Deonttisesta logiikasta

Heikki-Pekka Innala, Veikko Rantala, Ari Virtanen

7. helmikuuta 2004

Deonttinen logiikka on laajasti ymmärrettynä normatiivisen kielenkäytön loogista tutkimista. Sen kohteena ovat sellaiset normatiiviset käsitteet kuin velvollisuuden, kiellon, luvan ja velvoituksen (commitment) käsitteet (ks. Ågvist). Siinä tarkastellaan seuraavanlaisia operaattoreita:

P: 'on sallittua, että. . . ' ('it is **p**ermissible that. . . ');

O: 'on pakollista, että. . . ' ('it is **o**bligatory that. . . ');

F: 'on kiellettyä, että. . . '. ('it is **f**orbidden that. . . ');

Muotoa $\mathbf{P}A$, $\mathbf{O}A$ ja $\mathbf{F}A$ olevat lauseet voidaan lukea useammalla tavalla. Jos A on vaikkapa 'Pekka postittaa kirjeen', niin ilmaisun $\mathbf{P}A$ suora käännös olisi: ”on sallittua, että Pekka postittaa kirjeen”, joka on kuitenkin luonnollisen kielen ilmaisuna kömpelö ja voidaankin korvata vaikkapa lauseella ”Pekka saa postittaa kirjeen”. Vastaavasti ilmaisu $\mathbf{O}A$ voidaan lukea: ”Pekan täytyy postittaa kirje” tai ”Pekan velvollisuus on postittaa kirje” ja ilmaus $\mathbf{F}A$ vaikkapa seuraavasti: ”Pekka ei saa postittaa kirjettä.”

Leibniz ja jo häntä ennen keskiajan loogikot huomasivat, että normatiiviset käsitteet ”velvollisuus” ja ”lupa” ovat analogisia modaalikäsitteiden ”välttämättömyys” ja ”mahdollisuus” kanssa siinä mielessä, että luvallista on se, minkä kielto ei ole velvollisuus, ja mahdollista on se, minkä kielto ei ole välttämätöntä. von Wright kehitteli ensimmäistä deonttisen logiikan systeemiään tämän analogian pohjalta. Modaalilogiikassa määrittelimme $\Diamond A \stackrel{\text{def}}{=} \neg\Box\neg A$ ja vastaavasti siis voimme määritellä $\mathbf{P}A \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathbf{O}\neg A$.[1] Ilmaus 'on kiellettyä, että. . . ' on analoginen ilmauksen 'on mahdotonta, että. . . ' kanssa. Emme määritelleet mitään omaa merkintää modaalilogiikassa mahdottomuuden käsitteelle, vaan totesimme, että se, että jokin on mahdotonta, on sama asia kuin että se ei ole mahdollista tai yhtä hyvin, että sen kielto on välttämätöntä. Analogisesti voimme määritellä, että $\mathbf{F}A \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathbf{P}A$ tai $\mathbf{F}A \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{O}\neg A$.

Modernin deonttisen logiikan tutkimukseen on ratkaisevasti vaikuttanut von Wrightin kirjoitus *Deontic Logic* vuodelta 1951. Hän esitti deonttisen logiikan systeeminsä aksiomaattisen tradition mukaisesti. Aksiomaattisessa lähestymistavassa annetaan joukko *aksioomia* ja *päättelysääntöjä*, joiden avulla aksioomista johdetaan *teoreemoja*. Nämä johdot esitetään formaaleina todistuksina. von Wright valitsi[2] perusoperaattoriksi operaattorin **P** ja asetti lauselogiikan periaatteiden lisäksi aksioomiksi sellaisia deonttisen logiikan periaatteita kuin että

$$(W1) \qquad \mathbf{P}p \vee \mathbf{P}\neg p$$

[1]Tässä suhteessa episteeminen logiikka poikkeaa yleisestä modaalilogiikasta, sillä ei ole mitään yksinkertaista luonnollisen kielen ilmausta, joka tarkoittaisi samaa kuin että ”ei tiedetä, ettei. . . ” tai ”ei uskota, ettei. . . ”.

[2]Alunperin von Wright ajatteli, että operaattori ”**P**” ei operoi lauseisiin, vaan ”tekotyyppeihin” (generic acts). Tämä aiheuttaa muutoksia kaavojen lukutapaan, ja lisäksi tässä tulkinnassa ei ole mielekästä iteroida operaattoreita: koska $\mathbf{P}p$ ei tarkoita mitään tekoa, iteroitu ilmaus $\mathbf{PP}p$ ei ole sallittu. (ks. Føllesdal, Hilpinen: Deontic Logic, An Introduction, teoksessa Hilpinen toim. Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings, ss. 1–35, 1970).

(on sallittua, että p tai on sallittua, että $\neg p$; eli ei voi olla niin, että sekä teon tekeminen että tekemättä jättäminen olisivat kiellettyä) ja

$$(W2) \qquad \mathbf{P}(p \vee q) \leftrightarrow \mathbf{P}p \vee \mathbf{P}q$$

('p tai q' on sallittua, jos ja vain jos p on sallittua tai q on sallittua). Lisäksi von Wrightin systeemissä oli käytössä modaalilogiikan päättelysäännön (RE) vastine

$$(RE_W) \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{\mathbf{P}A \leftrightarrow \mathbf{P}B}.$$

Koska esimerkiksi kaavat $p \wedge q$ ja $q \wedge p$ ovat loogisesti ekvivalentit, niin tämän päättelysäännön mukaisesti on sallittua, että $p \wedge q$, jos ja vain jos on sallittua, että $q \wedge p$ (ks. kuitenkin harjoitustehtävä 3).

Puhdas aksiomaattinen metodi ei huomioi semantiikkaa, vaan ainoa viittaus semantiikkaan aksiomaattisissa systeemeissä on se "mystinen" relaatio, joka liittää toisiinsa systeemin teoreemat ja niiden lukutavat luonnollisessa kielessä (Merril Provence Hintikka käytti tälle nimitystä "miraculous translation"). Intuitiomme ei usein kuitenkaan riitä adekvaatin loogisen systeemin konstruoimiseen pelkästään aksioomien ja päättelysääntöjen avulla. Vaikka esimerkiksi aksioomat ja päättelysäännöt vaikuttaisivatkin uskottavilta, emme ehkä huomaa kaikkia niiden seurauksia eli siis teoreemoja. Jotkut näistä seurauksista voivat olla epäintuitiivisia (ja joka tapauksessa pelkkää aksiomaattista menetelmää käyttäen ei yleensä ole mahdollista osoittaa, että jokin väite *ei ole* systeemin teoreema). Mahdollisten maailmojen semantiikka onkin suuresti laajentanut logiikan sovellusmahdollisuuksia filosofisissa analyyseissä. Yleisesti voimme erottaa loogisissa systeemeissä neljä puolta:

(1) *Syntaksi*, sisältäen sekä tarkasteltavan (formaalin) kielen kaavanmuodostussäännöt että formaaleja todistuksia koskevat muotosäännöt.

(2) Syntaksin *tulkinta* luonnollisessa kielessä eli tarkasteltavan kielen kaavojen lukutavat luonnollisessa kielessä.

(3) *Semantiikka* eli tarkasteltavan kielen formaali tulkinta (yleensä joukko-opin avulla konstruoitavissa struktuureissa).

(4) *Intuitiivinen semantiikka* eli formaalin semantiikan intuitiivinen tulkinta.

Esimerkki 1. Lauselogiikassa konjunktiota koskee lauseen muodostussääntö: jos A ja B ovat kaavoja, niin $A \wedge B$. Tämä siis kuuluu kohdan (1) mukaiseen syntaksiin. Syntaksiin kuuluu myös päättelysääntö

$$\frac{A \wedge B}{A}.$$

Kohtaan (2) kuuluu kaavan $A \wedge B$ lukutapa "A ja B". Yllä esitetty päättelysääntö voidaan ilmaista nyt luonnollisessa kielessä seuraavasti: "oletuksista A ja B voi päätellä, että A".

Formaali semantiikka saadaan nyt esimerkiksi määrittelemällä konnektiivin $\wedge$ totuustaulu. Sen intuitiivinen tulkinta on, että kaava 'A ja B' on tosi, jos sekä A että B ovat tosia, ja muuten se on epätosi.

Pelkkä kohdan (1) mukainen syntaktinen lähestymistapa tuottaa tulkitsemattoman kalkyylin, jolla ei sinänsä ole filosofista merkitystä. Yhdistämällä syntaksiin sen kaavojen tulkinta luonnollisessa kielessä voidaan kuitenkin aloittaa filosofisen logiikan tutkimus: Valitaan ensin tutkittavat filosofiset käsitteet ja muodostetaan formaali kieli, jossa näillä käsitteillä on vastineensa. Esitetään sitten tässä kielessä näitä käsitteitä koskevia intuitiivisesti uskottavia periaatteita vastaavia aksioomia ja päättelysääntöjä, sekä johdetaan formaalisti näiden seurauksia. Kun sitten tulkitaan, mitä nämä seuraukset tarkoittavat lähtökohtana olleiden käsitteiden kannalta, voidaan arvioida kuinka onnistunut systeemi on saatu aikaiseksi. Mutta vasta semantiikan ja erityisesti sen kohdan (4) mukaisen intuitiivisen tulkinnan mukaanotto tekee tästä tutkimuksesta filosofisesti relevanttia.

Aleettiselle modaalilogiikalle analoginen mahdollisten maailmojen semantiikka deonttiselle logiikalle saadaan, kun tulkitaan operaattori $\mathbf{P}$ deonttiseksi mahdollisuudeksi ja $\mathbf{O}$ deonttiseksi välttämättömyydeksi (ja määritellään operaattori $\mathbf{F}$ esimerkiksi operaattorin $\mathbf{O}$ avulla). Puhutaankin *deonttisesti mahdollisista maailmoista* ja *deonttisista vaihtoehdoista*. Lause $\mathbf{P}A$ on intuitiivisesti tosi eli A on sallittu maailmassa w, jos se on yhteensopiva maailman w normien kanssa eli tosi ainakin jossakin maailman w deonttisessa vaihtoehdossa. Vastaavasti $\mathbf{O}A$ on tosi eli A on pakollinen maailmassa w, jos se on tosi kaikissa maailman deonttisissa vaihtoehdoissa eli jos se on tosi kaikissa maailmoissa, jotka ovat yhteensopivia w:n normien kanssa. Kun W on deonttisesti mahdollisten maailmojen joukko ja vaihtoehtorelaatio R määrää kunkin maailman deonttiset vaihtoehdot, niin näiden operaattoreiden totuusehdot ovat siis seuraavat:

$$w \vDash \mathbf{P}A \Leftrightarrow w' \vDash A \text{ jollekin } w' \in W, \text{jolle } wRw';$$
$$w \vDash \mathbf{O}A \Leftrightarrow w' \vDash A \text{ kaikille } w' \in W, \text{joille } wRw'.$$

Näistä määritelmistä seuraa, että operaattoreiden $\mathbf{O}A$ ja $\mathbf{P}A$ välillä on samanlainen suhde kuin operaattoreiden $\Box$ ja $\Diamond$ välillä:

$$w \vDash \mathbf{P}A \leftrightarrow \neg\mathbf{O}\neg A,$$
$$w \vDash \mathbf{O}A \leftrightarrow \neg\mathbf{P}\neg A.$$

Käytettävä semantiikka siis sallii operaattoreiden $\mathbf{O}$ ja $\mathbf{P}$ määrittelyn toistensa avulla.

Formaalisti Kripke-semantiikka deonttiselle logiikalle on täysin samanlainen kuin Kripke-semantiikka modaaliselle logiikalle. Intuitiivisesti on kuitenkin selvää, että näiden logiikkojen yhteydessä on syytä asettaa erilaisia vaatimuksia vaihtoehtorelaatiolle R. Olkoon w_0 aktuaalinen maailma. Jos A on välttämättä tosi maailmassa w_0, niin välttämättömyyden tavanmukaisen tulkinnan mukaan sen on oltava tosi erityisesti maailmassa w_0 eli on oltava voimassa $w_0 \vDash \Box A \rightarrow A$. Tämä taas edellyttää, että vaihtoehtorelaatio R on sellainen, että $w_0 R w_0$. Tässä tarkastelimme tilannetta aktuaalisen maailman näkökulmasta, mutta voimme ajatella, että se, mikä on aktuaalien maailma, vaihtelee, ja saamme silloin mallin tasolla vaatimuksen, että relaation R on oltava refleksiivinen (eli $\forall w \in W\colon wRw$). Mutta me ihmiset emme yleensä tee kaikkea sitä, mitä meidän pitäisi tehdä, joten deonttisessa logiikassa on oltava mahdollista myös se, että $w_0 \not\models \mathbf{O}A \to A$ ja relaation R refleksiivisyyttä ei ole syytä vaatia (ks. myös harjoitustehtävä 9).

Kaiken sen, mikä on pakollista, on oltava tietenkin sallittua (muuten olisi kovin vaikeata noudattaa mitään moraaliperiaatteita). Tätä vastaa se, että $w_0 \models \mathbf{O}A \to \mathbf{P}A$. Tämä taas on voimassa, jos on olemassa sellaisia maailmoja, jotka ovat relaatiossa maailman w_0 kanssa (harjoitustehtävä 10). Mallin tasolla tämä vastaa vaatimusta $\forall w \in W \colon \exists w' \in W \colon wRw'$. Tällaiselle relaatiolle ei ole vakiintunut suomen kielessä omaa nimitystä, mutta englannin kielessä käytetään nimitystä ”serial relation”, joten voimme kutsua tällaista relaatiota *seriaaliseksi* (tai sarjalliseksi).

Mitä muita ehtoja vaihtoehtorelaatiolle deonttisessa logiikassa pitäisi sitten asettaa? Annetun maailman w deonttiset vaihtoehdot u ymmärretään deonttisesti täydellisiksi (ts. ideaalisiksi) maailmoiksi. Hintikan mukaan u on deonttisesti täydellinen suhteessa maailmaan w, jos ainakin seuraavat ehdot toteutuvat:

(H1) Kaikki, mikä on w:ssä pakollista, on aktuaalista u:ssa.

(H2) Kaikki, mikä on u:ssa pakollista, on myös aktuaalista u:ssa.

(H3) Kaikki mikä on pakollista w:ssä, on pakollista myös u:ssa.

Ehto (H1) on Kripke-semantiikassa automaattisesti voimassa, kunhan wRu. Ehto (H2) tarkoittaa, että maailmassa u on voimassa $u \models \mathbf{O}A \to A$. Tämä taas edellyttää, että uRu. Mallin tasolla tämä ehto voidaan esittää eräänlaisena ehdollisena refleksiivisyytenä: $\forall u \colon \big((\exists w \in W : wRu\big) \to uRu)$. Tällaista relaatiota kutsutaan *melkein refleksiiviseksi*. Tällöin siis $u \models \mathbf{O}A \to A$ aina, kun wRu, joten $w \models \mathbf{O}(\mathbf{O}A \to A)$. Koska aktuaalisen maailman w_0 ei tarvitse olla millekään maailmalle deonttinen vaihtoehto, niin melkein refleksiivisyys ei edellytä, että $w_0 R w_0$ (ks. harjoitustehtävä 12).

Tarkastellaan vielä Hintikan ehtoa (H3). Sen mukaan siis jos wRu ja $w \models \mathbf{O}A$, niin myös $u \models \mathbf{O}A$. Mutta jälkimmäinen ehto tarkoittaa tässä tilanteessa samaa kuin että $w \models \mathbf{OO}A$. Täten ehdosta (H3) seuraa, että

$$w \models \mathbf{O}A \to \mathbf{OO}A.$$

Tunnetusti relaation R transitiivisuus vastaa modaalilogiikassa kaavan $\Box A \to \Box\Box A$ validisutta, joten ehto (H3) vastaa deonttisen vaihtorelaation transitiivisuutta.

Yllä olevan perusteella voi vaatia, että deonttisen vaihtoehtorelaation pitää olla seriaalinen, melkein refleksiivinen (muttei refleksiivinen) ja ehkä myös transitiivinen. Entä sitten symmetrisyys? Intuitiivisesti ei tunnu uskottavalla, että jos esimerkiksi u on aktuaalisen maailman deonttinen vaihtoehto, niin aktuaalinen maailma on u:lle deonttinen vaihtoehto. Tiedämme, että modaalilogiikassa vaihtoehtorelaation symmetrisyys vastaa kaavan $A \to \Box\Diamond A$ validisuutta. Deonttisessa logiikassa se tuntuu melko ”moraalittomalta” periaatteelta (harjoitustehtävä 14).

Tarkastelemme vielä yhtä ominaisuutta, joka saatettaisiin asettaa deonttiselle vaihtoehtorelaatiolle eli *euklidisuutta*. Tämä ehto sanoo, että

$$\forall w, w_1, w_2 \colon wRw_1 \text{ ja } wRw_2 \Rightarrow w_1 R w_2.$$

Jos wRw_1, niin voimme sanoa myös "wRw_1 ja wRw_1", jolloin euklidisuusehdon etulause on tosi, ja täten myös jälkilauseen, joka nyt on w_1Rw_1, pitää olla tosi. Euklidisuusehdossa etulause on yhtäpitävä lauseen wRw_2 ja wRw_1 kanssa, joten on oltava voimassa myös w_2Rw_1. Yhteenvetona voidaan todeta, että jos relaatio R on euklidinen ja wRw_1 ja wRw_2, niin myös w_1Rw_1, w_2Rw_2, w_1Rw_2 ja w_2Rw_1. Harjoitustehtävässä 15 pyydetään piirtämään tämänkaltainen kuvio ja osoittamaan, että maailmassa w on tosi kaava $\Diamond\Box A \to \Box A$. Voidaan todistaa, että tämä kaava on validi kaikissa Kripke-malleissa, joissa vaihtoehtorelaatio on euklidinen. Sen deonttinen vastine $\mathbf{PO}A \to \mathbf{O}A$ ei tunnu kovin uskottavalta. Vaikka normatiivinen systeemimme sallisikin sen, että A asetetaan velvollisuudeksi, niin tästä ei mitenkään välittömästi seuraa, että A todella on velvollisuus tässä normatiivisessa systeemissä. Jätämme harjoitustehtäväksi 16 sen pohtimisen, että onko euklidisuus kuitenkin deonttisen logiikan intuitiivisen semantiikan näkökulmasta mielekäs ehto.

Luonnehdimme seuraavaksi syntaktisesti deonttisen logiikan systeemejä huomioiden kuitenkin edellä esitetyt semanttiset tarkastelut. Koska käytettävänä semantiikkana on Kripke-semantiikka, pitää kaikkien tämän semantiikan mukaisten periaatteiden olla voimassa. *Normaali deonttisen logiikan systeemi* on sellainen systeemi, jossa on käytössä ainakin seuraavat aksioomat ja päättelysäännöt:

Aksioomat

(PC) $\quad A$, jos A on tautologia,

(K) $\quad \mathbf{O}(p \to q) \to (\mathbf{O}p \to \mathbf{O}q)$.

Päättelysäännöt

(MP) $$\frac{A,\ A \to B}{B},$$

(RN) $$\frac{A}{\mathbf{O}A}, \quad \text{jos } A \text{ on teoreema.}$$

(US) $$\frac{A}{A[p/B]}, \quad A \text{ on teoreema, } B \text{ kaava.}$$

Lisäksi määritellään, että $\mathbf{P}A \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathbf{O}\neg A$ (vaihtoehtoisesti voisi asettaa vastaavan ekvivalenssin aksioomaksi).

Universaalia substituutiosääntöä (US) (eli muodon säilyttävää substituutiota) ei tarvitse eksplisiittisesti mainita, jos luonnehdimme systeemiin kuuluvia kaavoja *skeemojen* avulla. Esimerkiksi se, että skeema

$$\mathbf{O}(A \to B) \to (\mathbf{O}A \to \mathbf{O}B)$$

kuuluu systeemiin, tarkoittaa, että kaikki sen *instanssit* eli kaikki objektikielen kaavat, jotka saadaan sijoittamalla tässä skeemassa A:n ja B:n paikalle mitkä tahansa kaavat, kuuluvat systeemiin. Kun kaikki systeemiin kuuluvat kaavat on esitetty tällaisten skeemojen avulla, universaali substituutiosääntö on automaattisesti voimassa. Tästä syystä tällä kurssilla ei aikaisemmin ole esitetty sääntöä (US). Logiikan opiskelijan on hyvä olla kuitenkin perillä tämän säännön merkityksestä, joten käsittelemme sitä tässä hieman tarkemmin.

Aloitamme merkinnän "$A[p/B]$" tarkastelulla. Olkoon A kaava, jossa mahdollisesti esiintyy lausemuuttuja p. Tällöin voidaan merkitä $A = A[p]$. Jos B on kaava, niin $A[p/B]$ tarkoittaa kaavaa, joka saadaan kaavasta A korvaamalla siinä jokainen lausemuuttujan p esiintymä kaavalla B. Jos esimerkiksi $A[p] = p \vee \neg p$ ja B on jokin kaava, niin $A[p/B] = B \vee \neg B$. Jos p ei esiinny kaavassa A, sijoitus on tyhjä ja saadaan kaava A itse.

Esimerkki 2. Olkoon $A = p \vee (q \wedge \neg p)$. Tällöin

$$\begin{aligned} A[p/r] &= r \vee (q \wedge \neg r), \\ A[r/p] &= A \quad (\text{koska } r \text{ ei esiinny kaavassa } A), \\ A[p/q \vee \neg q] &= (q \vee \neg q) \vee \big(q \wedge \neg(q \vee \neg q)\big). \end{aligned}$$

Voidaan myös merkitä $A[p, q] = p \vee (q \wedge \neg p)$, jolloin esimerkiksi $A[p/q, q/p] = q \vee (p \wedge \neg q)$ ja $A[p/B, q/C] = B \vee (C \wedge \neg B)$.

Tarkastelemissamme logiikoissa se, onko jokin kaava A teoreema vai ei, riippuu vain kaavan A loogisesta muodosta, ei esimerkiksi siitä, mitä kirjaimia on satuttu käyttämään siinä esiintyville atomikaavoille. Kun asetamme aksioomaksi kaavan (K) $\mathbf{O}(p \to q) \to (\mathbf{O}p \to \mathbf{O}q)$, niin säännön US perusteella mikä tahansa muotoa

$$\mathbf{O}(A \to B) \to (\mathbf{O}A \to \mathbf{O}B)$$

oleva kaava on teoreema.

Universaalia päättelysääntöä saa soveltaa vain teoreemoihin (joita aksioomatkin triviaalisti ovat), ei mihin tahansa oletuksiin. Koska $p \vee \neg p$ on (esimerkiksi lauselogiikan) teoreema, niin myös $q \vee \neg q$ on teoreema ja yleisemmin mikä tahansa muotoa $A \vee \neg A$ oleva kaava on teoreema. Mutta jos oletetaan, että p, niin ei tietenkään voida päätellä, että q. Tilanne on sama kuin säännön (RN) yhteydessä modaalilogiikassa. Sen mukaan voimme päätellä, että $\Box(p \vee \neg p)$, mutta emme voi päätellä, että jos p (on tosi), niin $\Box p$ (eli p on välttämättä tosi).

Heikoin normaali deonttinen systeemi, jolle käytetään merkintää OK, ei sisällä mitään muita aksioomia kuin lauselogiikan tautologiat ja aksiooman (K). Muut normaalit deonttiset logiikat saadaan siitä lisäämällä siihen tarpeelliseksi katsottuja periaatteita, esimerkiksi yksi tai useampi alla olevista aksioomista (olemme kertauksen vuoksi merkinneet sulkuihin kutakin aksiooma vastaavan semanttisen ehdon):

(OD)	$\mathbf{O}p \to \mathbf{P}p$	R seriaalinen
($O4$)	$\mathbf{O}p \to \mathbf{O}\mathbf{O}p$	R transitiivinen
($O5$)	$\mathbf{P}\mathbf{O}p \to \mathbf{O}p$	R euklidinen
(OT)	$\mathbf{O}(\mathbf{O}p \to p)$	R melkein refleksiivinen

Useimmat deonttisen logiikan tutkijat ottavat perussysteemiksi systeemin SDL, joka saadaan lisäämällä heikoimpaan systeemiin OK aksiooma (OD). Semanttisesti tämä tarkoittaa, että deonttisen logiikan Kripke-semantiikassa edellytetään vaihtoehtorelaation olevan aina seriaalinen. Usein tämän lisäksi otetaan aksioomaksi vielä (OT), jolloin siis oletetaan, että vaihtoehtorelaatio on seriaalisuuden lisäksi melkein refleksiivinen

Osoitamme seuraavaksi, että normaaleissa deonttisen logiikan systeemeissä aksioomasta (OT) seuraa teoreemana $\mathbf{OO}p \to \mathbf{O}p$. Oletetaan siis, että

$$\mathbf{O}(\mathbf{O}p \to p). \tag{1}$$

Saamme universaalilla substituutiolla aksioomasta (K) teoreeman

$$\big(\mathbf{O}(p \to q) \to (\mathbf{O}p \to \mathbf{O}q)\big)[p/\mathbf{O}p, q/p] =$$

$$\mathbf{O}(\mathbf{O}p \to p) \to (\mathbf{OO}p \to \mathbf{O}p). \tag{2}$$

Päättelysäännön modes ponens (MP) perusteella kohdista (1) ja (2) seuraa

$$\mathbf{OO}p \to \mathbf{O}p. \tag{4}$$

Tämän saman johtopäätöksen voi tehdä myös semanttisella päättelyllä, ks. harjoitustehtävä 17.

Modaalilogiikan yhteydestä tiedämme, että systeemissä OK on johdettavissa von Wrightin esittämä päättelysääntö

$$\frac{A \leftrightarrow B}{\mathbf{P}A \leftrightarrow \mathbf{P}B}. \tag{RE_W}$$

Tämä päättelysääntö on voimassa myös kun operaattorin $\mathbf{P}$ tilalla on operaattori $\mathbf{O}$. Harjoitustehtävissä 18–22 on hahmoteltu (ks. myös tehtävä 11), miten voidaan osoittaa myös von Wrightin asettamien periaatteiden $W1$ ja $W2$ olevan voimassa normaaleissa deonttisissa logiikoissa.

On esitetty, että deonttinen logiikka voitaisiin palauttaa modaalilogiikkaan ymmärtämällä velvollisuuden käsite sopivalla tavalla. Emme tässä käsittele näitä reduktioyrityksiä (ks. niistä luentomuistiinpanot), vaan siirrymme tarkastelemaan deonttisia paradokseja.

Deonttisia paradokseja

Kripke-semantiikkaan pohjautuvat deonttisen logiikan systeemit ovat suhteellisen yksinkertaisia. Toisaalta tilanteet, joissa pitäisi soveltaa moraaliperiaatteita (eli deonttiset tilanteet), ovat yleensä monimutkaisia. On siis odotettavissa, että samoin kuin episteemisessä logiikassa, Kripke-semantiikan käyttö johtaa ”paradokseihin” myös deonttisessa logiikassa. Käytämme lainausmerkkejä, sillä nytkään ei ole kysymys mistään sen kaltaisista joukko-opin paradokseista (antinomeista) kuin esimerkiksi

Russelin paradoksi, joka osoittaa tiettyjen oletusten johtavan suoranaiseen loogiseen ristiriitaan joukko-opissa.

Deonttisen logiikan paradoksit voidaan nähdä deonttisten tilanteiden oikeata formalisointia koskevina ongelmina. Niitä on kahta tyyppiä:

I intuitiivisesti pätevä deonttinen päättely ei olekaan validi formalisoidussa systeemissä;

II formaalisti validi päättely on intuitiivisesti epäuskottava.

Deonttiset paradoksit voivat siis osoittaa puutteita formaaleissa systeemeissä ja näin johtaa parannuksiin. Olkoon *NDL* luonnollisessa kielessä muotoiltujen intuitiivisesti pätevien deonttisten lauseiden (tai argumenttien) joukko, ja edustakoon f "käännösfunktiota" (tai "käännösrelaatiota", sillä käännös ei välttämättä ole yksikäsitteinen), jonka avulla luonnollisen kielen ilmaukset formalisoidaan. Merkitään $\vdash A$, jos (formaalin kielen) kaava A on tarkastelemamme systeemin teoreema, ja $\nvdash A$, jos näin ei ole. I tyypin paradoksi edustaa tapausta (ks. Åqvist)

$$A \in NDL \qquad \text{ja} \qquad \nvdash f(A)$$

ja II tyypin paradoksi tapausta

$$A \notin NDL \qquad \text{ja} \qquad \vdash f(A)$$

(tässä A on siis luonnollisen kielen lause; selvyyden vuoksi sitä voisi merkitä esim. kreikkalaisella kirjaimella α). Nämä tapaukset voidaan luonnehtia myös semanttisesti (kuten yllä sanallisesti teimme), sillä ns. täydellisyyslauseen perusteella $\vdash A$, jos ja vain jos $\vDash A$.

Ratkaisuiksi paradokseihin voimme tyypin I paradokseissa pyrkiä parantamaan luonnollisen kielen ilmauksen A formalisointia, tyypin II paradokseissa taasen pyrkiä osoittamaan, että tarkemmin analysoituna A sittenkin intuitiivisesti kuuluisi joukkoon *NDL*.

Esimerkki 3 (von Wright, 1968). Jos on sallittua, että A tai B, niin intuitiivisesti tuntuu luonnolliselta, että on sallittua sekä A että B. Jos esimerkiksi henkilölle sanotaan, että 'saat työskennellä tai rentoutua', tarkoitetaan tavallisesti, että on henkilön oma asia valita vaihtoehtojen välillä eli että hänellä on lupa työskennellä ja lupa rentoutua. Tämän periaatteen formaali vastine

$$\mathbf{P}(A \vee B) \rightarrow \mathbf{P}A \wedge \mathbf{P}B,$$

ei kuitenkaan ole validi Kripke-semantiikassa (harjoitustehtävä 23) eikä se ole siten myöskään esimerkiksi systeemin *OK* teoreema (ks. kuitenkin harjoitustehtävä 24).

Tässä on kyse siis I tyypin paradoksista, jossa intuitiivisesti pätevän lauseen formaali vastine ei ole validi. Yksi ratkaisu tähän paradoksiin olisi väittää, että muotoa "on sallittua, että A tai B" ("free choise permission") olevan luonnollisen kielen oikea formalisointi onkin $\mathbf{P}(A \wedge B)$, eikä $\mathbf{P}(A \vee B)$. Nythän kaava

$$\mathbf{P}(A \wedge B) \rightarrow \mathbf{P}A \wedge \mathbf{P}B,$$

on validi Kripke-semantiikassa (harjoitustehtävä 25).

Esimerkki 4 (Ross, 1941). Rossin paradoksi syntyy, kun päättelysääntöä

$$(RM) \qquad \frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}.$$

sovelletaan deonttiseen logiikkaan. Intuitiivisesti tämän päättelysäännön mukaan jokainen pakollisen (tai vast. sallitun) asiantilan looginen seuraus on myös pakollinen (vast. sallittu) asiaintila (vrt. harjoitustehtävä 18). Jos esimerkiksi A viittaa lauseeseen 'Maija postittaa kirjeen' ja B lauseeseen 'Maija polttaa (tämän) kirjeen', niin sovellettaessa tätä päättelysääntöä saadaan lauselogiikan tautologiasta $A \to A \vee B$ pääteltyä johtopäätös

$$\mathbf{O}A \to \mathbf{O}(A \vee B).$$

Tämä tarkoittaisi intuitiivisesti sitä, että jos Maijan velvollisuus on postittaa kirja, niin hänen velvollisuutensa on myös postittaa tai polttaa se.

Kyse on nyt II tyypin paradoksista. Tässä voisimme yrittää keksiä erilaisia selityksiä, miksi saatu väite ei kuitenkaan olisikaan intuition vastainen. Ensinnäkin voi todeta, että siitä, että Maijan velvollisuus on postittaa tai polttaa kirje, ei seuraa, että hänen velvollisuutensa on polttaa kirje, ja vasta tämä seuraus olisi paradoksaalinen. Voimme ajatelle, että kielenkäyttöön liittyvät pragmaattiset seikat saavat saadun väitteen tuntumaan epäuskottavalta ja tämä ilmenee jo tavallisen lauselogiikankin yhteydessä. Henkilö, joka sateessa sanoo: "sataa tai Kuu on juustoa", ei valehtele, mutta hän käyttää kieltä harhaanjohtavalla tavalla antamalla ymmärtää, että hänellä on jokin kanta siihen, mitä ainetta Kuu on, vaikka hänellä onkin mielessään vain tautologia 'jos sataa, niin sataa tai Kuu on juustoa'. Lukija voi itse yrittää keksiä tällaisia enemmän tai vähemmän toimivia puolustuksia säännölle (RM) deonttisen logiikan yhteydessä käytettynä.

Tarkastellaan lausetta "jos Pekka lainaa Maijalta auton, hän on velvollinen palauttamaan sen". On kaksi mahdollisuutta formalisoida tämä lause; puoliformaalisti esitettynä vaihtoehdot ovat

$$\text{'Pekka lainaa Maijan auton'} \to \mathbf{O}\text{'Pekka palauttaa Maijan auton'}$$

ja

$$\mathbf{O}(\text{'Pekka lainaa Maijan auton'} \to \text{'Pekka palauttaa Maijan auton'})$$

Yleisesti meillä on käytössä *ehdollinen velvollisuuden* "p velvoittaa q:n" esittämiseen vaihtoehdot $p \to \mathbf{O}q$ ja $\mathbf{O}(p \to q)$. Alla on esitetty (Prior, 1954, "the paradoxes of derived obligation") ehdollisia velvollisuuksia koskevia "paradokseja":

$Pa \qquad \neg p \to (p \to \mathbf{O}q),$

$Pb \qquad \mathbf{O}q \to (p \to \mathbf{O}q),$

$Pc \qquad \mathbf{O}\neg p \to \mathbf{O}(p \to q),$

$Pd \qquad \mathbf{O}q \to \mathbf{O}(p \to q).$

Nämä kaavat ovat sinänsä varsin yksinkertaisia ja on helppo havaita ne valideiksi. Kaavojen Pa ja Pb validisuus seuraa jo lauselogiikasta, sillä ne ovat tautologioita. Jos niitä pidetään paradoksaalisina, niin kyse on paremminkin ns. materiaalisen implikaation paradokseista kuin deonttisista paradokseista.

Kaava Pc on validi, sillä jos $M, w \models \mathbf{O}\neg p$, niin aina, kun wRu, niin $M, u \not\models p$ ja täten $M, u \models p \to q$. Siis $M, w \models \mathbf{O}(p \to q)$. Vastaavaan tyyliin voidaan myös kaava Pd osoittaa validiksi (harjoitustehtävä 26).

Saamme näistä kaavoista luonnollisella kielellä esitettynä seuraavanlaiset esimerkit:

(Pa) Oletetaan, että et jätä 4. 4. 02 logiikan luentoa väliin ($\neg p$). Tässä tilanteessa on tällöin totta, että jos jätät logiikan luennot 4. 4. 02 väliin, olet velvollinen lukemaan kaikki deonttisen logiikan oppikirjat ($p \to \mathbf{O}q$).

(Pb) Oletetaan, että velvollisuutesi on auttaa ystäviäsi ($\mathbf{O}q$). Tällöin on totta, jos ystäväsi aikovat vilppiä käyttäen suorittaa logiikan jatkokurssin, velvollisuutesi on auttaa heitä ($p \to \mathbf{O}q$).

(Pc) Oletetaan, että velvollisuutesi on, että et valehtele ($\mathbf{O}\neg p$). Tällöin se, että valehtelet velvoittaa sinut omistamaan loppuelämäsi etiikan tutkimiseen ($\mathbf{O}(p \to q)$).

(Pd) Oletetaan, että velvollisuutesi on puhua totta ($\mathbf{O}q$). Tällöin se, että valehtelemalla jossain tilanteessa saattaisit pelastaa jonkun hengen velvoittaa sinut puhumaan totta $\mathbf{O}(p \to q)$.

Kaikissa neljässä lauseessa kyse on II tyypin paradokseista, joissa validit kaavat eivät ole intuitiivisesti uskottavia. Jälleen voisi olla hyväksymättä tässä esitettyjen luonnollisten kielten väitteiden vastineiksi Priorin paradoksin formalisointeja. Kohtaamme kuitenkin nämä samat paradoksit seuraavaksi käsiteltävän Chisholmin paradoksin (Chisholm, *Contrary-to-duty-imperatives and deontic logic*, Analysis 24, 1963) yhteydessä. Tämän paradoksin voi katsoa osoittavan, että tässä esitelty deonttisen logiikan kieli ja sen semantiikka ei riitä ainakaan silloin, kun halutaan tarkastella ehdollisia velvoitteita.

Chisholmin paradoksi

Tarkastellaan tilannetta, jota voidaan kuvailla seuraavasti:

(1) On olemassa ensisijainen ehdollistamaton velvollisuus p.

(2) On olemassa ensisijainen ehdollinen velvollisuus ”p velvoittaa q:n”

(3) On olemassa toissijainen ehdollinen velvollisuus ”$\neg p$ velvoittaa $\neg q$:n” (contrary-to-duty-obligation)

(4) ensijainen velvollisuus p on epätosi

Annamme yhden englanninkielisen esimerkin tämän yleisen kuvauksen mukaisesta tilanteesta ja jätämme lukijalle harjoitustehtäväksi muotoilla sopiva suomenkielinen esimerkki (harjoitustehtävä 27):

A_1: *It ought to be that Mary buys a train ticket to visit her grandmother*

A_2: *It ought to be that if Mary buys the ticket she calls to tell her she is coming*

A_3: *If Mary does not buy the ticket it ought to be that she not tell her that she is coming*

A_4: *Mary does not buy the ticket*

Intuitiivisesti yllä olevilla esimerkkilauseilla A_1, A_2, A_3 ja A_4 on seuraavat ominaisuudet (vrt. harjoitustehtävä 28)

1. Ne ovat konsistentit eli ne kaikki voivat olla tosia samanaikaisesti
2. Ne ovat loogisesti riippumattomia eli mikään kolmen lauseen yhdistelmä ei loogisesti implikoi neljättä (esimerkiksi lauseista A_2, A_3 ja A_4 ei seuraa lausetta A_1).

Havainnollistamme vielä konsistenttisuuden ja riippumattomuuden käsitteitä parilla esimerkillä (ks. myös harjoitustehtävä 29):

Esimerkki 5. Tarkastellaan lauseita

B_1: 'sataa'

B_2: 'en kastu'

B_3: 'jos sataa, kastun'

Tällöin lausejoukot $\{B_1, B_2\}$, $\{B_1, B_3\}$ ja $\{B_2, B_3\}$ ovat kaikki konsistentteja, mutta kaikkien kolmen lauseen muodosta joukko $\{B_1, B_2, B_3\}$ ei ole konsistentti, sillä jos B_1 ja B_3 ovat tosia, niin B_2 on pakostakin epätosi.

Esimerkki 6. Lauseet

C_1: 'sataa'

C_2: 'jos sataa, käytän sateenvarjoa'

C_3: 'käytän sateenvarjoa'

ovat konsistentteja, sillä ne kaikki ovat tosia, jos sataa ja käytän sateenvarjoa. Ne eivät ole loogisesti riippumattomia, sillä lauseista C_1 ja C_2 seuraa loogisesti lause C_3.

Chisholmin paradoksissa lähtökohtana olevat luonnollisen kielen lauseet ovat konsistentteja ja riippumattomia, mutta niiden formaaleilla vastineilla tässä esitellyssä deonttisen logiikan kielessä puuttuu ainakin toinen näistä ominaisuuksista. Lähdemme nyt tutkimaan tätä. Oletamme, että käytettävä deonttinen logiikka on ainakin yhtä vahva kuin *SDL* eli aksioomaksi on asetettu ainakin (OD).

On selvää, että lause A_1 on käännettävä muotoon $\mathbf{O}p$ ja lause A_4 muotoon $\neg p$. Lauseelle A_2 on kaksi käännösvaihtoehtoa, $\mathbf{O}(p \to q)$ ja $p \to \mathbf{O}q$, samoin kuin lauseelle A_3 löytyy vastineet $\mathbf{O}(\neg p \to \neg q)$ ja $\neg p \to \mathbf{O}\neg q$. Kun f merkitsee käännösfunktiota, niin meillä on neljä erilaista käännösyhdistelmää $\mathbf{O}p$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $\neg p$:

$A.$	$1a.$	$\mathbf{O}p$	$B.$	$1b.$	$\mathbf{O}p$
	$2a.$	$\mathbf{O}(p \to q)$		$2b.$	$p \to \mathbf{O}q$
	$3a.$	$\mathbf{O}(\neg p \to \neg q)$		$3b.$	$\neg p \to \mathbf{O}\neg q$
	$4a.$	$\neg p$		$4b.$	$\neg p$
$C.$	$1c.$	$\mathbf{O}p$	$D.$	$1d.$	$\mathbf{O}p$
	$2c.$	$\mathbf{O}(p \to q)$		$2d.$	$p \to \mathbf{O}q$
	$3c.$	$\neg p \to \mathbf{O}\neg q$		$3d.$	$\mathbf{O}(\neg p \to \neg q)$
	$4c.$	$\neg p$		$4d.$	$\neg p$

Käännösvaihtoehdot A, B ja D eivät säilytä riippumattomuutta: Priorin paradoksien yhteydessä totesimme lauseen $Pc = \mathbf{O}\neg p \to \mathbf{O}(p \to q)$ olevan validi. Kun siinä sijoitetaan p:n paikalle $\neg p$ ja q:n paikalle $\neg q$ ja huomioidaan kaksoisnegaation sääntö $\neg\neg p \equiv p$,[3] niin nähdään kaavan

$$\mathbf{O}p \to \mathbf{O}(\neg p \to \neg q)$$

olevan validi. Mutta tämä on sama kaava kuin $1a \to 3a$. Siis käännöksessä A ei kolmas lause $3a$ ole riippumaton muista lauseista, vaan se seuraa loogisesti lauseesta $1a$. Priorin paradoksin lause Pa

$$\neg p \to (p \to \mathbf{O}q)$$

osoittaa suoraan, että käännöksessä B (vast. D) lause $4b$ (vast. $4d$) implikoi loogisesti lauseen $2b$ (vast. $2d$).

Käännös C ei säilytä ristiriidattomuutta. Ensinnäkin suoraan modus ponenssin avulla saadaan, että kaavasta $3c = \neg p \to \mathbf{O}\neg q$ ja kaavasta $4c = \neg p$ seuraa kaava $\mathbf{O}\neg q$. Kaava (K) $\mathbf{O}(p \to q) \to (\mathbf{O}p \to \mathbf{O}q)$ voidaan esittää lauselogiikan perusteella (harjoitustehtävä 30) muodossa

$$\big(\mathbf{O}p \wedge \mathbf{O}(p \to q)\big) \to \mathbf{O}q.$$

Tämän implikaation etulause on sama kuin käännöksen C kaavojen $1c$ ja $2c$ konjunktio $1c \wedge 2c$, joten soveltamalla päättelysääntöä modus ponens (MP) saadaan johtopäätös $\mathbf{O}q$. Intuitiivisesti tämä on ristiriidassa edellä johdetun kaavan $\mathbf{O}\neg q$ kanssa,

[3] Käytimme merkintää $\equiv$ loogiselle ekvivalenttisuudelle eli $A \equiv B$, jos $\models A \leftrightarrow B$ eli kaavat A ja B ovat loogisesti ekvivalentit.

mutta osoitamme tämänkin täsmällisesti: Operaattorin $\mathbf{P}$ määritelmän perusteella

$$\mathbf{O}\neg q \equiv \neg\mathbf{P}\neg\neg q \equiv \neg\mathbf{P}q.$$

Aksiooman (OD) mukaan $\mathbf{O}q \to \mathbf{P}q$, joten kaavasta $\mathbf{O}q$ seuraa $\mathbf{P}q$. Siis siitä, että $\mathbf{O}q$ ja $\mathbf{O}\neg q$ seuraa aksiooman (OD) avulla ristiriita '$\neg\mathbf{P}$ ja $\mathbf{P}q$'. Käännöksen C ristiriitaisuus voidaan osoittaa myös semanttisesti (harjoitustehtävä 31).

Käännösten A, B, C ja D epäonnistumiselle on seuraava selitys intuitiivisen semantiikan avulla : Käännöksissä kolmas lause kuvaa ns. hyvitysvelvollisuutta (reparational obligation, contrary-to-duty-imperatives). Niiden tarkoitus on vastustaa (intuitiivisesti selvästikin virheellistä) ajatusta, että jos jotakin velvollisuutta on rikottu, niin mitkään moraaliperiaatteet eivät enää sovellu. Deonttisen logiikan systeemin SDL semantiikan vaihtoehtorelaatio R viittaa kuitenkin vain täydellisiin deonttisiin maailmoihin, joissa kaikki ensisijaiset velvollisuudet aina täytetään.

Chisholmin paradoksi muistuttaa tyypin I paradokseja. Sen ratkaisemiseksi on kehitettävä sekä deonttista formaalikieltä että sen semantiikkaa. Tarkastelemme tässä kuitenkin vielä yhtä mahdollista yksinkertaista ratkaisua siihen. Johdannoksi tälle ratkaisuyritykselle tarkastelemme lauseita

D_1: 'jos sataa, käytän sateenvarjoa tai kastun',

D_2: 'käytän sateenvarjoa',

D_3: 'en kastu',

jotka näyttävät riippumattomilta, mutta implikaation totuusehtojen mukaan lause $D_2 = q$) implikoi lauseen $D_1 = p \to (q \vee r)$. Selitys tälle on se, että luonnollisessa kielessä tulkitsemme lauseessa D_1 olevan 'jos..., niin...' -ilmauksen tiukaksi (eli ankaraksi) implikaatioksi. Siitä, että nyt käytän sateenvarjoa, ei tietenkään seuraa, että on välttämätöntä, että jos sataa, niin käytän sateenvarjoa tai kastun (voinhan pysytellä sateen sattuessa sisälläkin). Kaavajoukko $\{p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} q \vee r,\ q,\ \neg r\}$ onkin riippumaton.

Tutkimme nyt, johtuisiko Chisholmin paradoksikin vain materiaalisen implikaation ominaisuuksista, jolloin se voitaisiin välttää käyttämällä formalisoinnissa tiukkaa implikaatiota $\mathrel{\Box\!\!\rightarrow}$ (myös merkintää "$\Rightarrow$" käytetään). Saamme seuraavat formalisoinnit:

$$\begin{array}{lll}
A^* & 1a. & \mathbf{O}p \\
 & 2a. & \mathbf{O}(p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} q) \\
 & 3a. & \mathbf{O}(\neg p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \neg q) \\
 & 4a. & \neg p
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
B^* & 1b. & \mathbf{O}p \\
 & 2b. & p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \mathbf{O}q \\
 & 3b. & \neg p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \mathbf{O}\neg q \\
 & 4b. & \neg p
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
C^* & 1c. & \mathbf{O}p \\
 & 2c. & \mathbf{O}(p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} q) \\
 & 3c. & \neg p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \mathbf{O}\neg q \\
 & 4c. & \neg p
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
D^* & 1d. & \mathbf{O}p \\
 & 2d. & p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \mathbf{O}q \\
 & 3d. & \mathbf{O}(\neg p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \neg q) \\
 & 4d. & \neg p
\end{array}$$

Oletuksia käytettävästä logiikasta

Tutkimme nyt tarkemmin näitä käännöksiä. Välttämättömyysoperaattorin $\Box$ tulkitsemme olevan systeemin $S5$ mukainen eli sille pätevät kaikki L-semantiikan validisuudet (mikä vastaa siis sellaista Kripke-semantiikkaa, jossa vaihtoehtorelaatio on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen). Oletamme, että deonttisen logiikan systeemimme on sellainen, että deonttisen peruslogiikan lisäksi aksioomaksi on asetettu ainakin

$$(OD) \qquad \mathbf{O}p \to \mathbf{P}p$$

ja

$$(OT) \qquad \mathbf{O}(\mathbf{O}p \to p).$$

Kumpikin näistä periaatteista tuntuu varsin luontevalta ja joka tapauksessa on oltava mahdollista sisällyttää ne käytettävään deonttisen logiikan systeemiin. Emme tässä aksiomatisoi tätä käyttämäämme systeemiä, mutta johdamme semanttisesti muutaman tarvitsemamme aputuloksen.

Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ Kripke-malli deonttiselle logiikalle. Nyt siis vaihtoehtorelaatio R antaa deonttiset vaihtoehdot, joita käytetään operaattorin $\mathbf{O}$ totuusehtojen määrittelyssä, ja välttämättömyysoperaattorin totuusehto on

$$w \vDash \Box A, \text{ jos } w' \vDash A \text{ kaikissa maailmoissa } w'.$$

Deonttisen vaihtoehtorelaation R pitää olla seriaalinen ja melkein refleksiivinen, jotta aksioomat (OD) ja (OT) ovat validit.

Oletetaan, että $w \vDash \mathbf{O}\Box A$. Koska R on seriaalinen, niin on olemassa ainakin yksi w:n deonttinen vaihtoehto u. Koska $u \vDash \Box A$, niin $w' \vDash A$ aina, kun $w' \in W$. Mutta täten myös $w \vDash \Box A$. Toisaalta jos $w \vDash \Box A$, niin kaikissa maailmoissa w' pätee, että $w' \vDash A$. Siis kaikissa maailmoissa w' ja täten myös kaikissa w:n deonttisissa vaihtoehdoissa pätee, että $w' \vDash \Box A$, joten $w \vDash \mathbf{O}\Box A$. Olemme näin johtaneet ensimmäisen tarvitsemamme aputuloksen

$$(A1) \qquad \vDash \mathbf{O}\Box A \leftrightarrow \Box A.$$

Myös kaava

$$(A2) \qquad \Box A \to \mathbf{O}A$$

on validi. Nimittäin jos $M, w \vDash \Box A$, niin jokaisessa maailmassa w' on totta $M, w' \vDash A$. Tällöin triviaalisti myös jokaisessa maailman w deonttisessa vaihtoehdossa u pätee, että $M, u \vDash A$. Siis $M, w \vDash \mathbf{O}A$ ja olemme näin osoittaneet, että $M, w \vDash \Box A \to \mathbf{O}A$.

Jätämme harjoitustehtäväksi 32 sen osoittamisen, että jos $M, w \vDash A$ ja $M, w \vDash \Box(A \to B)$, niin $M, w \vDash B$. Koska $A \mathrel{-\!\Box\!\!\to} B \overset{\text{def}}{=} \Box(A \to B)$, niin tämä antaa semanttisen perustelun päättelysäännölle

$$(MP_\Box) \qquad \frac{A,\ A \mathrel{-\!\Box\!\!\to} B}{B},$$

joka on siis modus ponenssin vastine tiukalle implikaatiolle.

Käännökset A^* ja D^*

Käännökset A^* ja D^* voidaan osoittaa konsisteiksi ja ristiriidattomiksi. Mutta aputuloksen $(A1)$ perusteella

$$\mathbf{O}(\neg p \mathrel{-\!\Box\!\!\rightarrow} \neg q) \equiv \mathbf{O}\Box(\neg p \rightarrow \neg q) \equiv \Box(\neg p \rightarrow \neg q) \equiv \neg p \mathrel{-\!\Box\!\!\rightarrow} \neg q.$$

Käännökset $3a$ ja $3d$ eivät siis toimi, koska niitä vastaavissa luonnollisenkielen lauseissa puhutaan (ehdollisista) velvollisuuksista, mutta niiden formaalit käännökset ovat ekvivalentteja sellaisten kaavojen kanssa, joissa ei esiinny ollenkaan deonttisia operaattoreita.

Käännökset B^* ja C^*

Jätämme harjoitustehtäväksi 33 sen osoittamisen, että käännöksen C^* mukaiset kaavat ovat ristiriitaiset, ja käsittelemme tässä käännöstä B^*. Toisin kuin materiaalista implikaatiota käyttävässä käännöksessä B ei nyt kaava $4b$ implikoi kaavaa $2b$ (harjoitustehtävä 34). Nyt kuitenkin päättelysäännön modus ponens vastineen $(MP_\Box)$ perusteella kaavoista $3b$ ja $4b$ seuraa kaava $\mathbf{O}\neg q$. Johdamme nyt kaavan $\mathbf{O}q$, jolloin aksioomaa (OD) soveltamalla päädymme ristiriitaan.

Soveltamalla aputulosta $(A2)$ $\Box A \rightarrow \mathbf{O}A$ saamme, että

$$\Box(p \rightarrow \mathbf{O}q) \rightarrow \mathbf{O}(p \rightarrow \mathbf{O}q).$$

Tämän ja kaavan $2b = p \mathrel{-\!\Box\!\!\rightarrow} \mathbf{O}q \equiv \Box(p \rightarrow \mathbf{O}q)$ perusteella saamme, että $\mathbf{O}(p \rightarrow \mathbf{O}q)$. Aksiooman (K) perusteella (sijoita q:n paikalle $\mathbf{O}q$)

$$\mathbf{O}(p \rightarrow \mathbf{O}q) \rightarrow (\mathbf{O}p \rightarrow \mathbf{OO}q),$$

joten saame ensin, että $\mathbf{O}p \rightarrow \mathbf{OO}q$ ja edelleen siitä kaavan $1b = \mathbf{O}p$ avulla, että $\mathbf{OO}q$.

Tehtävämme oli kuitenkin johtaa kaava $\mathbf{O}q$. Koska oletimme, että aksiooma (OT) $\mathbf{O}(\mathbf{O}q \rightarrow q)$ on voimassa (tässä p on korvattu q:lla) ja aksiooman (K) erään version mukaisesti

$$\mathbf{O}(\mathbf{O}q \rightarrow q) \rightarrow (\mathbf{OO}q \rightarrow \mathbf{O}q),$$

(sijoita alkuperäisessä aksioomassa (K) p:n tilalle $\mathbf{O}q$), niin jälleen päättelysäännön modus ponens perusteella $\mathbf{OO}q \rightarrow \mathbf{O}q$. Kaavasta $\mathbf{OO}q$ seuraa siis loppujen lopuksi kaava $\mathbf{O}q$ ja todistuksemme on valmis. Harjoitustehtävänä 35 on todistaa tämä sama asia semanttisesti.

Dyadinen deonttinen logiikka

Toimiva ratkaisu Chisholmin paradoksiin saadaan ottamalla käyttöön *dyadinen deonttinen logiikka*. Tässä logiikassa perusoperaattorina on kaksipaikkainen välttämättömyysoperaattori. Sille käytetään merkintää $\mathbf{O}(q/p)$ tai $\mathbf{O}_p q$ ja sen lukutapa englanniksi on ”q is obligatory given p” tai ”it ought to be that q given p”. Suomeksi voisi sanoa "on pakollista että q, kun p", "p:n olleessa voimassa q on velvollisuus" tai ehkä sujuvimmin "p velvoittaa q:n". Dyadiselle logiikalle voidaan esittää samanlainen mahdollisten maailmojen semantiikka kuin kontrafaktuaaleille. Emme tässä käsittele dyadista deonttista logiikkaa enemmän, vaan jätämme sen esityksen luentomuistiinpanojen varaan.

Harjoitustehtäviä

1. Kirjoita seuraavat lauseet formaaliin muotoon käyttämällä sopivia deonttisia operaattoreita ja atomilauseita $p =$ 'Pekka lainaa Maijalta auton', $q =$ 'Maija lainaa Pekalle autonsa' ja $r =$ 'Maija lupaa Pekalle lainata autonsa'.

   (a) 'Pekka saa lainata Maijalta auton ja Maijan on annettava Pekalle lupa tähän'

   (b) 'Maijan ei tarvitse luvata Pekalle autoansa lainaksi'

   (c) 'Jos Maija antaa Pekalle luvan lainata autonsa, Pekka saa lainata sen'

   (d) 'Pekka ei saa lainata Maijan autoa ilman lupaa Maijalta'

   (e) 'Jos Maija on velvollinen lainamaan autonsa Pekalle, hänen täytyy antaa Pekalle lupa sen lainaamiseen'

2. Olkoon p lause 'Pekka loukkaa Maijaa' ja q lause 'Pekka pyytää Maijalta anteeksi'.

   Miten luetaan seuraavat kaavat:

   (a) $\mathbf{O}p \to \mathbf{O}q$

   (b) $\mathbf{O}p \to q$

   (c) $p \to \mathbf{O}q$

   (d) $\mathbf{O}(p \to q)$

   Vaikuttavatko nämä mielekkäiltä väitteiltä luonnollisessa kielessä?

3. Onko olemassa sellaisia luonnollisen kielen lauseita p ja q, että on sallittua, että $p \wedge q$, mutta ei ole sallittua, että $q \wedge p$?

4. Tarkastellaan kaavoja

   $$\neg\big(\mathbf{O}(q \vee r) \wedge \neg\mathbf{P}q \wedge \neg\mathbf{P}r\big) \tag{1}$$

   ja

   $$\big(\mathbf{O}(p \to (q \vee r)) \wedge \neg\mathbf{P}q \wedge \neg\mathbf{P}r\big) \to \neg\mathbf{P}p. \tag{2}$$

   von Wrightin mukaan Tuomas Akvinolainen piti näitä periaatteita oikeina. Selitä, mitä kaavat (1) ja (2) tarkoittavat luonnolliselle kielelle tulkittuna. Oletko samaa mieltä Tuomas Akvinolaisen kanssa?

5. Pohdi, ovatko sen tapaiset iteroidut ilmaukset kuin $\mathbf{PO}p$, $\mathbf{PP}p$ ja $\mathbf{OP}p$ mielekkäitä luonnolliselle kielelle tulkittuina.

6. Määritellään $\mathbf{F}A \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathbf{P}A$ ja $\mathbf{P}A \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathbf{O}\neg A$. Osoita, että tällöin kaavat $\mathbf{F}A$ ja $\mathbf{O}\neg A$ ovat loogisesti ekvivalentit.

7. Milloin Kripke-semantiikassa $w \vDash \mathbf{F}A$?

8. Tavanmukaisen tulkinnan mukaan jokin on sallittua, jos sen kielto ei ole pakollista eli kaava $\mathbf{P}A \leftrightarrow \neg\mathbf{O}\neg A$ on loogisesti tosi.

   Pohdi, onko olemassa muunlaisiakin sallimisen muotoja eli voisiko olla niin, että ainakin toinen implikaatioista $\mathbf{P}A \rightarrow \neg\mathbf{O}\neg A$ tai $\neg\mathbf{O}\neg A \rightarrow \mathbf{P}A$ ei olisikaan looginen totuus.

   Miten semantiikkaa pitäisi muuttaa, jos halutaan, että nämä implikaatiot eivät olisi loogisia totuuksia?

9. Onko kaavan $A \rightarrow \mathbf{P}A$ ilmaisema periaate intuitiivisesti uskottava? Piirrä kuvio sellaisesta Kripke-mallista, jossa $w_0 \nvDash A \rightarrow \mathbf{P}A$.

10. Osoita, että jos $\exists w \in W\colon w_0Rw$ (joka on voimassa, jos R on seriaalinen), niin $w_0 \vDash \mathbf{O}A \rightarrow \mathbf{P}A$.

11. Osoita, että von Wrightin aksiooma

    $$(W2) \qquad \mathbf{P}(p \vee q) \leftrightarrow \mathbf{P}p \vee \mathbf{P}q$$

    on validi kaikissa Kripke-malleissa ja

    $$(W1) \qquad \mathbf{P}p \vee \mathbf{P}\neg p,$$

    validi sellaisissa Kripke-malleissa, joissa vaihtoehtorelaatio on seriaalinen.

12. Oletetaan, että w_1Rw_2, w_3Rw_4 ja w_4Rw_5. Täydennä relaatio R melkein refleksiiviseksi mahdollisimman vähäisillä muutoksilla. Olkoon kaava p tosi maailmoissa w_2, w_3 ja w_4. Missä maailmoissa esimerkkimallissasi on kaava $\mathbf{O}p \rightarrow p$ tosi, missä maailmoissa $\mathbf{O}(\mathbf{O}p \rightarrow p)$ on tosi?

13. Vaikuttaako periaate

    $$\mathbf{PO}A \rightarrow \mathbf{P}A$$

    mielekkäältä? Millä vaihtoehtorelaatiota koskevalla ehdolla se saadaan todeksi maailmassa w_0?

14. Mikä deonttisen logiikan kaava vastaa modaalilogiikan kaavaa $A \rightarrow \Box\Diamond A$? Arvioi tämän kaavan ilmaiseman periaatteen intuitiivista uskottavuutta.

15. Oletetaan, että wRw_1, wRw_2 ja wRw_3. Täydennä relaatio R euklidiseksi mahdollisimman vähäisillä muutoksilla. Oleta, että $w \vDash \Diamond\Box A$. Miksi tällöin $w_1 \vDash A$, $w_2 \vDash A$ ja $w_3 \vDash A$? Miksi on voimassa $w \vDash \Diamond\Box A \rightarrow \Box A$?

16. Olkoon w_0 aktuaalinen maailma ja u ja v sen deonttisia vaihtoehtoja. Pohdi, onko syytä edellyttää, että u ja v ovat toistensa deonttisia vaihtoehtoja.

17. Osoita, että jos Kripke-mallissa $M = \langle W, R, P\rangle$ vaihtoehtorelaatio R on melkein refleksiivinen, niin
$$M, w \models \mathbf{OO}p \to \mathbf{O}p$$
aina, kun $w \in W$.

18. Johda päättelysääntö
$$(RM_O) \qquad \frac{A \to B}{\mathbf{O}A \to \mathbf{O}B}.$$
Ohje: Hyödynnä päättelysääntöä (RN) ja aksioomaa K avulla (korvaa siinä p A:lla ja q B:llä). Aloita todistus olettamalla, että $A \to B$ on teoreema.

19. Osoita, että operaattorin $\mathbf{P}$ määritelmän ja edellä johdetun päättelysäännön (RM) avulla saadaan johdettua päättelysääntö
$$(RM_P) \qquad \frac{A \to B}{\mathbf{P}A \to \mathbf{P}B}.$$
Ohje: Hyödynnä lauselogiikan avulla saatavaa tulosta ”$A \to B$ ja $\neg B \to \neg A$ ovat loogisesti ekvivalentteja”. Aloita todistus olettamalla, että $A \to B$ on teoreema.

20. Perustele sääntöä (RM_P) käyttämällä, että normaaleissa deonttisissa logiikoissa on teoreemana
$$\mathbf{P}p \to \mathbf{P}(p \vee q).$$

21. Perustele lauselogiikan avulla, miksi periaate
$$\mathbf{P}p \to \mathbf{P}(p \vee q)$$
yleistyy muotoon
$$\mathbf{P}p \vee \mathbf{P}q \to \mathbf{P}(p \vee q).$$

22. Voidaan osoittaa, että normaaleissa deonttisissa logiikoissa on teoreemana
$$\mathbf{P}p \vee \mathbf{P}q \leftrightarrow \mathbf{P}(p \vee q).$$
Osoita että tämän teoreeman, aksiooman (OD) ja päättelysäännön (RN) avulla voidaan johtaa teoreema
$$\mathbf{P}p \vee \mathbf{P}\neg p.$$

23. Osoita, että kaava $\mathbf{P}(A \vee B) \to \mathbf{P}A \wedge \mathbf{P}B$ ei ole validi Kripke-semantiikassa, vaikka tarkasteltaisiin vain seriaalisia, melkein refleksiivisiä ja transitiivisia malleja. Kuvion piirtäminen riittää.

24. Etsi sellainen vaihtoehtorelaatiota R koskeva ehto, että mallissa $M = \langle W, R, P \rangle$ pätee, että $M, w \vDash \mathbf{P}(A \vee B) \to \mathbf{P}A \wedge \mathbf{P}B$. Mitä epäintuitiivisia seurauksia tästä ehdosta on?

25. Osoita, että kaava $\mathbf{P}(A \wedge B) \to \mathbf{P}A \wedge \mathbf{P}B$ on validi Kripke-semantiikassa.

26. Osoita, että kaava $Pa = \neg p \to (p \to \mathbf{O}q)$ on tautologia (ja siten validi).

    Osoita Kripke-semantiikan avulla, että myös kaava $Pd = \mathbf{O}q \to \mathbf{O}(p \to q)$ on validi.

27. Anna esimerkki sellaisesta suomenkielisestä tilannekuvauksesta, joka kuvaa Chisholmin paradoksin alkuasetelmaa

    (1) p on velvollisuus

    (2) p velvoittaa q:n

    (3) ei-p velvoittaa ei-q:n

    (4) p on epätosi

28. Tutki, ovatko tehtävässä 27 keksimäsi lauseet konsistentit ja riippumattomat.

29. Osoita totuustaulumenetelmällä, että lauselogiikan kaavat $p \vee q$, $r \to (p \wedge q)$ ja $r \vee s$ ovat konsistentit ja riippumattomat.

    Ohje: Konsistenttisuuden osoittamiseksi riittää löytää sellainen totuustaulun vaakarivi, jossa kaikki kaavat ovat tosia. Riippumattomuuden osoittamiseksi pitää löytää kutakin kaavaa kohden sellainen vaakarivi, jossa valittu kaava on epätosi ja muut kaavat tosia.

30. Osoita lauselogiikan avulla, että kaavat $A \to (B \to C)$ ja $(B \wedge A) \to C$ ovat loogisesti ekvivalentit.

31. Osoita, että ei voi olla olemassa sellaista Kripke-mallia $M = \langle W, R, P \rangle$, jossa R on seriaalinen ja jossa

$$M \vDash \mathbf{O}p, \qquad M \vDash \mathbf{O}(p \to q), \qquad M \vDash \neg p \to \mathbf{O}\neg q \qquad \text{ja} \qquad M \vDash \neg p.$$

32. Osoita, että jos $M, w \vDash A$ ja $M, w \vDash \Box(A \to B)$, niin $M, w \vDash B$.

33. Osoita, että käännöksen C^* mukaiset kaavat

$$\mathbf{O}p, \qquad \mathbf{O}(p \mathrel{-\!\Box\!\!\!\rightarrow} q), \qquad \neg p \mathrel{-\!\Box\!\!\!\rightarrow} \mathbf{O}\neg q, \qquad \neg p$$

    ovat ristiriitaiset.

    Ohje: Ota mallia siitä, miten materiaalista implikaatio käyttävä käännös C osoitettiin ristiriitaiseksi ja hyödynnä päättelysääntöä $(MP_{\Box})$ ja aputulosta $(A2)$.

34. Anna esimerkki mallista M, jossa

$$M, w \vDash \neg p \qquad \text{ja} \qquad M, w \nvDash p \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} \mathbf{O}q.$$

Kuvion piirtäminen riittää.

35. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ Kripke-malli, jossa R on seriaalinen ja melkein refleksiivinen. Määritellään kaavan $\Box A$ totuusehto L-semantiikan mukaisesti. Osoita, että ei ole mahdollista, että

$$M, w \vDash \mathbf{O}p, \quad M, w \vDash \Box(p \to \mathbf{O}q), \quad M, w \vDash \Box(\neg p \to \mathbf{O}\neg q), \quad M, w \vDash \neg p.$$