille valuaatioille $P\colon \mathbf{prop} \to \mathcal{P}(T)$ ja kaikille ajankohdille $t \in T$ pätee:

$$\langle T, <, P \rangle, t \models A.$$

Kaava $A \in \mathbf{PTL}$ on siis validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$, mikäli se on tosi minä tahansa ajankohtana missä hyvänsä mallissa, joka voidaan 'rakentaa tämän kehyksen päälle' (lisäämällä siihen komponentiksi jokin valuaatio). Sitä, että kaava A on validi kehyksessä, merkitsemme

$$\langle T, < \rangle \models A.$$

Tämän käsitteen 'validi kehyksessä' avulla saamme yhteyden useiden osittainjärjestysten ominaisuuksien ja aikalogiikan kaavojen (aksioomien tai aksioomaskeemojen)[24] välille. Modaalilogiikan osaa, jossa tutkitaan tällaisten yhteyksien olemassaoloa kutsutaan *korrespondenssiteoriaksi* tai *vastaavuusteoriaksi* (engl. *correspondence theory*).[25] Siinä on tarkoituksena tutkia eri järjestysominaisuuksien Q ja eri kaavojen A_Q kohdalla sitä, onko seuraava näiden välinen suhde voimassa:

$$\langle T, < \rangle \models A_Q \;\Leftrightarrow\; \text{relaatiolla } < \text{ on ominaisuus } Q.$$

Puhe relaation ominaisuudesta Q johtaa huomion helposti vahvempaan ehtoon kuin mikä tässä on mahdollista edellyttää, mistä syystä päädymme alempana (luvussa 6.1) tekemään tarkennuksen puheena olevaan vastaavuuden määritelmään. Ratkaiseva havainto on se, että modaalilooginen kaava, jonka validisuus näyttäisi luonnehtivan aivan ongelmattomasti kehyksen ominaisuuden — vaikkapa lineaarisuuden — ei pysty erottamaan vaihtoehtorelaation osajoukkoja, jotka ovat 'kokonaan toistensa ulkopuolella'. Palaamme tähän havaintoon pian ja täsmennämme sitä vielä. Katsotaan vastaavuusteorian peruslähtökohtaa kuitenkin ensin niin kuin se on kirjaimellisesti yllä esitetty.

Vastaavuusteoriassa lähtökohdaksi otetaan joko (i) jokin aikalooginen kaava A tai (ii) jokin mahdollinen ominaisuus Q, joka annetulla kehyksellä $\langle T, < \rangle$ voi olla. Sen jälkeen pyritään tapauksessa (i) selvittämään onko vai eikö

[24] Aksioomaskeema on aina *jonkin kaavan määräämä*. **PTL**-kaavan A määräämä aksioomaskeema on kaavaluokka, joka saadaan kaavasta A sallimalla minkä hyvänsä hyvinmuodostetun **PTL**-kaavan sijoittaminen minkä hyvänsä A:ssa esiintyvän propositiosymbolin paikalle.

[25] Korrespondenssiteoriasta tarkemmin, ks. esim. [1, 3].

ole olemassa jotakin sellaista 'mielenkiintoista' tai 'luontevaa' relaation ominaisuutta Q_A, että kaava A on validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$ jos ja vain jos kehyksen relaatiolla on ominaisuus Q_A. Tapauksessa (ii) taas kysytään onko vai eikö ole olemassa sellaista aikaloogista aksioomaa tai aksioomaskeemaa A_Q, että A_Q on validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$ jos ja vain jos kehyksen relaatiolla on annettu ominaisuus Q.

Kun eri aksioomaskeemoja tutkitaan vastaavuusteoreettisesti, paljastuu mitä asioita näiden aksioomien validina pitäminen edellyttää aikajärjestykseltä. Provosoivasti voisi siis sanoa, että (ainakin) tässä kohdin logiikka tekee ontologisia paljastuksia, tai tarkemmin: ontologiaa koskevia käsityksiä koskevia paljastuksia. Ajallisia ilmauksia sisältävien päätelmiemme pätevyys riippuu osittain siitä mitä ominaisuuksia oletamme aikastruktuurilla olevan.

Seuraavassa esitetään luettelo aikaloogisista kaavoista tai kaavaskeemoista. Perustelu sille, miksi luetellaan juuri ne kaavat kuin luetellaan, ilmenee myöhemmin.

(1)	$\mathrm{G}(p \to q) \to (\mathrm{G}p \to \mathrm{G}q)$,	$\mathrm{H}(p \to q) \to (\mathrm{H}p \to \mathrm{H}q)$,
	$p \to \mathrm{GP}p$,	$p \to \mathrm{HF}p$,
(2)	$\mathrm{FF}p \to \mathrm{F}p$,	$\mathrm{PP}p \to \mathrm{P}p$.

Kohdan (1) neljästä skeemasta kaksi ensimmäistä vastaavat tavallisen modaalilogiikan skeemaa

$$(K) \qquad \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q),$$

ensimmäinen niistä aikajärjestyksen *myöhempi kuin* kannalta, toinen taas tämän relaation käänteisrelaation *aikaisempi kuin* kannalta; aikalogiikassahan voidaan aina puhua sekä vaihtoehtorelaatiosta että sen käänteisrelaatiosta. Kolmas ja neljäs kohdan (1) skeemoista, siis skeemat $p \to \mathrm{GP}p$ ja $p \to \mathrm{HF}p$, ilmaisevat minimiehdon tulevaisuus- ja menneisyysoperaattorien vuorovaikutukselle: jos p on nyt totta, aina tulevaisuudessa pitää paikkansa että p oli totta; vastaavasti jos p on totta nykyhetkellä, on kaikkia menneitä ajankohtia kohden myöhempi ajankohta jona p on totta.

Skeemat kohdassa (2) voidaan yhtäpitävästi kirjoittaa vastaavasti muodoissa $\mathrm{G}p \to \mathrm{GG}p$ ja $\mathrm{H}p \to \mathrm{HH}p$, kuten kontrapositiosääntöä ja aikaloogisten operaattorien määritelmiä käyttämällä voi helposti todeta. Kuten jäljempänä näemme, semanttisesti kohdan (2) skeemat vastaavat vaihtoehtorelaation ja sen käänteisrelaation *transitiivisuutta.* Koska relaatio on transitiivinen jos ja vain jos sen käänteisrelaatio on transitiivinen, riittäisi tarkastella jompaakumpaa näistä skeemoista: kumpi tahansa niistä yksinään vastaa *aikaisempi kuin* -relaation transitiivisuutta.

Tarkastelemme alla ainoastaan osittainjärjestyksiä. Tällöin skeemat (1) ja (2) ovat automaattisesti voimassa; skeema (1) olisi itse asiassa voimassa vaikka kehyksen relaatio olisi mielivaltainen kaksipaikkainen relaatio. Luvussa 6.2 tarkastellaan vastaavuusteorian kannalta kaavoja, jotka on esitetty seuraavissa kohdissa (3)—(9).

(3) (a) $\mathrm{G}\bot \vee \mathrm{FG}\bot$,

(b) $\mathrm{H}\bot \vee \mathrm{PH}\bot$,

(4) (a) $\mathrm{G}p \to \mathrm{F}p$,

(b) $\mathrm{H}p \to \mathrm{P}p$,

(5) (a) $\mathrm{F}p \wedge \mathrm{F}q \to \mathrm{F}(p \wedge \mathrm{F}q) \vee \mathrm{F}(p \wedge q) \vee \mathrm{F}(\mathrm{F}p \wedge q)$,

(b) $\mathrm{P}p \wedge \mathrm{P}q \to \mathrm{P}(p \wedge \mathrm{P}q) \vee \mathrm{P}(p \wedge q) \vee \mathrm{P}(\mathrm{P}p \wedge q)$,

(6) (a) $\mathrm{F}p \to \mathrm{FF}p$,

(b) $\mathrm{P}p \to \mathrm{PP}p$,

(7) (a) $p \wedge \mathrm{H}p \to \mathrm{FH}p$,

(b) $p \wedge \mathrm{G}p \to \mathrm{PG}p$,[26]

(8) (a) $\mathrm{F}p \wedge \mathrm{FG}\neg p \to \mathrm{F}(\mathrm{HF}p \wedge \mathrm{G}\neg p)$,

(b) $\mathrm{P}p \wedge \mathrm{PH}\neg p \to \mathrm{P}(\mathrm{GP}p \wedge \mathrm{H}\neg p)$,

(9) $\mathrm{H}(\mathrm{H}p \to p) \to \mathrm{H}p$.[27]

6.1 Järjestyksen yhtenäiset komponentit

Yllä annoimme ymmärtää, että jonkinlaisia tarkennuksia olisi tehtävä kun puhutaan Kripke-kehyksessä esiintyvän vaihtoehtorelaation ominaisuuksista, joille tahdottaisiin löytää vastine jonkin aikaloogisen kaavan kehys-validisuudessa. Voimme olla tekemättä mitään tarkennuksia ja löytää tällaisia vastaavuuksia, mutta tällöin löydetyt vastaavuudet eivät aina koske sellaisia Kripke-kehyksiä, joista itse asiassa olemme kiinnostuneita.

Tarkennuksen aihe on seuraava. Yleisesti mille hyvänsä **PTL**-kaavalle A pätee, että jos A on validi sekä kehyksessä $\langle T_1, R_1\rangle$ että kehyksessä $\langle T_2, R_2\rangle$, ja jos T_1 ja T_2 ovat erilliset (eli pistevieraat eli jos pätee $T_1 \cap T_2 = \varnothing$), niin A on validi myös kehyksessä $\langle T_1 \cup T_2, R_1 \cup R_2\rangle$. Intuitiivisesti ilmaisten tämä johtuu siitä, että erillisyysoletuksen nojalla kehyksen $\langle T_1 \cup T_2, R_1 \cup R_2\rangle$

[26]Tätä kaavaparia kutsutaan toisinaan yhteisnimityksellä *Hamblinin aksioomaksi.* Charles L. Hamblin (1922-1985) oli australialainen filosofi ja tietojenkäsittelytieteilijä.

[27]Huomaa, että tämä kaava voitaisiin korvata (ehkä helpommin ymmärrettävällä) kaavalla $\mathrm{P}p \to \mathrm{P}(\mathrm{H}\neg p \wedge p)$. Kaava $\mathrm{H}(\mathrm{H}p \to p) \to \mathrm{H}p$ tunnetaan nimellä *Löbin aksiooma.* Viittaus saksalaiseen loogikkoon Martin H. Löbiin (1921-2006) juontuu ns. Löbin teoreemasta, jonka mukaan jokainen ensimmäisen kertaluvun kaava, jonka ei-loogiset symbolit ovat Peano-aritmetiikan (PA) aakkostosta, toteuttaa seuraavan ehdon: jos Peano-aritmetiikassa voidaan todistaa 'jos ϕ on todistuva, niin ϕ', niin tällöin ϕ itse on todistuva Peano-aritmetiikassa. Toisin sanoen, jos $PA \vdash (Prov(\ulcorner\phi\urcorner) \to \phi)$, niin $PA \vdash \phi$, missä $Prov(\ulcorner\phi\urcorner)$ merkitsee, että se kaava, jonka numeerinen koodi (Gödel-luku) on $\ulcorner\phi\urcorner$, on todistuva Peano-aritmetiikassa.

yksilöalueen $T_1 \cup T_2$ kummastakaan komponentista (T_1 ja T_2) ei pääse toiseen komponenttiin kumpaakaan relaatiota (R_1 ja R_2) pitkin, ja näin ollen kaavan A totuuteen (jonkin valuaation P suhteen) missä tahansa joukon T_1 pisteessä ei mitenkään voi vaikuttaa joukko T_2 eikä sen järjestys R_2; ja vastaavasti kaavan A totuuteen (jonkin valuaation P suhteen) joukon T_2 pisteissä ei vaikuta joukko T_1 eikä sen järjestys R_1.

Katsotaan miten tämä tosiseikka voidaan täsmällisesti todistaa. Määritellään ensin eräitä käsitteitä, jotka ovat jäljempänä käyttökelpoisia. Jos $\{\langle T_i, R_i\rangle \mid i < \kappa\}$ on kokoelma parittain erillisiä kehyksiä (eli jos mille hyvänsä $i, j < \kappa$, joille $i \neq j$, pätee $T_i \cap T_j = \varnothing$), tämän kokoelman *pistevieras yhdiste* on kehys

$$\biguplus \{\langle T_i, R_i\rangle \mid i < \kappa\} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \bigcup_{i<\kappa} T_i, \bigcup_{i<\kappa} R_i\rangle.$$

Jos $M = \langle T, <, P\rangle$ on aikalogiikan **PTL** malli, niin struktuuri $M' = \langle T', <', P'\rangle$ on mallin M *viritetty alimalli* (engl. *generated submodel*), mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa:

(*i*) $\langle T', <'\rangle$ on kehyksen $\langle T, <\rangle$ *alikehys*, so. T' on T:n osajoukko, ja R' on R:n rajoittuma joukkoon T' eli $R' = R \cap (T' \times T')$.

(*ii*) P' on P:n rajoittuma joukkoon T' ts. jokainen propositionaalinen atomi q toteuttaa ehdon $P'(q) = P(q) \cap T'$. (Yhdessä ehdon (*i*) kanssa tämä ehto merkitsee, että M' on mallin M alimalli.)

(*iii*) Sulkeuma relaation $<$ suhteen: Kaikille joukon T pisteille t ja s pätee:

$$\text{jos } t \in T' \text{ ja } t < s, \text{ niin } s \in T'.$$

(*iv*) Sulkeuma relaation $>$ suhteen: Kaikille joukon T pisteille t ja s pätee:

$$\text{jos } t \in T' \text{ ja } t > s, \text{ niin } s \in T'.$$

Jos on annettu kehys $\langle T, <\rangle$ ja struktuuri $\langle T', <'\rangle$ toteuttaa ylläolevista ehdoista ehdot (*i*), (*iii*) ja (*iv*), sanotaan, että $\langle T', <'\rangle$ on kehyksen $\langle T, <\rangle$ *viritetty alikehys*. Edelleen, jos M on malli ja X on sen yksilöalueen osajoukko, niin *joukon X virittämä alimalli* on pienin mallin M viritetty alimalli, jonka yksilöalue sisältää joukon X. Määrittelemme vastaavasti mitä tarkoittaa *joukon X virittämä alikehys*. Yksilöalueen *pisteen t viritämä alimalli (alikehys)* on yksinkertaisesti yksikköjoukon $\{t\}$ virittämä alimalli (alikehys).

Huomattakoon, että jos $\langle T', R'\rangle$ on pisteen $t \in T$ virittämä kehyksen $\langle T, R\rangle$ alikehys ja $t' \in T'$ on mielivaltainen, niin myös piste t' virittää tuon saman alikehyksen. (Näin ei olisi yleisen modaalilogiikan kohdalla, mutta aikalogiikassa tämä pätee koska sulkeumaehdot koskevat sekä mallin relaatiota että sen käänteisrelaatiota.) Annetun pisteen virittämän alikehyksen kaikki pisteet siis ovat sen virittäjiä. Havaitaan edelleen, että mikä tahansa malli (kehys) on itsensä alimalli (alikehys). Annetun mallin $M = \langle T, <, P\rangle$ pienin alimalli on sama kuin joukon $dom(<) \cup rng(<)$ virittämä alimalli: sen yksilöalue saadaan poistamalla mallin M yksilöalueesta T pisteet, jotka eivät kuulu kummankaan relaation $<$ ja $>$ määritysjoukkoon. Vastaavasti annetun kehyksen $M = \langle T, <\rangle$ pienin alikehys on sama kuin joukon $dom(<) \cup rng(<)$ virittämä alikehys.

Esimerkki 5. Olkoon $\langle \mathbb{N}, <\rangle$ luonnollisten lukujen joukko varustettuna tavanomaisella järjestyksellään ja olkoon $\langle \mathbb{N}', <'\rangle$ tuon kehyksen isomorfinen kopio, missä joukot $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{N}'$ ovat erilliset. Olkoot $P : \mathbf{prop} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ja $P' : \mathbf{prop} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}')$ mielivaltaisia valuaatioita. Määritellään vielä kuvaus $P'' : \mathbf{prop} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \mathbb{N}')$ seuraavasti: olipa q mikä hyvänsä propositionaalinen atomi, $P''(q) = P(q) \cup P'(q)$. Tällöin struktuuri $\langle \mathbb{N} \cup \mathbb{N}', < \cup <', P''\rangle$ on aikalogiikan malli, ja $\langle \mathbb{N}, <, P\rangle$ ja $\langle \mathbb{N}', <', P'\rangle$ ovat kummatkin tuon mallin alkioiden virittämiä alimalleja. Lisäksi ne ovat ainoat sen alkioiden virittämät alimallit. □

Esimerkki 6. Olkoot $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{N}'$ kuten Esimerkissä 5. Siis on erityisesti olemassa bijektio f joukolta $\mathbb{N}'$ joukolle $\mathbb{N}$. Määritellään järjestykset $<$ ja $<'$ vastaavasti joukoissa $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{N}'$ seuraavasti: $x < y$ joss: $y = x + 1$; ja $x <' y$ joss: $f(y) = f(x) + 1$. Tarkastellaan järjestystä $\langle \mathbb{N} \cup \mathbb{N}', \prec\rangle$, missä relaatio $\prec$ on määritelty seuraavasti: jos $x, y \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$, niin

$$x \prec y \text{ joss: } (x, y \in \mathbb{N} \text{ ja } x < y) \text{ tai } (x, y \in \mathbb{N}' \text{ ja } x <' y) \text{ tai } (x \in \mathbb{N} \text{ ja } y \in \mathbb{N}').$$

(Tämän järjestyksen järjestystyyppi on $\omega + \omega$.) Olipa $P : \mathbf{prop} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \mathbb{N}')$ mikä tahansa valuaatio, $(\mathbb{N}, <, P_1)$ ja $(\mathbb{N}', <', P_2)$ ovat mallin $(\mathbb{N} \cup \mathbb{N}', \prec, P)$ alkioiden virittämiä alimalleja, kun P_1 ja P_2 toteuttavat, jokaiselle atomille q, ehdot $P_1(q) = P(q) \cap \mathbb{N}$ ja $P_2(q) = P(q) \cap \mathbb{N}'$. Itse asiassa ne ovat ainoat tuon mallin alkioiden virittämät alimallit.

Huomattakoon, että vaikka mallissa $(\mathbb{N} \cup \mathbb{N}', \prec, P)$ kaikista joukon $\mathbb{N}$ pisteistä pääsisi *äärettömällä* askelmäärällä kaikkiin joukon $\mathbb{N}'$ pisteisiin relaatiota $\prec$ pitkin, ei joukon $\mathbb{N}$ sulkeumaehdosta relaation $\prec$ suhteen suinkaan seuraa, että joukon $\mathbb{N}'$ alkiot tulisivat mukaan joukon $\mathbb{N}$ alkion virittämään alimalliin. □

Tosiasia 3. Olkoon M aikalogiikan **PTL** malli. Jos t on sen yksilöalueen alkio, merkitään pisteen t virittämää alimallia symbolilla M_t. Tällöin mikä hyvänsä aikalogiikan kaava A ja mikä tahansa mallin M yksilöalueen alkio t toteuttavat:

$$M, t \vDash A \text{ jos ja vain jos } M_t, t \vDash A.$$

Toisin sanoin, siirtymä pisteellisen mallin (M, t) ja pisteen t virittämän pisteellisen alimallin (M_t, t) välillä ei vaikuta aikalogiikan kaavan totuuteen. (Viritetyistä alimalleista tarkemmin, ks. [4, luku 2, erit. Propositiot 2.6 ja 2.19].) □

Tosiasian 3 nojalla voimme nyt täsmällisesti perustella miksi aikalogiikan kaavan A validisuus jossakin kehyksessä $\langle T, R\rangle$ jättää täysin auki sen kuinka monta erillistä 'komponenttia' kehyksellä $\langle T, R\rangle$ on. Ensinnäkin voimme määritellä mitä tarkkaan ottaen tarkoitamme puhuessamme tuollaisista komponenteista. Annetun kehyksen $\langle T, R\rangle$ *komponentit* ovat nimenomaan sen alkioiden virittämät alikehykset. (Muistettakoon, että annetun pisteen virittämän alikehyksen kaikki pisteet ovat sen virittäjiä.) Olkoon sitten $\langle T, <\rangle$ mikä tahansa kehys, jossa aikalogiikan **PTL** kaava A on validi. Tosiasian 3 nojalla A on siten validi myös kehyksen $\langle T, <\rangle$ jokaisessa komponentissa. Kaavan validisuus kehyksessä ei siis voi luonnehtia mitään sellaista kehyksen ominaisuutta, joka koskisi yhtä useampaa kehyksen komponenttia. Jos kaava on validi jossain kehyksessä ja tuosta kehyksestä poistetaan mikä hyvänsä määrä komponentteja niin, että ainakin yksi komponentti jää jäljelle, on kaava validi tuon operaation lopputuloksessakin.

Kääntäen, jos lähdetään liikkeelle kokoelmasta parittain erillisiä kehyksiä, joissa jokin kaava A on validi, on tuo kaava validi myös niiden pistevieraassa yhdisteessä. Itse asiassa kaavan A validisuus kehyksessä $\langle T, R\rangle$ kertoo meille vain sen, että olipa tuolla kehyksellä kuinka monta komponenttia tahansa, A on validi niissä kaikissa erikseen. Toisin sanoen (i) tiedämme, että on olemassa jokin sellainen kardinaaliluku κ, että $\langle T, R\rangle$ on esitettävissä muodossa

$$\langle T, R\rangle = \biguplus \{\langle T_i, R_i\rangle \mid i < \kappa\},$$

missä jokainen $\langle T_i, R_i\rangle$ on kehyksen $\langle T, R\rangle$ komponentti; ja (ii) tiedämme, että A on validi jokaisessa näistä komponenteista. Eri komponenttien yksilöalueet ovat välttämättä pistevieraat. Tietomme kaavan A validisuuden luonnehtimasta kehyksestä $\langle T, R\rangle$ on siis melkoisesti epäspesifimpi kuin olisimme ehkä luulleet, sillä κ voi olla mikä tahansa — 'kuinka ääretön tahansa' — kardinaaliluku — sen sijasta, että se olisi luku 1.

Ei kerta kaikkiaan ole mitään sellaista aikalogiikan kaavaa, että riittäisi vaatia sen kehysvalidisuus, minkä jälkeen edellä mainittu epäspesifisyys poistuisi. Olipa A mikä tahansa kaava joka on validi jossakin kehyksessä $\langle T, <\rangle$, voidaan tähän kehykseen lisätä edellä kuvatulla tavalla kirjaimellisesti mikä tahansa määrä uusia osia ilman että kaava A 'näkee tätä muutosta', kunhan kaava on validi kaikissa näissä uusissakin komponenteissa.

Edellä kuvatulla tosiseikalla on erityisesti se seuraus, että *mikään aikalogiikan kaava ei voi kirjaimellisesti edellä esitetyssä mielessä vastata mitään* yhtenäistä *relaatiota!* Näin siksi, että erilliset osat, joita kehykseen voi lisätä ilman, että tällä on vaikutusta kaavan validisuuteen kehyksessä, tuottavat lähtökohtakehyksestä — olipa se yhtenäinen tai ei — ei-yhtenäisen kehyksen. Näin ollen mikään kaava ei voi kirjaimellisesti vastata esimerkiksi kehyksen lineaarisuutta.

Luonnehtimisen kohteeksi onkin siis erittäin luontevaa ottaa kehyksen erilliset komponentit $\langle T_i, R_i\rangle$ kehyksen $\langle T, R\rangle$ itsensä asemesta. Yleisesti luonnehdintamme ja vastaavuustuloksemme koskeavatkin nimenomaan kehyksen erillisten komponenttien ominaisuuksia. Luonnehdinta jättää aina auki näiden komponenttien lukumäärän.

6.2 Vastaavuustuloksia

Siirrytään tarkastelemaan joitain vastaavuustuloksia. Jos $\langle T, R\rangle$ on kehys ja $t \in T$, merkitään alkion t virittämää alikehystä symbolilla '$\langle T, R\rangle_t$'. Rajoitamme seuraavassa tarkastelut kehyksiin $\langle T, R\rangle$, joilla on seuraava ominaisuus $(*)$:

$(*)$ Olipa t mikä hyvänsä joukon T alkio, niin $\langle T, R\rangle = \langle T, R\rangle_t$.

Tarkastelemillemme kehyksille siis pätee, että niiden yksilöalueiden kaikki alkiot virittävät tuon kehyksen itsensä. Ominaisuuden $(*)$ omaavilla kehyksillä on siis täsmälleen yksi komponentti. Tämän ehdon vallitessa kaikki joukon T pisteet voi saavuttaa mistä hyvänsä tämän joukon pisteestä kulkemalla relaatiota R eteen tai taaksepäin jonkin äärellisen määrän kertoja (vaihtaen suuntaa äärellisen monta kertaa).

Katsotaan ensin yksityiskohtaisesti esimerkkinä vastaavuustulosten todistamisesta, että kumpikin edellä kohdassa (2)

(2) $\mathrm{FF}p \to \mathrm{F}p,$ $\mathrm{PP}p \to \mathrm{P}p$

mainituista skeemoista luonnehtii kehyksen relaation transitiivisuuden.

Väite 1. Olkoon $\langle T, <\rangle$ mielivaltainen järjestys. Tällöin $\langle T, <\rangle \vDash \mathrm{FF}p \to \mathrm{F}p$ jos ja vain jos järjestys $<$ on transitiivinen.

Todistus. Todistetaan molemmat 'jos. . . niin'-suunnat.

Implikaatio vasemmalta oikealle. Oletetaan, että $\langle T, <\rangle \vDash \mathrm{FF}p \to \mathrm{F}p$. Pitää osoittaa, että relaatio $<$ transitiivinen. Tehdään vastaoletus: $<$ ei ole transitiivinen. Siis on olemassa sellaiset pisteet $t, t', t'' \in T$, että $t < t'$ ja $t' < t''$, mutta $t \not< t''$. Koska $\langle T, <\rangle \vDash \mathrm{FF}p \to \mathrm{F}p$, pätee kaikille valuaatioille P ja kaikille pisteille $s \in T$:

$$(T, <, P), s \vDash \mathrm{FF}p \to \mathrm{F}p.$$

Olkoon erityisesti P_0 valuaatio, jolle $P_0(p) = \{t''\}$. Tällöin pätee $(T, <, P_0), t \vDash \mathrm{FF}p$, koskapa $t < t' < t''$ ja $t'' \in P_0(p)$. Toisaalta pätee myös $(T, <, P_0), t \vDash \mathrm{FF}p \to \mathrm{F}p$, mistä seuraa, että $(T, <, P_0), t \vDash \mathrm{F}p$. Näin ollen on olemassa jokin sellainen piste r, että $t < r$ ja $r \in P_0(p)$. Koska $P_0(p) = \{t''\}$, täytyy olla $r = t''$. Mutta tällöon onkin $t < t''$, mikä on ristiriita. Koska oletus ettei $<$ ole transitiivinen siis johti ristiriitaan, voimme päätellä, että relaatio $<$ itse asiassa on transitiivinen.

Implikaatio oikealta vasemmalle. Siirrytään sitten katsomaan implikaatiota toiseen suuntaan. Oletetaan, että $<$ on relaatio joukossa T ja että $<$ on transitiivinen, ja näytetään, että kaava $\mathrm{FF}p \to \mathrm{F}p$ on validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$. Olkoon P mielivaltainen valuaatio ja t mielivaltainen joukon T piste. Oletetaan, että $(T, <, P), t \vDash \mathrm{FF}p$. Siis on olemassa sellaiset pisteet $t', t'' \in T$, että $t < t' < t''$ ja $t'' \in P(p)$. Koska $<$ on transitiivinen, pätee $t < t''$ ja siis $(T, <, P), t \vDash \mathrm{F}p$. Olemme osoittaneet, että kaikille P ja t pätee: jos $(T, <, P), t \vDash \mathrm{FF}p$, niin $(T, <, P), t \vDash \mathrm{F}p$. Tästä seuraa, että kaikille P ja t pätee: $(T, <, P), t \vDash \mathrm{FF}p \to \mathrm{F}p$. Siis $(T, <) \vDash \mathrm{FF}p \to \mathrm{F}p$. ■

Väitteen 1 nojalla kaava $\mathrm{PP}p \to \mathrm{P}p$ on selvästi validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$ jos ja vain jos relaation $<$ käänteisrelaatio $>$ on transitiivinen. Koska kaksipaikkainen relaatio on transitiivinen jos ja vain jos sen käänteisrelaatio on, seuraa, että itse asiassa myös kaavan $\mathrm{PP}p \to \mathrm{P}p$ validisuus kehyksessä $\langle T, < \rangle$ luonnehtii relaation $<$ transitiivisuuden.

Siirrytään katsomaan erityisesti osittainjärjestyksiä koskevia vastaavuustuloksia. Olkoon $<$ irrefleksiivinen osittainjärjestys ja $\langle T, < \rangle$ kehys, joka toteuttaa ehdon $(*)$. Tällöin

$\langle T, < \rangle \vDash$ (3a)	$\Leftrightarrow$	jokaiselle $t \in T$ pätee, että joukolla $\{s \in T \mid t \leq s\}$ on ainakin yksi maksimaalinen alkio,
$\langle T, < \rangle \vDash$ (3b)	$\Leftrightarrow$	jokaiselle $t \in T$ pätee, että joukolla $\{s \in T \mid s \leq t\}$ on ainakin yksi minimaalinen alkio,
$\langle T, < \rangle \vDash$ (4a)	$\Leftrightarrow$	järjestyksellä $<$ ei ole maksimaalista alkiota,
$\langle T, < \rangle \vDash$ (4b)	$\Leftrightarrow$	järjestyksellä $<$ ei ole ei ole minimaalista alkiota,
$\langle T, < \rangle \vDash$ (5a) ja (5b)	$\Leftrightarrow$	$<$ on lineaarijärjestys,
$\langle T, < \rangle \vDash$ (6a)	$\Leftrightarrow$	järjestys $<$ on tiheä
	$\Leftrightarrow$	$\langle T, < \rangle \vDash$ (6b).

Lisäksi, jos $<$ on lineaarijärjestys, niin pätee:

$\langle T, < \rangle \vDash$ (7a) ja (7b)	$\Leftrightarrow$	järjestys $<$ on diskreetti,
$\langle T, < \rangle \vDash$ (8a)	$\Leftrightarrow$	järjestys $<$ on Dedekind-täydellinen
	$\Leftrightarrow$	$\langle T, < \rangle \vDash$ (8b),
$\langle T, < \rangle \vDash$ (9)	$\Leftrightarrow$	järjestys $<$ on hyvinjärjestys.

Tarkastellaan edellä mainittujen tulosten todistuksia. Kaikissa tapauksissa on todistettava ekvivalenssimuotoinen väite; tämä tapahtuu todistamalla erikseen kumpikin vastaavista implikaatioista. Melkein kaikissa tapauksissa on hyvin helppo todeta, että suunta järjestyksen $<$ ominaisuudesta kaavan validisuuteen vastaavassa kehyksessä $\langle T, < \rangle$ pätee. (Dedekind-täydellisyys muodostaa poikkeuksen.) Helpoissa tapauksissa jätämmekin nämä osat todistuksista lukijan tehtäväksi ja siirrymme osoittamaan miten kussakin tapauksessa ekvivalenssin toinen suunta todistetaan.

Aluksi havaitsemme, että seuraavien neljän väitteen kohdalla ekvivalenssin molemmat suunnat ovat täysin ilmeisiä:

$\langle T, < \rangle \models \mathrm{G}\bot \vee \mathrm{FG}\bot$	$\Leftrightarrow$	jokaiselle $t \in T$ pätee, että joukolla $\{s \in T \mid t \leq s\}$ on ainakin yksi maksimaalinen alkio,
$\langle T, < \rangle \models \mathrm{H}\bot \vee \mathrm{PH}\bot$	$\Leftrightarrow$	jokaiselle $t \in T$ pätee, että joukolla $\{s \in T \mid s \leq t\}$ on ainakin yksi minimaalinen alkio,
$\langle T, < \rangle \models \mathrm{G}p \to \mathrm{F}p$	$\Leftrightarrow$	järjestyksellä $<$ ei ole maksimaalista alkiota,
$\langle T, < \rangle \models \mathrm{H}p \to \mathrm{P}p$	$\Leftrightarrow$	järjestyksellä $<$ ei ole ei ole minimaalista alkiota.

Tässä yhteydessä on syytä panna merkille, että kaavan

$$\mathrm{G}\bot \vee \mathrm{FG}\bot \tag{3a}$$

validisuus kehyksessä $\langle T, < \rangle$ *ei* suinkaan merkitse, että 'ajalla olisi välttämättä loppu'. Seuraava kehys $\langle T, \prec \rangle$ tarjoaa vastaesimerkin: joukko T sisältää nollasta poikkeavat kokonaisluvut, $T = \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. Relaatio $\prec$ on määritelty seuraavasti: jos $m, n \in \mathbb{N}$, niin $m \prec n$ mikäli $m < n$. Lisäksi, jos $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, niin $m \prec -m$. Muissa tapauksissa joukon T alkiot eivät ole suhteessa $\prec$ toisiinsa. Helposti havaitaan, että kaava (3a) on validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$. Jokaisesta pisteesä nimittäin päästään maksimaaliseen alkioon (joko jo ollaan sellaisessa, tai sellaiseen voidaan siirtyä yhden askeleen kautta relaatiota $\prec$ pitkin). Toisaalta kehyksen haaralla $1 \prec 2 \prec \ldots$ nimenomaan ei ole viimeistä alkiota. Analoginen havainto voidaan tehdä kaavasta $\mathrm{H}\bot \vee \mathrm{PH}\bot$, eli kaavasta (3b).

Siirrytään sitten katsomaan muita väitteitä; niiden osalta todistus vaatii jonkin verran työtä. Teemme tämän työn kirjoittamalla auki kulloinkin todistettavan väitteen, minkä jälkeen esitämme itse todistuksen. Kaikissa tapauksissa oletamme, että tarkasteltavan kehyksen relaatio on irrefleksiivinen osittainjärjestys ja että kehyksellä on ominaisuus $(*)$, mistä syystä emme erikseen mainitse näitä seikkoja muotoillessamme todistettavia väitteitä.

Väite 2. Jos $\langle T, < \rangle \models$ (5a) ja (5b), niin $<$ on lineaarijärjestys.

Todistus. Todistamme, että kaavan

$$\mathrm{F}p \wedge \mathrm{F}q \to \mathrm{F}(p \wedge \mathrm{F}q) \vee \mathrm{F}(p \wedge q) \vee \mathrm{F}(\mathrm{F}p \wedge q) \tag{5a}$$

validisuus kehyksessä $\langle T, < \rangle$ takaa, että relaatio $<$ on lineaarinen oikealle ja että kaavan

$$\mathrm{P}p \wedge \mathrm{P}q \to \mathrm{P}(p \wedge \mathrm{P}q) \vee \mathrm{P}(p \wedge q) \vee \mathrm{P}(\mathrm{P}p \wedge q) \tag{5b}$$

validisuus kehyksessä $\langle T, < \rangle$ taas takaa sen, että relaatio $<$ on lineaarinen vasemmalle. Tästä seuraa, että relaatio $<$ on pisteittäin lineaarinen, mistä puolestaan seuraa — sen nojalla että kehyksellä $\langle T, < \rangle$ on vain yksi komponentti — että itse asiassa relaatio $<$ on lineaarijärjestys.

Todistetaan ensin lineaarisuus oikealle. Koska $\langle T, < \rangle$ on osittainjärjestys, riittää näyttää, että mitkä hyvänsä pisteet s ja s' minkä hyvansä pisteen $t \in T$ tulevaisuudessa ovat vertailukelpoiset relaation $<$ suhteen. Olkoot siis t, s ja s' mielivaltaisia pisteitä, jotka toteuttavat ehdon $t < s$ ja $t < s'$. Osoitetaan että joko $s = s'$ tai $s < s'$ tai $s' < s$.

Oletuksemme nojalla kaava (5a) on validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$. Tämä merkitsee sitä, että olipa P mikä hyvänsä valuaatio ja t mikä tahansa joukon T piste, on kaava (5a) totta mallin $\langle T, <, P \rangle$ pisteessä t. Voimme siis valita aivan minkä tahansa valuaation ja mielivaltaisen pisteen, ja kaavamme on tosi näin spesifioidussa pisteellisessä mallissa.

Määritellään valuaatio P_0 seuraavasti: $P_0(p) = \{s\}, P_0(q) = \{s'\}$. (Muiden propositiosymbolien kuin p:n ja q:n osalta P saa olla millainen tahansa.) Merkitään $M = \langle T, <, P_0 \rangle$. Konstruktiomme nojalla pätee $M, t \vDash \mathrm{F}p \wedge \mathrm{F}q$, mistä skeeman (5a) nojalla saadaan

$$M, t \vDash \mathrm{F}(p \wedge \mathrm{F}q) \vee \mathrm{F}(p \wedge q) \vee \mathrm{F}(\mathrm{F}p \wedge q).$$

Siispä joko **(a)** on olemassa $r > t$, jolle $M, r \vDash p$, ja lisäksi on olemassa $r' > r$, jolle $M, r' \vDash q$; tai **(b)** on olemassa $r > t$, jolle $M, r \vDash p \wedge q$; tai **(c)** on olemassa $r > t$, jolle $M, r \vDash q$, ja edelleen on olemassa $r' > r$, jolle $M, r' \vDash p$.

Palautettakoon mieleen, että konstruktiomme nojalla p on mallissa M tosi täsmälleen pisteessä s ja q on mallissa M tosi täsmälleen pisteessä s'. Näin ollen voimme yllä olevasta disjunktiivisesta ehdosta lukea seuraavaa: joko $s < s'$ tai $s = s'$ tai $s' < s$. Siis s ja s' ovat vertailukelpoiset. Koska t, s ja s' oletettiin mielivaltaisiksi, voimme päätellä, että $<$ on lineaarinen oikealle. Lineaarisuus vasemmalle todistetaan täysin analogisesti, käyttäen skeemaa (5b). ■

Väite 3. Jos $\langle T, < \rangle \vDash$ (6a), niin järjestys $<$ on tiheä.

Todistus. Olkoot t ja t' mielivaltaiset joukon T pisteet, jotka toteuttavat ehdon $t < t'$. Määritellään valuaatio P_0 seuraavasti: $P_0(p) = \{t'\}$. Tarkastellaan mallia $M = \langle T, <, P_0 \rangle$.

Konstruktiomme nojalla $M, t \vDash \mathrm{F}p$. Tällöin kaavan (6a) nojalla pätee, että $M, t \vDash \mathrm{FF}p$. Toisin sanoen, on olemassa sellaiset alkiot s_1 ja s_2 että

$$t < s_1 < s_2 \quad \text{ja} \quad M, s_2 \vDash p.$$

Koska $P_0(p) = \{t'\}$, täytyy olla $s_2 = t'$, joten on olemassa alkio $s := s_1$, jolle

$$t < s < t'.$$

Koska oletimme t:n ja t':n mielivaltaisiksi, voimme päätellä järjestyksen $<$ olevan tiheä. ■

Väitteen 3 nojalla skeema (6b) on selvästikin validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$ jos ja vain jos relaation $<$ käänteisrelaatio $>$ on tiheä. Koska kaksipaikkainen relaatio on tiheä jos ja vain jos sen käänteisrelaatio on tiheä, on ehto $\langle T, < \rangle \vDash$ (6a) itse asiassa yhtäpitävä ehdon $\langle T, < \rangle \vDash$ (6b) kanssa.

Seuraavien väitteiden kohdalla emme tarkastele mielivaltasia ehdon $(*)$ toteuttavia irrefleksiivisiä osittainjärjestyksiä, vaan rajoitumme *lineaarijärjestyksiin*.

Väite 4. Olkoon $<$ lineaarijärjestys. Jos $\langle T, < \rangle \vDash$ (7a) ja (7b), niin järjestys $<$ on diskreetti.

Todistus. Oletetaan, että $<$ on lineaarijärjestys. Näytetään, että kaavan

(7a) $$p \wedge \mathrm{H}p \to \mathrm{FH}p$$

validisuus kehyksessä $\langle T, < \rangle$ takaa, että jokaisella joukon T alkiolla on välitön seuraaja relaation $<$ suhteen, ja että kaavan

(7b) $$p \wedge \mathrm{G}p \to \mathrm{PG}p$$

validisuus kehyksessä $\langle T, < \rangle$ takaa sen, että jokaisella joukon T alkiolla on välitön edeltäjä relaation $<$ suhteen. Tästä seuraa määritelmän nojalla, että relaatio $<$ on diskreetti.

Olkoon $t \in T$ mielivaltainen. Määritellään valuaatio P_0 näin:

$$P_0(p) = \{\, x \mid x < t \ \vee \ x = t \,\}.$$

Tarkastellaan mallia $M = \langle T, <, P_0 \rangle$. Mallin M määritelmän nojalla $M, t \vDash p \wedge \mathrm{H}p$. Koska skeema (7a) on validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$, pätee siis $M, t \vDash \mathrm{FH}p$. On siis sellainen $s > t$, että kaikille ehdon $r < s$ toteuttaville pisteille r pätee: $M, r \vDash p$. (Tässä havaitsemme, että tarkasteltavan kaavan validisuus kehyksessä $\langle T, < \rangle$ ei mahdollista sitä, että joukolla T olisi maksimi relaation $<$ suhteen — kuten diskreetin järjestyksen kohdalla tulee ollakin.)

Jos nyt pisteellä t *ei* olisi välitöntä seuraajaa, olisi t:n jokaisen seuraajan — erityisesti edellä maintun alkion s — ja t:n itsensä välissä alkioita. Edellä todetun nojalla kaikille tuollaisille pisteille u, jotka toteuttavat ehdon $t < u < s$, pätisi $M, u \vDash p$. Mutta tämä on mahdotonta, koska valuaation P_0 määritelmän nojalla t on myöhäisin ajankohta, jona p on tosi. Siispä t:llä täytyy olla välitön seuraaja. Järjestyksen $<$ diskreettisyys vasemmalle todistetaan vastaavasti, käyttäen skeemaa (7b). ■

Huomattakoon, että jos relaation $<$ lineaarisuusvaatimuksesta luovutaan, ei skeeman (7a) kehysvalidisuus riitä luonnehtimaan relaation $<$ diskreettisyyttä oikealle, eikä skeeman (7b) kehysvalidisuus sen diskreettisyyttä vasemmalle. Seuraavassa on esimerkki ei-lineaarisesta kehyksestä $\langle T, \prec \rangle$, jossa kaava (7a) on validi, mutta joka ei ole diskreetti oikealle. Olkoon T

joukko $\mathbb{Z} \cup \{ \frac{1}{n} \mid n \geq 2 \}$. Järjestys $\prec$ haarautuu pisteessä 0 kahteen haaraan. Toisessa haarassa ovat yksinkertaisesti luonnolliset luvut tavanomaisessa järjestyksessään. Toisessa haarassa taas ovat luvut $\frac{1}{n}$ (missä $n \geq 2$) ja kaikki negatiiviset kokonaisluvut, seuraavasti järjestyneinä:

$$0 \prec \ldots \prec \tfrac{1}{4} \prec \tfrac{1}{3} \prec \tfrac{1}{2} \prec -1 \prec -2 \prec \ldots.$$

Tässä toisessa haarassa siis on pisteitä mielivaltaisen lähellä pistettä 0, kun taas ensinmainitussa haarassa pisteellä 0 on välitön seuraaja, nimittäin piste 1. Helposti havaitaan, että pistettä 0 lukuunottamatta kaikilla pisteillä kummassakin haarassa on välitön seuraaja. Nyt kaava $(p \wedge \mathrm{H}p) \rightarrow \mathrm{FH}p$ on validi kehyksessä $(T, \prec)$. Itse asiassa tämä kaava on validi missä tahansa sellaisessa kehyksessä, jossa jokaisella pisteellä on *ainakin yksi välitön seuraaja*. Sen validisuudelle kehyksessä siis riittää, että yhdessä kustakin pisteessä lähtevässä haarassa on välitön seuraaja — mahdollisissa muissa haaroissa välitöntä seuraajaa ei tarvitse olla.

Tarkastellaan seuraavaksi väitettä, jonka mukaan kaava (8a) luonnehtii lineaarijärjestyksen Dedekind-täydellisyyden. Tässä tapauksessa kumpikaan todistettavan ekvivalenssin suunnista ei ole aivan ilmeinen.

Väite 5. Oletetaan, että $<$ on lineaarijärjestys. Jos järjestys $<$ on Dedekind-täydellinen, niin $\langle T, < \rangle \vDash$ (8a).

Todistus. Otaksutaan, että $<$ on Dedekind-täydellinen. Olkoon P mielivaltainen valuaatio ja t mikä tahansa joukon T piste. Tarkastellaan mallia $M = \langle T, <, P \rangle$. Oletetaan, että $M, t \vDash \mathrm{F}p \wedge \mathrm{FG}\neg p$. Tahdomme osoittaa, että tällöin $M, t \vDash \mathrm{F}(\mathrm{HF}p \wedge \mathrm{G}\neg p)$. Oletuksen nojalla pistettä t myöhempien ja atomin p toteuttavien pisteiden joukko $S =$

$$\{ x \in T \mid t < x \ \text{ ja } \ x \in P(p) \}$$

on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu.[28] Koska $<$ on Dedekind-täydellinen ja S on joukon T ylhäältä rajoitettu epätyhjä osajoukko, on joukolla S supremum $\sup(S)$ joukossa T. Osoittaaksemme, että

$$M, t \models \mathrm{F}(\mathrm{HF}p \wedge \mathrm{G}\neg p),$$

tarkastelemme kahta tapausta: **(a)** atomi p on tosi pisteessä $\sup(S)$; ja **(b)** atomi p ei ole tosi pisteessä $\sup(S)$.

Aloitetaan tapauksesta **(a)**, jolloin siis $\sup(S) \in S$. Tällöin kaava $\mathrm{HF}p \wedge \mathrm{G}\neg p$ on tosi pisteessä $\sup(S)$. Vasen konjunkti on tosi pisteessä $\sup(S)$ nimenomaan koska p on tosi pisteessä $\sup(S)$, ja oikea konjunkti taas on tosi joukon

[28]Joukko on epätyhjä koska kaava $\mathrm{F}p$ on totta mallin M pisteessä t; ja se on ylhäältä rajoitettu, koska kaava $\mathrm{FG}\neg p$ on totta mallin M pisteessä t ja siis kaava $\mathrm{G}\neg p$ on totta jossain pisteessä $s > t$. Jos tuo piste s on järjestyksen $<$ maksimi, niin s kyseisen joukon yläraja; muutoin on olemassa pisteitä $s' > s$ jotka ovat kyseisen joukon ylärajoja.

S määritelmän nojalla. Koska $t < \sup(S)$, on siis kaava $\mathrm{F}(\mathrm{HF}p \wedge \mathrm{G}\neg p)$ tosi pisteessä t. Katsotaan sitten tapausta **(b)**, jolloin $\sup(S) \notin S$. Väitämme, että tällöinkin kaava $\mathrm{HF}p \wedge \mathrm{G}\neg p$ on tosi pisteessä $\sup(S)$. Se ei toki nyt voi olla tosi tuossa pisteessä 'samasta syystä' kuin tapauksessa **(a)**. Oikea konjunkti on taaskin tosi pisteessä $\sup(S)$ suoraan joukon S määritelmän nojalla. Osoittaaksemme, että vasen konjunkti on tosi pisteessä $\sup(S)$, on meidän näytettävä, että olipa s mikä hyvänsä piste, joka toteuttaa ehdon $s < \sup(S)$, on olemassa sellainen piste r, että $s < r < \sup(S)$ ja $M, r \vDash p$. Jos näin ei olisi, niin olisi olemassa myöhäisin pistettä $\sup(S)$ aiempi ajankohta t^+, jona atomi p olisi tosi. Mutta tällöin t^+ olisi pistettä $\sup(S)$ pienempi joukon S yläraja. Tämä on mahdotonta. Siispä myös vasen konjunkti on tosi pisteessä $\sup(S)$, ja voimme päätellä, että kaava $\mathrm{F}(\mathrm{HF}p \wedge \mathrm{G}\neg p)$ tosi pisteessä t. ■

Siirrytään sitten katsomaan ekvivalenssin toista suuntaa.

Väite 6. Oletetaan, että $<$ on lineaarijärjestys. Jos $\langle T, <\rangle \vDash$ (8a), niin järjestys $<$ on Dedekind-täydellinen.

Todistus. Oletetaan, että kaava $\mathrm{F}p \wedge \mathrm{FG}\neg p \rightarrow \mathrm{F}(\mathrm{HF}p \wedge \mathrm{G}\neg p)$ on validi kehyksessä $\langle T, <\rangle$, ja osoitetaan, että jokaisella joukon T epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla osajoukolla on supremum.

Olkoon S joukon T mielivaltainen epätyhjä, ylhäältä rajoitettu osajoukko. Jos joukolla S on maksimi $\max_<(S)$ relaation $<$ suhteen, on $\max_<(S) = \sup_<(S)$ eikä mitään todistettavaa ole. Oletetaan siis ettei joukolla S ole maksimia relaation $<$ suhteen.

Olkoon t jokin joukon S alkio (muistettakoon, että joukko S on epätyhjä), ja olkoon $t' > t$ jokin joukon S yläraja. Koska joukolla S ei ole maksimia, mitä hyvänsä joukon S alkiota s kohden on olemassa sellainen joukon S alkio s', että ehto $s < s' < t'$ on voimassa. Olkoon sitten P_0 mikä hyvänsä sellainen valuaatio, joka tekee atomin p todeksi täsmälleen joukon S pisteissä: $P_0(p) = S$. Tarkastellaan mallia $M = \langle T, <, P_0\rangle$.

Havaitaan, että $M, t \vDash \mathrm{F}p \wedge \mathrm{FG}\neg p$. Vasen konjunkti on tosi pisteessä t, koska joukossa on pistettä t myöhempiä pisteitä, ja p on tosi kaikissa näissä pisteissä valuaation P_0 mukaan. Oikea konjunkti taas on tosi pisteessä t, koska p ei ole tosi missään pistettä $t' > t$ myöhemmässä pisteessä. (Tämä taasen johtuu joko siitä, että t' on koko joukon T maksimi relaation $<$ suhteen, tai siitä, että atomi p ei ole tosi missään pistettä t' myöhemmässä pisteessä valuaation P_0 mukaan.) Koska oletuksen nojalla $\mathrm{F}p \wedge \mathrm{FG}\neg p \rightarrow \mathrm{F}(\mathrm{HF}p \wedge \mathrm{G}\neg p)$ on validi kehyksessä $(T, <)$, seuraa, että

$$M, t \vDash \mathrm{F}(\mathrm{HF}p \wedge \mathrm{G}\neg p).$$

Siispä on olemassa piste $s^+ > t$ jossa kaava $\mathrm{HF}p \wedge \mathrm{G}\neg p$ on tosi. Itse asiassa tuo piste s^+ on joukon S supremum relaation $<$ suhteen. Todetaksemme, että näin on, havaitsemme ensinnäkin, että s^+ on joukon S yläraja: mikään myöhempi piste ei toteuta atomia p valuaation P_0 mukaan, joten siis kaikille joukon S pisteille s pätee $s \leq s^+$. Oletetaan sitten, että joukolla S olisi pistettä s^+ pienempi yläraja, $s^{++} < s^+$, ja johdetaan ristiriita. Koska kaava H Fp on tosi pisteesä s^+, kaava Fp on tosi pisteessä s^{++}, mistä seuraa ettei s^{++} olekaan S joukon yläraja. (Sillä tällöin on oltava jokin pistettä s^{++} myöhempi piste jona p on tosi, ja tuollainen piste kuuluu joukkoon S.)

Koska oletimme joukon S olevan joukon T mielivaltainen epätyhjä, ylhäältä rajoitettu osajoukko, voimme päätellä järjestyksen $<$ olevan Dedekind-täydellinen. ■

Lineaarijärjestyksen kaikilla epätyhjillä ylhäältä rajoitetuilla osajoukoilla on supremum jos ja vain jos sen kaikilla epätyhjillä alhaalta rajoitetuilla osajoukoilla on infimum. Täysin analogisesti Väitteen 6 todistukselle voidaan näyttää, että skeema (8b) luonnehtii kehyksen $\langle T, < \rangle$ ominaisuuden 'kaikilla joukon T epätyhjillä alhaalta rajoitetuilla osajoukoilla on infimum relaation $<$ suhteen', mikä siis on yhtäpitävä skeeman (8a) luonnehtiman ehdon kanssa. Edelleen, on itse asiassa helppo nähdä, että skeema (8b) on validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$ jos ja vain jos relaation $<$ käänteisrelaatio $>$ on Dedekind-täydellinen. Koska kaksipaikkainen relaatio on Dedekind-täydellinen jos ja vain jos sen käänteisrelaatio on Dedekind-täydellinen, seuraa jo tällä perusteella, että ehto $\langle T, < \rangle \vDash$ (8a) on yhtäpitävä ehdon $\langle T, < \rangle \vDash$ (8b) kanssa.

Tarkastellaan lopuksi vielä hyvinjärjestysominaisuuden luonnehtimista.

Väite 7. Oletetaan, että $\langle T, < \rangle$ on lineaarijärjestys. Tällöin pätee: jos $\langle T, < \rangle \vDash$ (9), niin järjestys $<$ on hyvinjärjestys.

Todistus. Todetaan ensin, että kaava (9),

$$\mathrm{H}(\mathrm{H}p \to p) \to \mathrm{H}p,$$

on validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$ jos ja vain jos kaava $\mathrm{P}p \to \mathrm{P}(\mathrm{H}\neg p \wedge p)$ on validi tuossa kehyksessä.[29] Käytämme tätä jälkimmäistä kaavaa todistuksessamme.

Tahdomme osoittaa, että $<$ on hyvinjärjestys. Oletetaan, ettei se ole, ja johdetaan ristiriita. Oletamme siis, että joukolla T on epätyhjä osajoukko S, jolla ei ole pienintä alkiota relaation $<$ suhteen. Jos joukossa S olisi vain yksi alkio, olisi tuo alkio joukon S minimi. Joukossa S täytyy siis olla ainakin kaksi alkiota. (Itse asiassa joukon S on oltava ääretön, koska joka tapauksessa relaatio $<$ järjestää S:n alkiot lineaarisesti, ja äärellisellä lineaarijärjestyksellä

[29] Ensinnäkin kaava (9) voidaan kontrapositiosääntöä soveltamalla kirjoittaa yhtäpitävään muotoon $\mathrm{P}\neg p \to \mathrm{P}(\mathrm{H}p \wedge \neg p)$. Toisaalta, jos A' on saatu kaavasta A korvaamalla kaavassa A jokainen atomi p negaatiollaan $\neg p$, ja jokainen atomin negaatio $\neg p$ vastaavalla atomilla p, niin pätee: A on validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$ jos ja vain jos A' on validi kehyksessä $\langle T, < \rangle$. Siispä kaava (9) on validi annetussa kehyksessä jos ja vain jos kaava $\mathrm{P}p \to \mathrm{P}(\mathrm{H}\neg p \wedge p)$ on.

on aina pienin alkio.) Olkoot sitten t_1 ja t_2 joukon S kaksi alkiota, jotka toteuttavat ehdon $t_1 < t_2$.

Määritellään valuaatio P_0 seuraavasti: $P_0(p) = S$, ja tarkastellaan mallia $M = \langle T, <, P_0 \rangle$. Konstruktion nojalla pätee: $M, t_2 \vDash Pp$. Koska $M \vDash \mathrm{P}p \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{H}\neg p \wedge p)$, voimme päätellä, että $M, t_2 \vDash \mathrm{P}(\mathrm{H}\neg p \wedge p)$. On siis olemassa piste $s < t_2$, joka toteuttaa ehdon $M, s \vDash \mathrm{H}\neg p \wedge p$. Koska siis p on tosi pisteessä s, kuuluu piste s joukkoon S. Toisaalta, koska $\mathrm{H}\neg p$ on tosi pisteessä s, ei p ole tosi missään aiemmassa pisteessä valuaation P_0 mukaan. Koska $S = P_0(p)$, on s itse asiassa joukon S pienin alkio, mikä on mahdotonta. Koska näin on johdettu ristiriita oletuksesta, ettei joukolla T ole minimiä, voimme päätellä, että itse asiassa sillä on minimi. Koska joukon S oletettiin olevan joukon T mielivatainen epätyhjä osajoukko, olemme todistaneet, että kaikilla T:n epätyhjillä osajoukoilla on pienin alkio. ■

Kirjallisuutta

[1] Johan van Benthem (1985): *Modal Logic and Classical Logic*, Bibliopolis, Napoli.

[2] Johan van Benthem (1988): *A Manual of Intensional Logic* (second edition), CSLI, Stanford.

[3] Johan van Benthem (2001): "Correspondence Theory" teoksessa D. Gabbay & F. Guenthner (toim.): *Handbook of Philosophical Logic, 2nd edition, Volume 3*, Kluwer, ss. 325–408; aiempi versio ilmestynyt vuonna 1984 teoksessa D. Gabbay & F. Guenthner (toim.): *Handbook of Philosophical Logic, Vol. II*, Reidel, ss. 167–247.

[4] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke & Yde Venema (2002): *Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Patrick Blackburn (2006): "Arthur Prior and Hybrid Logic", *Synthese* 150, ss. 329–72.

[6] John P. Burgess (2002): "Basic Tense Logic" teoksessa D. Gabbay & F. Guenthner (toim.): *Handbook of Philosophical Logic, 2nd edition, Volume 7*, Kluwer, ss. 1–42; aiempi versio ilmestynyt vuonna 1984 teoksessa D. Gabbay & F. Guenthner (toim.): *Handbook of Philosophical Logic, Vol. II*, Reidel, ss. 89–133.

[7] Marcelo Finger, Dov M. Gabbay & Mark Reynolds (2002): "Advanced Tense Logic" teoksessa D. Gabbay & F. Guenthner (toim.): *Handbook of Philosophical Logic, 2nd edition, Volume 7*, Kluwer, ss. 43–203.

[8] Dov. M. Gabbay, Ian Hodkinson & Mark Reynolds (1994): *Temporal Logic, Volume 1*, Oxford University Press, Oxford.

[9] James W. Garson (2001): ”Quantification in Modal Logic” teoksessa D. Gabbay & F. Guenthner (toim.): *Handbook of Philosophical Logic, 2nd edition, Volume 3*, Kluwer, ss. 267–323; aiempi versio ilmestynyt vuonna 1984 teoksessa D. Gabbay & F. Guenthner (toim.): *Handbook of Philosophical Logic, Vol. II*, Reidel, ss. 249–307.

[10] Ian Hodkinson (1995): “Expressive completeness of Until and Since over dedekind complete linear time” teoksessa A. Ponse, M. de Rijke & Y. Venema (toim.): *Modal logic and process algebra*, CSLI Lecture Notes 53, ss. 171–85.

[11] Norbert Hornstein (1981): “The Study of Meaning in Natural Language: Three Approaches to Tense”teoksessa N. Hornstein & D. Lightfoot (toim.): *Explanation in Linguistics – The Logical Problem of Language Acquisition*, Longman, New York.

[12] Norbert Hornstein (1990): *As Time Goes By. Tense and Universal Grammar*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

[13] Johan Anthony Willem [Hans] Kamp (1968): *Tense Logic and the Theory of Linear Order*, väitöskirja, University of California, Los Angeles.

[14] Hans Kamp & Uwe Reyle (1993): *From Discourse to Logic. Introduction to Modeltheoretic Semantics of Natural Language, Formal Logic and Discourse Representation Theory* Part 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[15] Mark Reynolds (1994) ”Axiomatisation and Decidability of F and P in Cyclical Time”, *Journal of Philosophical Logic* 23, ss. 197–224.

[16] Arthur Prior (1967): *Past, Present and Future*, Oxford University Press, Oxford.

[17] Willard Van Orman Quine (1960): *Word and Object*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[18] Willard Van Orman Quine (1970): *Philosophy of Logic*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.

[19] Tero Tulenheimo (2004): ”Aikamuotojen loogisesta esittämisestä”, *Puhe ja Kieli – Tal och Språk*, 24(3), ss. 145-58.